

Графен как квантовая теория поля в 2+1 измерении

В.В. Брагута

ИФВЭ

25 декабря, 2012



Углерод

Матеріал із Вікіпедії — свободної енциклопедії

[\[править\]](#)

У этого термина существуют и другие значения, см. Ульяновск (значения).

6 Учебник

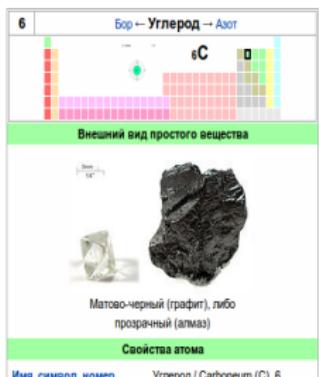
С 12.011

25²2n²

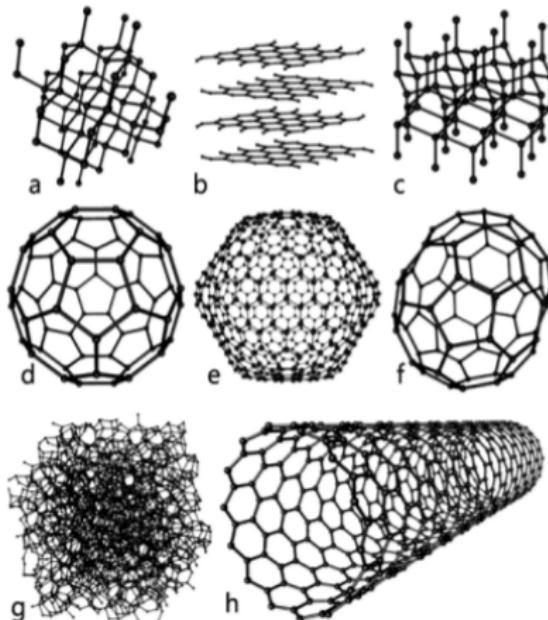
Углерод (химический символ — C) — химический элемент 4-ой группы главной подгруппы 2-го периода периодической системы Менделеева, порядковый номер 6, атомная масса — 12,0107^[5].

[Содержание](#) [\[убрать\]](#)

- 1 История
 - 1.1 Происхождение названия
 - 2 Физические свойства
 - 2.1 Изотопы углерода
 - 3 Аллотропные модификации углерода
 - 3.1 Кристаллический углерод
 - 3.2 Аморфный углерод

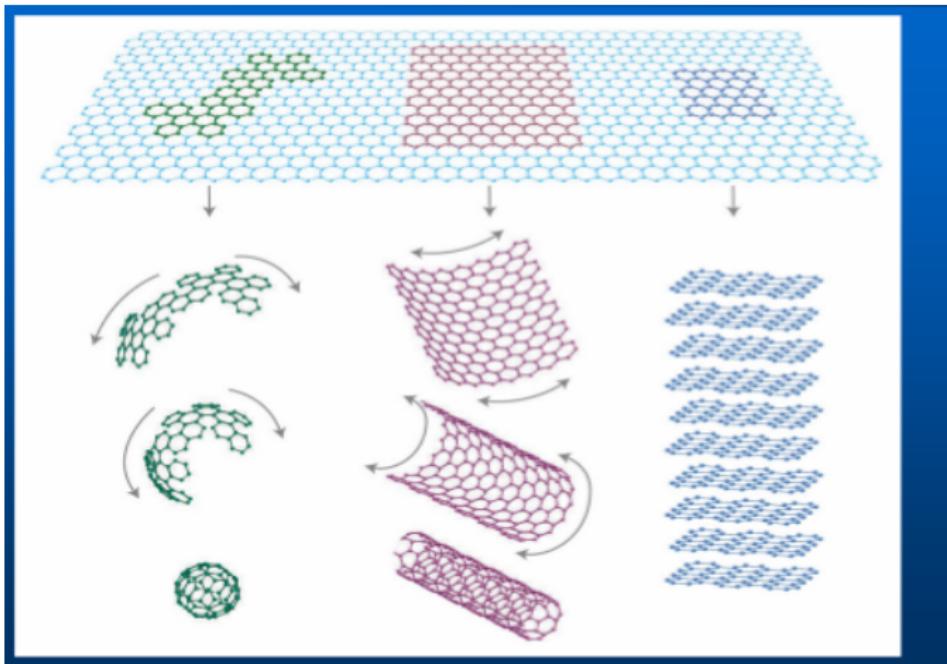


Соединения содержащие углерод



Some allotropes of carbon: a) [diamond](#); b) [graphite](#); c)[lonsdaleite](#); d-f)[fullerenes](#) (C_{60} , C_{540} , C_{70}); g) [amorphous carbon](#); h) [carbon nanotube](#).

Основная структура соединений углерода

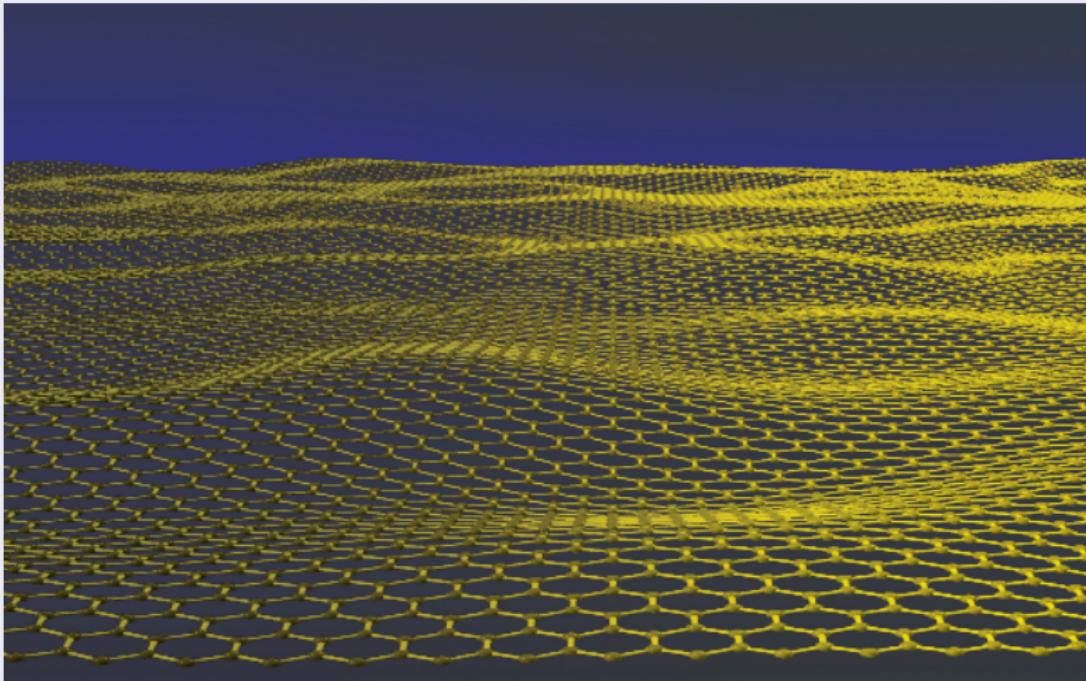


Fullerenes

Nanotubes

Graphite

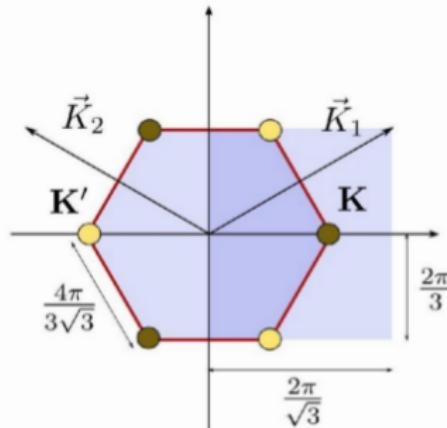
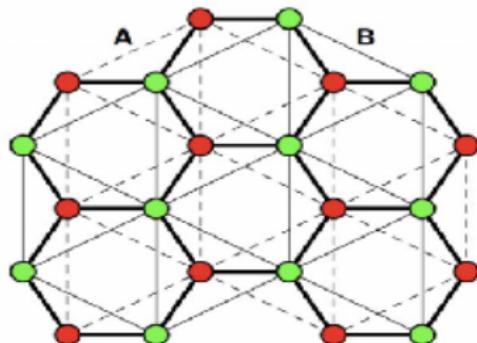
Графен



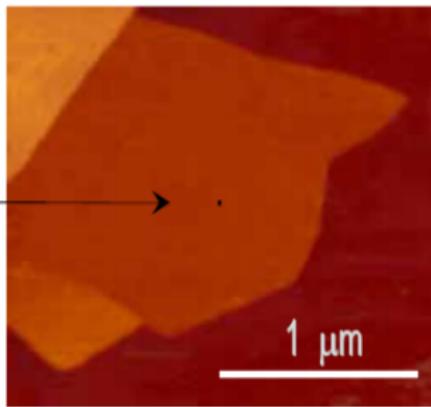
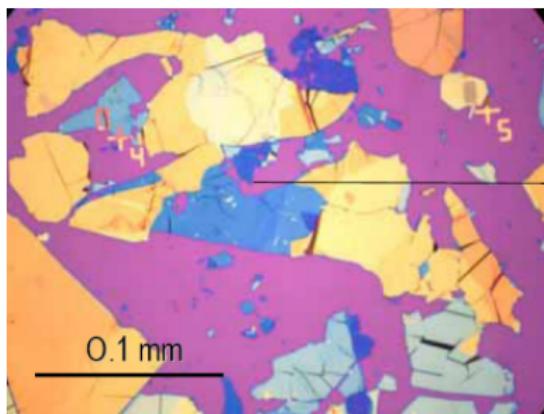
Нобелевская премия 2010 г. А. К. Гейму и К. С. Новосёлову

Свойства графена

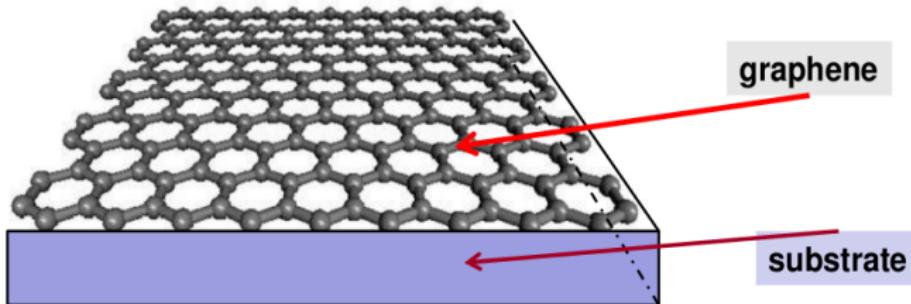
- Гексагональная решетка
- Две подрешетки (А, В)
- Расстояние между атомами $a = 0.142$ нм, шаг решетки $a_0 = 0.246$ нм
- Три электрона связывают соседние атомы С, один электрон остается "свободным"



Получение графена



Графен на подложке



Популярные подложки

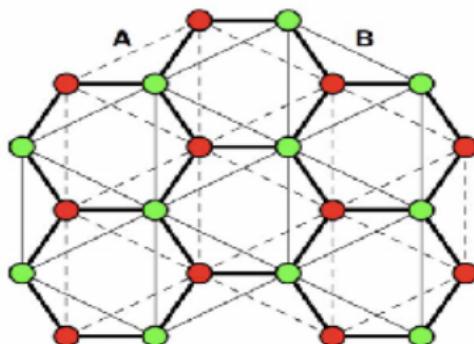
- $SiO_2 \epsilon \simeq 4$
- $BN \epsilon \simeq 3 - 4$

Меняя подложку меняем силу взаимодействия между зарядами ($\alpha_{ef} = \frac{2}{\epsilon+1} \alpha$)

Гамильтониан в приближении сильной связи

$$\hat{H}_{tb} = -\kappa \sum_{<xy>} \left(a_x^+ a_y + a_y^+ a_x \right), \quad \kappa = 2.8 \text{ eV}$$

$$\{a_i, a_j\} = 0, \quad \{a_i^+, a_j^+\} = 0, \quad \{a_i, a_j^+\} = \delta_{ij}$$

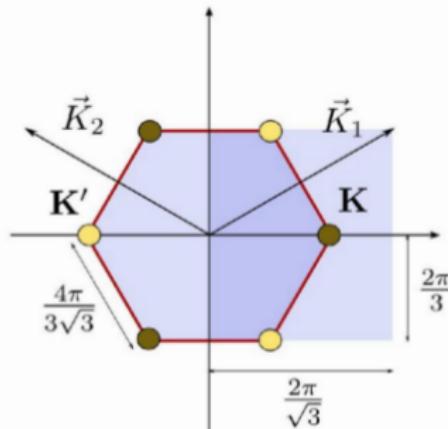
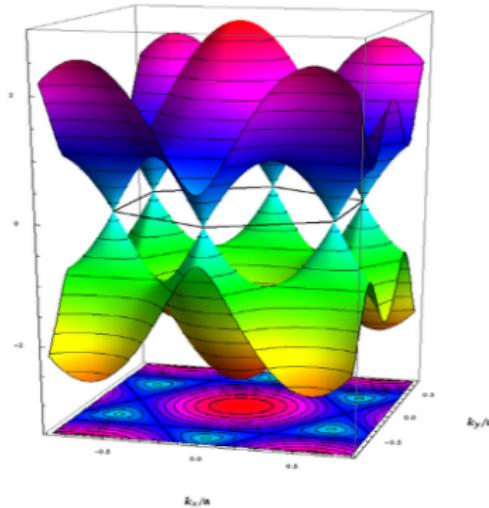


Диагонализуем гамильтониан

- $[\hat{H}, \hat{T}_{\mathbf{b}_i}] = 0$
- $\Psi = \sum_{r_A} c_A e^{ir_A k} a_{r_A}^+ |0\rangle + \sum_{r_B} c_B e^{ir_B k} a_{r_A}^+ |0\rangle$
- $\hat{H}\Psi = -\kappa \left(\sum_{r_A} \lambda c_B e^{ir_A k} a_{r_A}^+ + \sum_{r_B} \lambda^* c_A e^{ir_B k} a_{r_A}^+ \right) |0\rangle = E(k)\Psi, \quad \lambda = \sum_i e^{ik\rho_i}$
-
- $$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa\lambda \\ -\kappa\lambda^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} = E(k) \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix}$$
- $E(k) = \pm\kappa|\lambda| = \pm\kappa|\sum_i e^{ik\rho_i}|$

$$E(k) = \pm\kappa\sqrt{1 + 4\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_x\right) + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_x\right)\cos\left(\frac{3}{2}ak_x\right)}$$

Спектр квазичастиц





Низкоэнергетическая теория графена

$$\hat{H}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = v_f \begin{pmatrix} 0 & k_x \mp ik_y \\ k_x \pm ik_y & 0 \end{pmatrix} = v_f (q_x \sigma_x \pm q_y \sigma_y), v_f = \frac{3}{2} \kappa a$$

- $E = \pm v_f |\mathbf{k}|$, $v \sim \frac{1}{300}$
- квазичастицы – безмассовые фермионы
- два аромата фермионов
- кроме обычного спина, у фермиона есть псевдоспин, соответствующий разным подрешеткам

Графен как квантовая теория поля в 2+1 мерном пространстве

$$\Psi = (\psi_{KA}, \psi_{KB}, \psi_{K'A}, \psi_{K'B})$$

$$S = \int d\mathbf{x}_0 d^2x \bar{\Psi} (i\gamma_0 D_t - v_f i\vec{\gamma} \vec{D}) \Psi$$

Классический эффект Холла

- Сила действующая на заряженную частицу $\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{H}$
- В перпендикулярных полях ($\vec{H} \parallel OZ$, $\vec{E} \parallel OY$) скорость дрейфа: $v_x = \frac{E}{H}$
- $j_x = \sigma_{xy} E_y$, проводимость $\sigma_{xy} = \frac{en}{H}$

Квантовый эффект Холла

- Вклад в проводимость дают только электроны сидящие на уровнях Ландау
- $n = N g_s g_v \left(\frac{eHS}{h} \right) \frac{1}{S}$, N -номер уровня
- $\sigma_{xy} = g_s g_v N \frac{e^2}{h}$

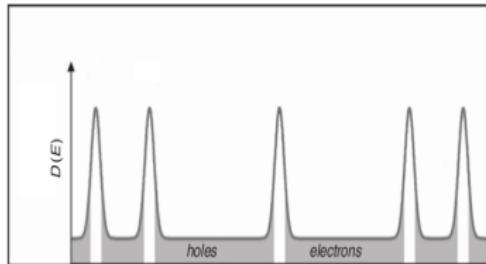
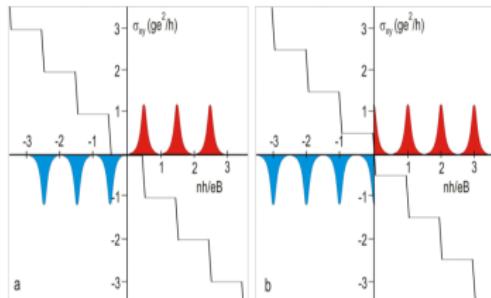


Рисунок из книги М. Кацнельсона "Graphene. Carbon in two dimensions"

Квантовый эффект Холла в графене

- Уровни Ландау для графена $E_L \sim \sqrt{N}$
- Уровни $N \neq 0$ двукратно вырождены из-за разных подрешеток А и В
- Нулевые моды ($E = 0$) для долины K сидят на подрешетке А, а для долины K' сидят на подрешетке В, т.е. нет двукратного вырождения
- $\sigma_{xy} = g_s g_v \left(N + \frac{1}{2} \right) \frac{e^2}{h}$



Наивные рассуждения

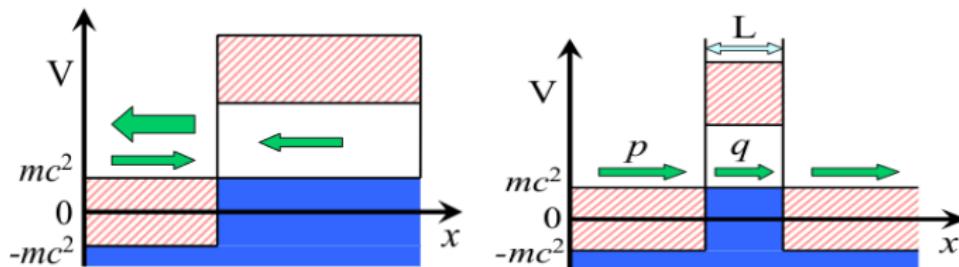
- $\sigma = e n v$
- $n = g_s g_v \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{\exp(E/T) + 1} \sim T^2$
- $\lim_{T \rightarrow 0} \sigma \rightarrow 0$

Проводимость в графене

- Проводимость за счет нулевых мод $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \psi_1 = 0, \frac{\partial}{\partial z} \psi_2 = 0, z = x + iy$
- Решение $\psi_1 = f(z), \psi_2 = g(\bar{z})$ определяется только геометрией
- Минимальная проводимость в графене $\sigma_{min} \sim \frac{e^2}{h}$

Парadox Клейна

- Если $V > E + mc^2$, то коэффициент отражения $R > 1$
- Коэффициент прохождения $T = \frac{1}{1 + \frac{m^2 V^2}{p^2 q^2} \sin^2(2qL)}$
- Для безмассовых фермионов $T = 1$ (киральные частицы не отражаются)



Рисунки из доклада Соколик А.А.

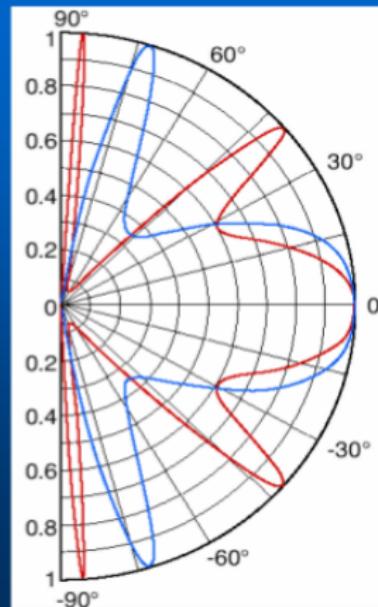
Klein paradox III

Transmission probability

Barrier width 100 nm

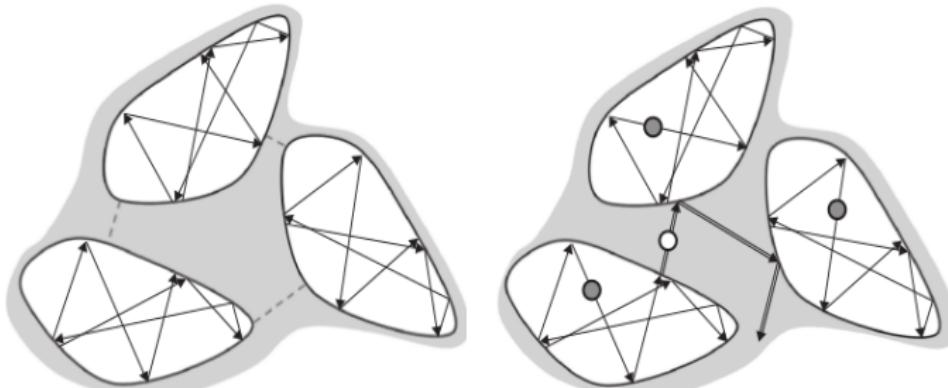
Electron concentration
outside barrier $0.5 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$

Hole concentration
inside barrier $1 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$
(red) and $3 \times 10^{12} \text{ cm}^{-2}$ (blue)



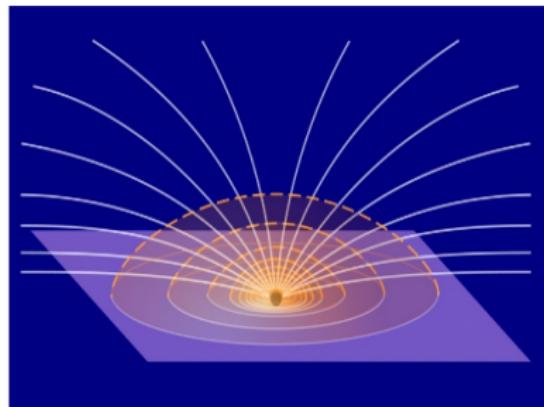
Локализация в графене

- В обычном полупроводнике проводимость подавлена за счет туннельного эффекта
- В графене за счет киральности электроны свободно распространяются ($\sigma \geq \frac{e^2}{h}$)



Рисунки из книги М. Кацельсона "Graphene. Carbon in two dimensions"

Электромагнитное поле распространяется в пространстве



Включение взаимодействия

$$S = \int dx_0 d^2x \bar{\Psi} (\gamma_0 (i\partial_0 - A_0) - v_f \vec{\gamma} (i\vec{\partial} - \vec{A})) \Psi - \frac{1}{4e^2} \int dx_0 d^3x F_{\mu\nu}^2$$

Делаем замену: $t \rightarrow t/v_f$, $A_0 \rightarrow v_f A_0$

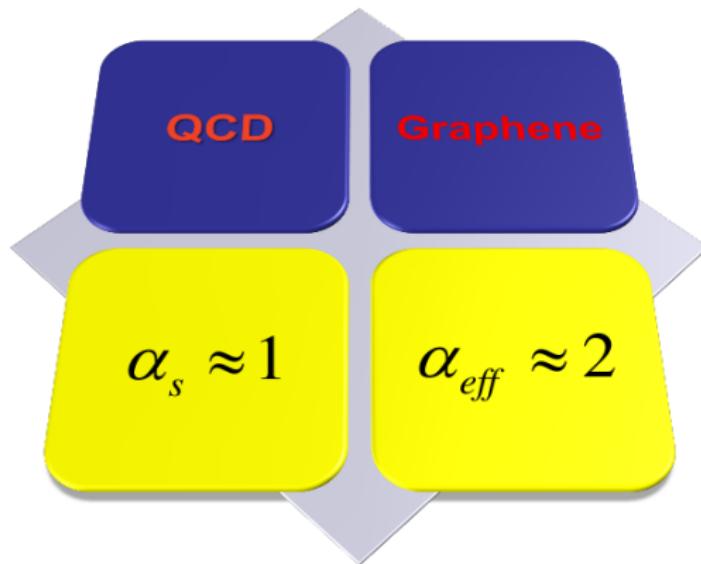
$$S = \int dx_0 d^2x \bar{\Psi} (i\gamma_\mu D^\mu) \Psi + \frac{v_f}{2e^2} \int dx_0 d^3x F_{0i}^2 - \frac{1}{4v_f e^2} \int dx_0 d^3x F_{ij}^2$$

Константы взаимодействий

- Взаимодействие с A_0 : $\alpha_{ef} \sim e^2/v_f \sim 2$
- Взаимодействие с A_i : $\alpha_{ef} \sim e^2 v_f \sim 10^{-4}$
- Учет влияния подложки: $\alpha_{ef} \rightarrow \frac{2}{\epsilon+1} \alpha_{ef}$

Взаимодействие квазичастиц в графене кулоновское $\alpha_{ef} \sim 2$
Эффектами запаздывания можно пренебречь

QCD and Graphene



Simulation of the effective graphene theory

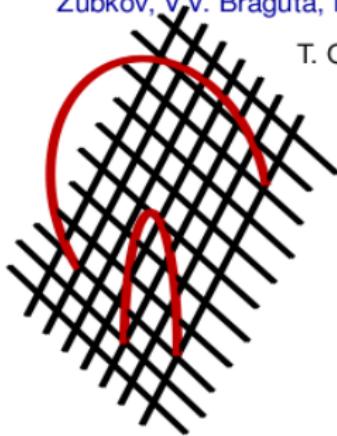
Approach 1, hypercubic lattice

J. E. Drut, T. A. Lahde, and E. Tolo (2009-2011)

W. Armour, S. Hands, and C. Strouthos (2008-2011)

P.V. Buividovich, O.V. Pavlovsky, M.V. Ulybyshev, E.V. Luschevskaya, M.A. Zubkov, V.V. Braguta, M.I. Polikarpov (2012)

T. Onogi and E. Shintani (2012)



(2+1)D fermions

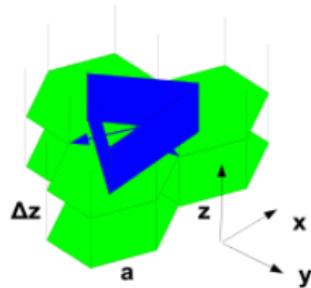
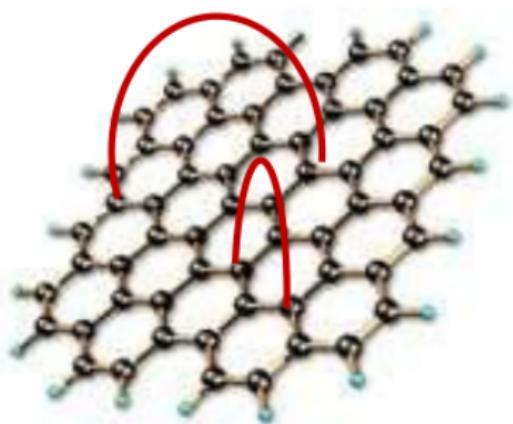
(3+1)D Coulomb

$$S_E \equiv \frac{1}{2g^2} \int d^3x dt (\partial_t A_0)^2 - \sum_{a=1}^{N_f} \int d^2x dt \bar{\psi}_a D[A_0] \psi_a,$$

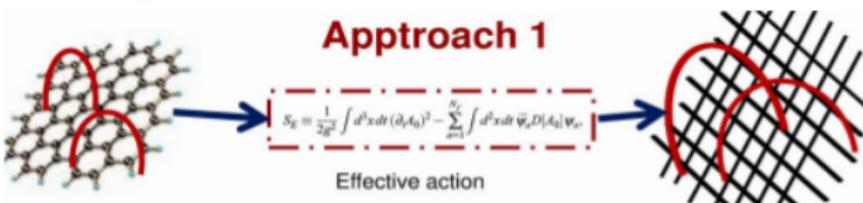
Simulation of the effective graphene theory Approach 2, 2D hexagonal lattice and rectangular lattice in Z and time dimensions

R. Brower, C. Rebbi, and D. Schaich (2011-2012)

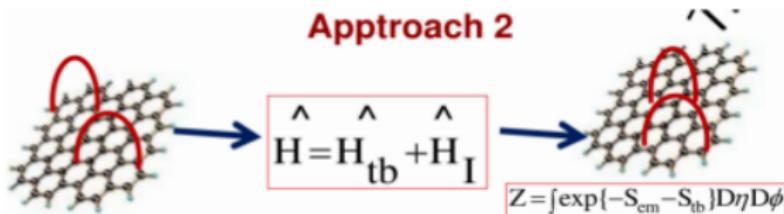
P.V. Buividovich, M.I.P. (2012)



Computer simulations

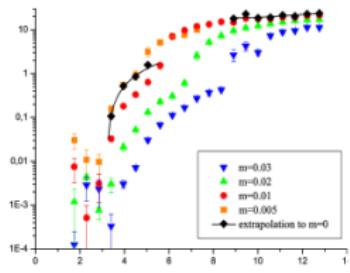


CPU + GPU

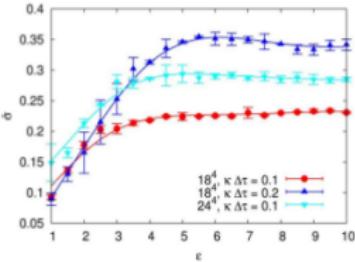


CPU + GPU (in progress)

Проводимость как функция диэлектрической проницаемости подложки



Approach 1
Hypercubic lattice



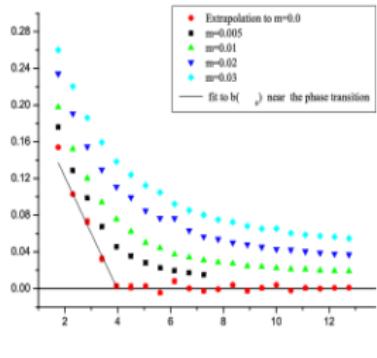
Approach 2
Hexagonal lattice

Свойства фазового перехода

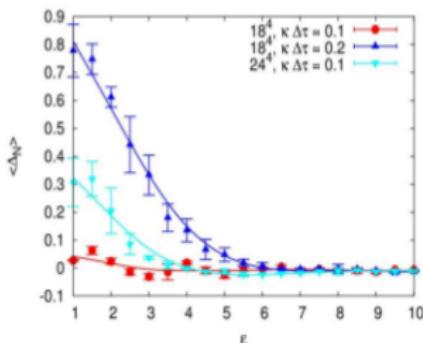
- Фазовый переход полупроводник-изолятор при $\epsilon \sim 3 - 4$
- $\epsilon \leq 3$ сильная связь: безмассовые π -мезоны, массивные фермионы, нарушение симметрии между подрешетками, $\langle \bar{\psi} \psi \rangle \neq 0$
- $\epsilon \geq 4$ слабая связь: безмассовые фермионы, симметрия между подрешетками не нарушена, $\langle \bar{\psi} \psi \rangle = 0$



Конденсат как функция диэлектрической проницаемости подложки



Approach 1
Hypercubic lattice



Approach 2
Hexagonal lattice

Существование фазового перехода полупроводник-изолятор

Experiment

G. Li, A. Luican, and E. Y. Andrei, Phys. Rev. Lett. **102**, 176804 (2009), [ArXiv:0803.4016](#).

K. I. Bolotin, K. J. Sikes, J. Hone, H. L. Stormer, and P. Kim, Phys. Rev. Lett. **101**, 096802 (2008), [ArXiv:0805.1830](#).

Lattice calculations

J. E. Drut, T. A. Lähde, and E. Tölö, PoS Lattice**2010**, 006 (2010), [ArXiv:1011.0643](#).

J. E. Drut and T. A. Lähde, *Signatures of a gap in the conductivity of graphene* (2010), [ArXiv:1005.5089](#).

J. E. Drut and T. A. Lähde, Phys. Rev. Lett. **102**, 026802 (2009), [ArXiv:0807.0834](#).

J. E. Drut and T. A. Lähde, Phys. Rev. B **79**, 165425 (2009), [ArXiv:0901.0584](#).

J. E. Drut and T. A. Lähde, Phys. Rev. B **79**, 241405 (2009), [ArXiv:0905.1320](#).

J. E. Drut, T. A. Lähde, and L. Suoranta, *First-order chiral transition in the compact lattice theory of graphene and the case for improved actions* (2010), [ArXiv:1002.1273](#).

J. E. Drut and T. A. Lähde, PoS Lattice**2011**, 074 (2011), [ArXiv:1111.0629](#).

Solution of the gap equation

H. Leal and D. V. Khveshchenko, Nucl. Phys. B **687**, 323 (2004), [ArXiv:cond-mat/0302164](#).

O. V. Gamayun, E. V. Gorbar, and V. P. Gusynin, Phys. Rev. B **81**, 075429 (2010), [ArXiv:0911.4878](#).

Strong coupling expansion

Y. Araki and T. Hatsuda, Phys. Rev. B **82**, 121403 (2010), [ArXiv:1003.1769](#).

Y. Araki, Ann.Phys. **326**, 1408 (2011), [ArXiv:1010.0847](#).

Y. Araki, Phys. Rev. B **85**, 125436 (2012), [ArXiv:1201.1737](#).

Отсутствие фазового перехода

Experiment

D. C. Elias, R. V. Gorbachev, A. S. Mayorov, S. V. Morozov, A. A. Zhukov, P. Blake, L. A. Ponomarenko, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. Guinea, et al., *Nature Phys.* **7**, 701 (2011), [ArXiv:1104.1396](#).

A. S. Mayorov, D. C. Elias, I. S. Mukhin, S. V. Morozov, L. A. Ponomarenko, K. S. Novoselov, A. K. Geim, and R. V. Gorbachev, *How close can one approach the dirac point in graphene experimentally?* (2012), [ArXiv:1206.3848](#).

Renormalization-group, mean field, large number of fermion flavors ...

R. Shankar, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 129-192 (1994) .

S. A. Jafari, *Eur.Phys.J.B* **68**, 537 (2009),
[ArXiv:0809.1109](#).

J. E. Drut and D. T. Son, *Phys. Rev. B* **77**, 075115 (2007), [ArXiv:0710.1315](#).

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание