

Что нового слышно про $\Delta = -1/2$?
(Памяти Ю. Г. Строганова)

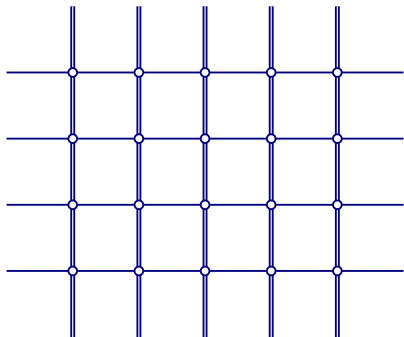
А. В. Разумов

Протвино, 23 июля 2012 г.

- 1 Вершинные модели
- 2 Шестивершинная модель
- 3 XXZ-спиновая цепочка при $\Delta = -1/2$

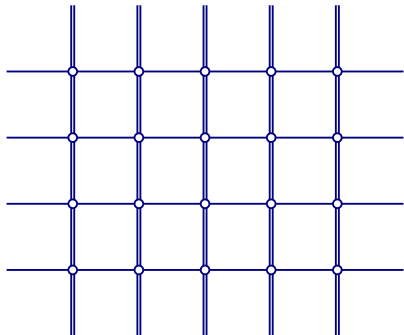
- ① Вершинные модели
- ② Шестивершинная модель
- ③ XXZ-спиновая цепочка при $\Delta = -1/2$

- 1 Вершинные модели
- 2 Шестивершинная модель
- 3 XXZ-спиновая цепочка при $\Delta = -1/2$



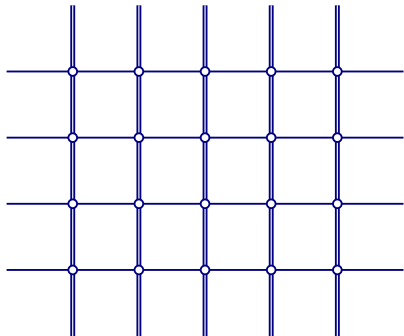
Общие определения

- **Игровое поле** — двумерная квадратная решетка размера $n \times m$.
- Каждое горизонтальное ребро может находиться в одном из ℓ состояний, и каждое вертикальное ребро — в одном из k состояний.
- Цель игры — найти статистическую сумму.
- Статистическая сумма — сумма больцмановских весов всех возможных состояний решетки.
- Больцмановский вес состояния — произведение больцмановских весов вершин.



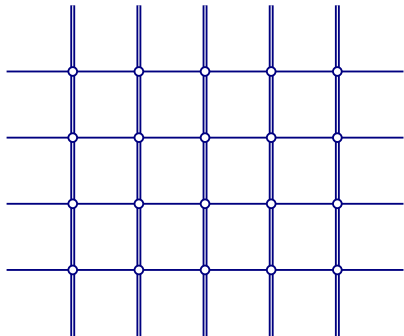
Общие определения

- **Игровое поле** — двумерная квадратная решетка размера $n \times m$.
- Каждое **горизонтальное ребро** может находиться в одном из ℓ состояний, и каждое **вертикальное ребро** — в одном из k состояний.
- Цель игры — найти статистическую сумму.
- **Статистическая сумма** — сумма больцмановских весов всех возможных состояний решетки.
- **Больцмановский вес состояния** — произведение больцмановских весов вершин.



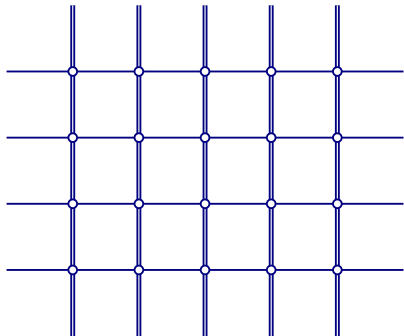
Общие определения

- **Игровое поле** — двумерная квадратная решетка размера $n \times m$.
- Каждое **горизонтальное ребро** может находиться в одном из ℓ состояний, и каждое **вертикальное ребро** — в одном из k состояний.
- **Цель игры** — найти статистическую сумму.
- **Статистическая сумма** — сумма больцмановских весов всех возможных состояний решетки.
- **Больцмановский вес состояния** — произведение больцмановских весов вершин.



Общие определения

- **Игровое поле** — двумерная квадратная решетка размера $n \times m$.
- Каждое **горизонтальное ребро** может находиться в одном из ℓ состояний, и каждое **вертикальное ребро** — в одном из k состояний.
- **Цель игры** — найти статистическую сумму.
- **Статистическая сумма** — сумма больцмановских весов всех возможных состояний решетки.
- **Больцмановский вес состояния** — произведение больцмановских весов вершин.



Общие определения

- **Игровое поле** — двумерная квадратная решетка размера $n \times m$.
- Каждое **горизонтальное ребро** может находиться в одном из ℓ состояний, и каждое **вертикальное ребро** — в одном из k состояний.
- **Цель игры** — найти статистическую сумму.
- **Статистическая сумма** — сумма больцмановских весов всех возможных состояний решетки.
- **Больцмановский вес состояния** — произведение больцмановских весов вершин.

Вес вершины

- **Больцмановский вес вершины** зависит от состояний прилегающих ребер.
- Свяжем с состояниями **горизонтальных** ребер **индексы** (a, b, \dots) , принимающие ℓ значений, и с состояниями **вертикальных** ребер **индексы** (i, j, \dots) , принимающие k значений.
- Суммирование по **состояниям** — суммирование по **индексам**.

Матрица монодромии

- Скомпонуем веса вершин в $(\ell k \times \ell k)$ -матрицу в соответствии с правилом

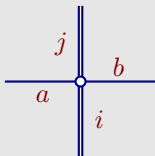
Вершинные модели

Вес вершины

- **Больцмановский вес вершины** зависит от состояний прилегающих ребер.
- Свяжем с состояниями **горизонтальных** ребер **индексы** (a, b, \dots) , принимающие ℓ значений, и с состояниями **вертикальных** ребер **индексы** (i, j, \dots) , принимающие k значений.
- Суммирование по **состояниям** — суммирование по **индексам**.

Матрица монодромии

- Скомпонуем веса вершин в $(\ell k \times \ell k)$ -матрицу в соответствии с правилом

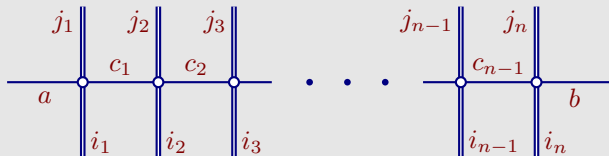


The diagram shows a central white circle representing a vertex. Four blue lines (edges) intersect at this vertex: a horizontal line, a vertical line, and two parallel lines on each side. The edges are labeled with indices: 'a' on the left horizontal edge, 'b' on the right horizontal edge, 'i' on the bottom vertical edge, and 'j' on the top vertical edge. To the right of the diagram is an equals sign followed by the matrix notation $M_{ai|bj}$.

$$\begin{array}{c} j \\ \parallel \\ \text{---} \circ \text{---} \\ \parallel \\ i \\ a \quad b \end{array} = M_{ai|bj}$$

Матрица монодромии для n вершин

- Сначала суммируем по состояниям внутренних горизонтальных ребер.

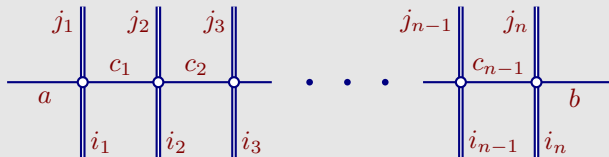


- Это дает матрицу с матричными элементами

$${}^{(n)}M_{ai_1i_2\dots i_n|bj_1j_2\dots j_n} = \sum_{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}} M_{ai_1|c_1j_1} M_{c_1i_2|c_2j_2} \dots M_{i_n c_{n-1}|j_n b}.$$

Матрица монодромии для n вершин

- Сначала суммируем по состояниям внутренних горизонтальных ребер.



- Это дает матрицу с матричными элементами

$${}^{(n)}M_{ai_1 i_2 \dots i_n | bj_1 j_2 \dots j_n} = \sum_{c_1, c_2, \dots, c_{n-1}} M_{ai_1 | c_1 j_1} M_{c_1 i_2 | c_2 j_2} \dots M_{i_n c_{n-1} | j_n b}$$

Трансфер-матрица

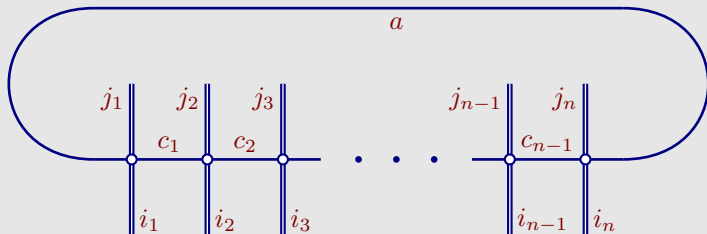
- Налагаем периодические граничные условия в горизонтальном направлении.
- Суммируем по состояниям граничных горизонтальных ребер

- Это дает матрицу с матричными элементами

$${}^{(n)}T_{i_1 i_2 \dots i_n | j_1 j_2 \dots j_n} = \sum_{a, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}} M_{a i_1 | c_1 j_1} M_{c_1 i_2 | c_2 j_2} \dots M_{i_n c_{n-1} | j_n a}.$$

Трансфер-матрица

- Налагаем периодические граничные условия в горизонтальном направлении.
- Суммируем по состояниям граничных горизонтальных ребер

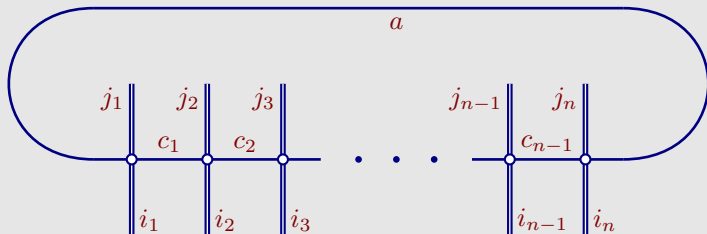


- Это дает матрицу с матричными элементами

$${}^{(n)}T_{i_1 i_2 \dots i_n | j_1 j_2 \dots j_n} = \sum_{a, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}} M_{a i_1 | c_1 j_1} M_{c_1 i_2 | c_2 j_2} \dots M_{i_n c_{n-1} | j_n a}$$

Трансфер-матрица

- Налагаем периодические граничные условия в горизонтальном направлении.
- Суммируем по состояниям граничных горизонтальных ребер



- Это дает матрицу с матричными элементами

$${}^{(n)}T_{i_1 i_2 \dots i_n | j_1 j_2 \dots j_n} = \sum_{a, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}} M_{a i_1 | c_1 j_1} M_{c_1 i_2 | c_2 j_2} \dots M_{i_n c_{n-1} | j_n a}$$

Статистическая сумма

- Налагая периодические граничные условия в вертикальном направлении, мы видим, что

$$Z = \text{tr}({}^{(n)}T)^m = \lambda_0^m + \lambda_1^m + \dots,$$

где $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots$ — собственные значения трансфер-матрицы ${}^{(n)}T$.

Термодинамический предел

- Термодинамический предел значит, что $n, m \rightarrow \infty$. Для удельной свободной энергии на узел мы имеем

$$\mathcal{F} = \frac{1}{mn} \ln Z = \frac{1}{n} \ln \lambda_0 + \frac{1}{mn} \ln \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^m + \dots \right) \approx \frac{1}{n} \ln \lambda_0.$$

Статистическая сумма

- Налагая периодические граничные условия в вертикальном направлении, мы видим, что

$$Z = \text{tr}({}^{(n)}T)^m = \lambda_0^m + \lambda_1^m + \dots,$$

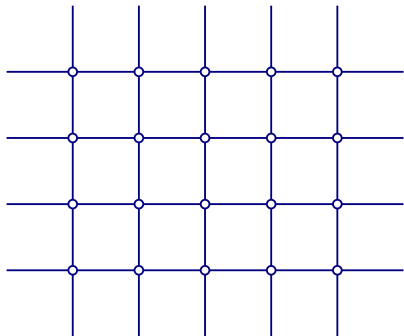
где $\lambda_0 > \lambda_1 > \dots$ — собственные значения трансфер-матрицы ${}^{(n)}T$.

Термодинамический предел

- Термодинамический предел значит, что $n, m \rightarrow \infty$. Для удельной свободной энергии на узел мы имеем

$$\mathcal{F} = \frac{1}{mn} \ln Z = \frac{1}{n} \ln \lambda_0 + \frac{1}{mn} \ln \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^m + \dots \right) \approx \frac{1}{n} \ln \lambda_0.$$

Шестивершинная модель

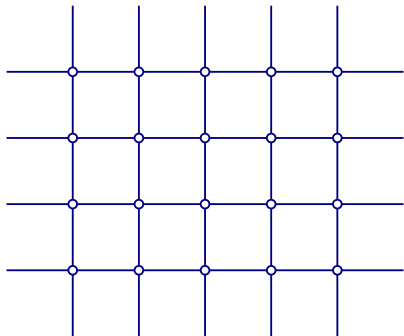


Правило льда

- Для каждой вершины имеются ровно две стрелки, направленные в нее, и ровно две стрелки направленные из нее.

Разрешенные конфигурации вершин

Шестивершинная модель

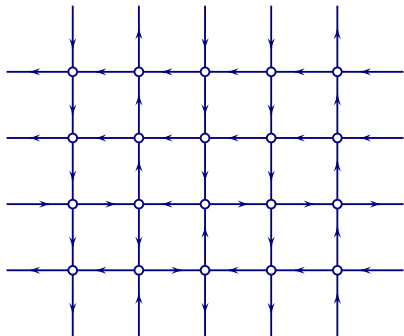


Правило льда

- Для каждой вершины имеются ровно **две стрелки**, направленные **в нее**, и ровно **две стрелки** направленные **из нее**.

Разрешенные конфигурации вершин

Шестивершинная модель

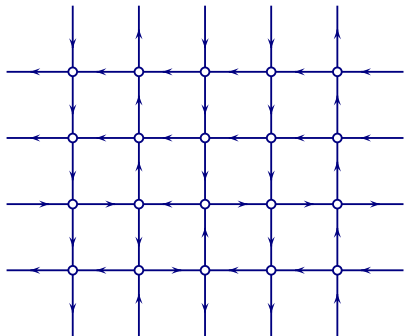


Правило льда

- Для каждой вершины имеются ровно **две стрелки**, направленные **в нее**, и ровно **две стрелки** направленные **из нее**.

Разрешенные конфигурации вершин

Шестивершинная модель



Правило льда

- Для каждой вершины имеются ровно **две стрелки**, направленные **в нее**, и ровно **две стрелки** направленные **из нее**.

Разрешенные конфигурации вершин



Больцмановские веса

- Напомним, что **статистическая сумма** равна **сумме больцмановских весов** всех возможных конфигураций.
- **Больцмановский вес конфигурации** — произведение больцмановских весов вершин.

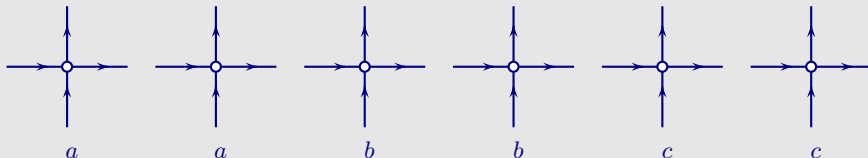
Больцмановские веса вершин для шестивершинной модели

Шестивершинная модель

Больцмановские веса

- Напомним, что **статистическая сумма** равна сумме **больцмановских весов** всех возможных конфигураций.
- **Больцмановский вес конфигурации** — произведение **больцмановских весов** вершин.

Больцмановские веса вершин для шестивершинной модели



Коммутирующие трансфер-матрицы

- Можно показать, что

$$[T(a, b, c), T(a', b', c')] = 0$$

если

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'b'}$$

Спектральный параметр

- Стандартная параметризация

$$a = \rho(q\zeta - q^{-1}\zeta^{-1}), \quad b = \rho(\zeta - \zeta^{-1}), \quad c = \rho(q - q^{-1}).$$

- Легко видеть, что для такой параметризации

$$\Delta = (q + q^{-1})/2.$$

Коммутирующие трансфер-матрицы

- Можно показать, что

$$[T(a, b, c), T(a', b', c')] = 0$$

если

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'b'} = \Delta.$$

Спектральный параметр

- Стандартная параметризация

$$a = \rho(q\zeta - q^{-1}\zeta^{-1}), \quad b = \rho(\zeta - \zeta^{-1}), \quad c = \rho(q - q^{-1}).$$

- Легко видеть, что для такой параметризации

$$\Delta = (q + q^{-1})/2.$$

Коммутирующие трансфер-матрицы

- Можно показать, что

$$[T(a, b, c), T(a', b', c')] = 0$$

если

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'b'} = \Delta.$$

Спектральный параметр

- Стандартная параметризация

$$a = \rho(q\zeta - q^{-1}\zeta^{-1}), \quad b = \rho(\zeta - \zeta^{-1}), \quad c = \rho(q - q^{-1}).$$

- Легко видеть, что для такой параметризации

$$\Delta = (q + q^{-1})/2.$$

Коммутирующие трансфер-матрицы

- Можно показать, что

$$[T(a, b, c), T(a', b', c')] = 0$$

если

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a'^2 + b'^2 - c'^2}{2a'b'} = \Delta.$$

Спектральный параметр

- Стандартная параметризация

$$a = \rho(q\zeta - q^{-1}\zeta^{-1}), \quad b = \rho(\zeta - \zeta^{-1}), \quad c = \rho(q - q^{-1}).$$

- Легко видеть, что для такой параметризации

$$\Delta = (q + q^{-1})/2.$$

Q-оператор Бэкстера

- Трансфер-матрицы для **различных значений** спектрального параметра **коммутируют**:

$$[T(\zeta), T(\zeta')] = 0.$$

- Бэкстер доказал существование (матрицы) оператора $Q(\zeta)$ со свойствами

$$[Q(\zeta), Q(\zeta')] = 0, \quad [Q(\zeta), T(\zeta')] = 0.$$

TQ-уравнение Бэкстера

- Операторное уравнение:

$$T(\zeta)Q(\zeta) = a^n(\zeta)Q(q^{-1}\zeta) + b^n(\zeta)Q(q\zeta).$$

- Уравнение для собственных значений:

$$\lambda(\zeta)\theta(\zeta) = a^n(\zeta)\theta(q^{-1}\zeta) + b^n(\zeta)\theta(q\zeta).$$

Q-оператор Бэкстера

- Трансфер-матрицы для **различных значений** спектрального параметра **коммутируют**:

$$[T(\zeta), T(\zeta')] = 0.$$

- **Бэкстер доказал** существование (матрицы) оператора $Q(\zeta)$ со свойствами

$$[Q(\zeta), Q(\zeta')] = 0, \quad [Q(\zeta), T(\zeta')] = 0.$$

TQ-уравнение Бэкстера

- Операторное уравнение:

$$T(\zeta)Q(\zeta) = a^n(\zeta)Q(q^{-1}\zeta) + b^n(\zeta)Q(q\zeta).$$

- Уравнение для собственных значений:

$$\lambda(\zeta)\theta(\zeta) = a^n(\zeta)\theta(q^{-1}\zeta) + b^n(\zeta)\theta(q\zeta).$$

Q-оператор Бэкстера

- Трансфер-матрицы для **различных значений** спектрального параметра **коммутируют**:

$$[T(\zeta), T(\zeta')] = 0.$$

- **Бэкстер доказал** существование (матрицы) оператора $Q(\zeta)$ со свойствами

$$[Q(\zeta), Q(\zeta')] = 0, \quad [Q(\zeta), T(\zeta')] = 0.$$

TQ-уравнение Бэкстера

- **Операторное** уравнение:

$$T(\zeta)Q(\zeta) = a^n(\zeta)Q(q^{-1}\zeta) + b^n(\zeta)Q(q\zeta).$$

- Уравнение для **собственных значений**:

$$\lambda(\zeta)\theta(\zeta) = a^n(\zeta)\theta(q^{-1}\zeta) + b^n(\zeta)\theta(q\zeta).$$

Q-оператор Бэкстера

- Трансфер-матрицы для **различных значений** спектрального параметра **коммутируют**:

$$[T(\zeta), T(\zeta')] = 0.$$

- **Бэкстер доказал** существование (матрицы) оператора $Q(\zeta)$ со свойствами

$$[Q(\zeta), Q(\zeta')] = 0, \quad [Q(\zeta), T(\zeta')] = 0.$$

TQ-уравнение Бэкстера

- **Операторное** уравнение:

$$T(\zeta)Q(\zeta) = a^n(\zeta)Q(q^{-1}\zeta) + b^n(\zeta)Q(q\zeta).$$

- Уравнение **для собственных значений**:

$$\lambda(\zeta)\theta(\zeta) = a^n(\zeta)\theta(q^{-1}\zeta) + b^n(\zeta)\theta(q\zeta).$$

Специальное значение параметра q

- Для $q = \exp(\pm 2\pi i/3)$ ($\Delta = -1/2$) имеются основания предполагать существование решения TQ -уравнения с

$$\lambda(\zeta) = -(q^{-1}\zeta - q\zeta^{-1})^n.$$

- В этом случае для функции

$$\varphi(\zeta) = (q^{-1}\zeta - q\zeta^{-1})^n \theta(\zeta)$$

TQ -уравнение принимает вид

$$\varphi(\zeta) + \varphi(q\zeta) + \varphi(q^2\zeta) = 0.$$

Явное решение этого уравнения нашел Юрий Строганов

- Yu. G. Stroganov, *The importance of being odd*, J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) L179-L185.

Специальное значение параметра q

- Для $q = \exp(\pm 2\pi i/3)$ ($\Delta = -1/2$) имеются основания предполагать существование решения TQ -уравнения с

$$\lambda(\zeta) = -(q^{-1}\zeta - q\zeta^{-1})^n.$$

- В этом случае для функции

$$\varphi(\zeta) = (q^{-1}\zeta - q\zeta^{-1})^n \theta(\zeta)$$

TQ -уравнение принимает вид

$$\varphi(\zeta) + \varphi(q\zeta) + \varphi(q^2\zeta) = 0.$$

Явное решение этого уравнения нашел Юрий Строганов

- Yu. G. Stroganov, *The importance of being odd*, J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) L179-L185.

Специальное значение параметра q

- Для $q = \exp(\pm 2\pi i/3)$ ($\Delta = -1/2$) имеются основания предполагать существование решения TQ -уравнения с

$$\lambda(\zeta) = -(q^{-1}\zeta - q\zeta^{-1})^n.$$

- В этом случае для функции

$$\varphi(\zeta) = (q^{-1}\zeta - q\zeta^{-1})^n \theta(\zeta)$$

TQ -уравнение принимает вид

$$\varphi(\zeta) + \varphi(q\zeta) + \varphi(q^2\zeta) = 0.$$

Явное решение этого уравнения нашел **Юрий Строганов**

- Yu. G. Stroganov, *The importance of being odd*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) L179-L185.

XXZ-спиновая цепочка при $\Delta = -1/2$

Гамильтониан XYZ-спиновой цепочки

$$H_{XYZ} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [J_x \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + J_y \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + J_z \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z]$$

- **Периодические** граничные условия

$$\sigma_{n+1}^x = \sigma_n^x, \quad \sigma_{n+1}^y = \sigma_n^y, \quad \sigma_{n+1}^z = \sigma_n^z.$$

Частные случаи

- $J_x = J_y$ — XXZ-спиновая цепочка.
- $J_x = J_y = J_z$ — XXX-спиновая цепочка (модель Гейзенберга).
- $J_z = 0$ — XY-спиновая цепочка.
- $J_x = J_y, J_z = 0$ — XX-спиновая цепочка.

XXZ-спиновая цепочка при $\Delta = -1/2$

Гамильтониан XYZ-спиновой цепочки

$$H_{XYZ} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [J_x \sigma_k^x \sigma_{k+1}^x + J_y \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y + J_z \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z]$$

- **Периодические** граничные условия

$$\sigma_{n+1}^x = \sigma_n^x, \quad \sigma_{n+1}^y = \sigma_n^y, \quad \sigma_{n+1}^z = \sigma_n^z.$$

Частные случаи

- $J_x = J_y$ — **XXZ**-спиновая цепочка.
- $J_x = J_y = J_z$ — **XXX**-спиновая цепочка (модель Гейзенберга).
- $J_z = 0$ — **XY**-спиновая цепочка.
- $J_x = J_y, J_z = 0$ — **XX**-спиновая цепочка.

XXZ-спиновая цепочка при $\Delta = -1/2$

Связь с шестивершинной моделью

- Гамильтониан XXZ-спиновой цепочки связан с **трансфер-матрицей** шестивершинной модели следующим образом:

$$T(\zeta) \frac{dT(\zeta)}{d\zeta} \Big|_{\zeta=1} = -\frac{2}{q - q^{-1}} \left(H_{XYZ} \Big|_{J_x=1, J_y=1, J_z=\Delta} - \frac{n\Delta}{2} \right).$$

- Из этого равенства, в частности, следует, что

$$[H_{XXZ}, T(\zeta)] = 0,$$

где

$$H_{XXZ} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z].$$

- При $\Delta = -1/2$, если существует **собственный вектор** трансфер-матрицы с собственным значением $\lambda(\zeta) = -(q^{-1}\zeta - q\zeta^{-1})^n$, то он является **собственным вектором** гамильтониана H_{XXZ} с собственным значением

$$E = -3n/4.$$

В игру вступает МАТЕМАТИКА

- Было показано, что собственный вектор гамильтониана H_{XXZ} с собственным значением $E = -3n/4$ существует при $\Delta = -1/2$ для **нечетных** $n = 1, 3, \dots, 17$. Для **четных** $n = 2, 4, \dots, 16$ такого вектора нет.

Результаты приведены в работе

- A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov, *Spin chains and combinatorics*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 3185–3190.
- Там же сформулирован ряд **гипотез** о свойствах собственного вектора.

В игру вступает МАТЕМАТИКА

- Было показано, что собственный вектор гамильтониана H_{XXZ} с собственным значением $E = -3n/4$ существует при $\Delta = -1/2$ для **нечетных** $n = 1, 3, \dots, 17$. Для **четных** $n = 2, 4, \dots, 16$ такого вектора нет.

Результаты приведены в работе

- A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov, *Spin chains and combinatorics*, J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 3185–3190.
- Там же сформулирован ряд **гипотез** о свойствах собственного вектора.

Гипотеза 1

- **Основное состояние** гамильтониана $H_{XXZ}|_{\Delta=-1/2}$ при нечетных n имеет энергию $-3n/4$.

Доказательство

- X. Yang and P. Fendley, *Non-local space-time supersymmetry on the lattice*, J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 8937-48;
- G. Veneziano and J. Wosiek, *A supersymmetric matrix model: III. Hidden SUSY in statistical systems*, JHEP **11** (2006) 030.

Гипотеза 2

- Если нормировать **наименьшую компоненту** вектора основного состояния на 1, то все остальные компоненты оказываются целыми положительными числами. При этом **наибольшая компонента** для $n = 2m + 1$ совпадает с числом A_m матриц чередующихся знаков порядка m .

Доказательство

- A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov and P. Zinn-Justin, *Polynomial solutions of qKZ equation and ground state of XXZ spin chain at $\Delta = -1/2$* , J. Phys. A: Math. Theor. **40** (2007) 11827-11847.

XXZ-спиновая цепочка при $\Delta = -1/2$

Определение

Матрица порядка m , удовлетворяющая условиям

- все матричные элементы равны 0 , $+1$ или -1
- $+1$ и -1 чередуются в каждом ряду и каждом столбце
- первый и последний ненулевой матричный элемент в каждом ряду и каждом столбце равны $+1$

называется **матрицей чередующихся знаков** порядка m .

All alternating-sign matrices of order 3

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \\ +1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ +1 & -1 & +1 \\ 0 & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Гипотеза 3

- Принимая описанную выше нормировку, получаем что **сумма квадратов компонент** вектора основного состояния равна \mathcal{N}_m^2 а **сумма компонент** равна $3^{m/2}\mathcal{N}_m$, где

$$\mathcal{N}_m = \frac{3^{m/2}}{2^m} \frac{2 \cdot 5 \cdots (3m-1)}{1 \cdot 3 \cdots (2m-1)} A_m.$$

Доказательство

- P. Di Francesco, P. Zinn-Justin and J.-B. Zuber, *Sum rules for the ground states of the $O(1)$ loop model on a cylinder and the XXZ spin chain*, J. Stat. Phys.: Theor. Exp. (2006) P08011.

XXZ-спиновая цепочка при $\Delta = -1/2$

- Для описания **корреляционных функций** удобно использовать операторы

$$\alpha_k = (1 + \sigma_k^z)/2.$$

Гипотеза 4

- Для вероятности обнаружения ферромагнитной струны длины p справедливо равенство

$$\frac{\langle \alpha_1 \cdots \alpha_{p-1} \rangle}{\langle \alpha_1 \cdots \alpha_{p-1} \alpha_p \rangle} = \frac{(2p-2)!(2p-1)!(2m+p)!(m-p)!}{(p-1)!(3p-2)!(2m-p+1)!(m+p-1)!}.$$

Доказательство

- N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov and V. Terras, *Emptiness formation probability of the XXZ spin-1 / 2 Heisenberg chain at $\Delta = 1/2$* , J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) L385-L388.
- L. Cantini, *Finite size emptiness formation probability of the XXZ spin chain at $\Delta = -1/2$* , arxiv:1110.2404.