Теорема Хаага в коммутативном и некоммутативном вариантах квантовой теории поля

К. В. Антипин

МГУ им. М. В. Ломоносова,
физический факультет,
кафедра квантовой теории и физики высоких энергий

Научный руководитель — проф., д. ф.-м. н. Вернов Ю. С.

Москва, 2013 г.

Предварительные замечания

- Смысл операторов в гильбертовом пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$ имеют сглаженные по всем четырем координатам поля $\varphi(f)$:

$$\varphi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) f(x)\, d^4x$$

Предварительные замечания

- Смысл операторов в гильбертовом пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$ имеют сглаженные по всем четырем координатам поля $\varphi(f)$:

$$\varphi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) f(x)\, d^4x$$

- Локальное квантованное поле $\varphi(x)$ определяется как обобщенная функция с операторными значениями.

Предварительные замечания

- Смысл операторов в гильбертовом пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$ имеют сглаженные по всем четырем координатам поля $\varphi(f)$:

$$\varphi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) f(x)\, d^4x$$

- Локальное квантованное поле $\varphi(x)$ определяется как обобщенная функция с операторными значениями.
- Конкретный выбор пространства пробных функций $f(x)$ зависит от рассматриваемой задачи.

Предварительные замечания

- Смысл операторов в гильбертовом пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$ имеют сглаженные по всем четырем координатам поля $\varphi(f)$:

$$\varphi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) f(x)\, d^4x$$

Пример

В аксиоматике Уайтмана в качестве пространства основных функций выступает пространство Шварца S.

$$\|f\|_p = \sup_{x \atop |k|,\,|q|\leqslant p} |x^k D^q f(x)| < \infty \quad \forall f(x) \in S.$$

Предварительные замечания

- Смысл операторов в гильбертовом пространстве векторов состояний $\mathcal{H}$ имеют сглаженные по всем четырем координатам поля $\varphi(f)$:

$$\varphi(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \varphi(x) f(x)\, d^4x$$

- В гамильтоновом подходе определенный смысл приписывается полям в фиксированный момент времени:

$$\varphi(f,\, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(t,\, \vec{x}) f(\vec{x})\, d^3x.$$

Функции Уайтмана

Функции Уайтмана

Определение

Вакуумное среднее

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \langle \Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \Psi_0 \rangle \quad (1)$$

от обычного произведения полей $\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)$ называется n-точечной функцией Уайтмана.

Функции Уайтмана

Определение

Вакуумное среднее

$$W(x_1, \ldots, x_n) = \langle \Psi_0, \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n) \Psi_0 \rangle \quad (1)$$

от обычного произведения полей $\varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n)$ называется n-точечной функцией Уайтмана.

- Функции Уайтмана определены как обобщенные функции (обобщенные функции умеренного роста).

Функции Уайтмана

Определение

Вакуумное среднее

$$W(x_1, \dots, x_n) = \langle \Psi_0, \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \Psi_0 \rangle \tag{1}$$

от обычного произведения полей $\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n)$ называется n-точечной функцией Уайтмана.

- Функции Уайтмана определены как обобщенные функции (обобщенные функции умеренного роста).
- Теорема реконструкции: по функциям Уайтмана можно восстановить теорию, а именно: гильбертово пространство состояний, унитарное представление собственной группы Пуанкаре и ковариантные операторные поля.

Формулировка теоремы Хаага

Пусть:

Формулировка теоремы Хаага

Пусть:

- $\varphi_1(f,t)$ и $\varphi_2(f,t)$ — два неприводимых набора операторов скалярного нейтрального поля в момент времени t, определенных в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

Формулировка теоремы Хаага

Пусть:

- $\varphi_1(f,t)$ и $\varphi_2(f,t)$ — два неприводимых набора операторов скалярного нейтрального поля в момент времени t, определенных в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.
- Обе теории инвариантны относительно собственной группы Пуанкаре:

$$U_j(a,\Lambda)\varphi_j(x)U_j^{-1}(a,\Lambda) = \varphi_j(\Lambda x + a)$$
$$U_j(a,\Lambda)\Psi_{0j} = \Psi_{0j}, \quad j = 1,2.$$

Формулировка теоремы Хаага

Пусть:

- $\varphi_1(f,t)$ и $\varphi_2(f,t)$ — два неприводимых набора операторов скалярного нейтрального поля в момент времени t, определенных в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.
- Обе теории инвариантны относительно собственной группы Пуанкаре:

$$U_j(a,\Lambda)\varphi_j(x)U_j^{-1}(a,\Lambda) = \varphi_j(\Lambda x + a)$$
$$U_j(a,\Lambda)\Psi_{0j} = \Psi_{0j}, \quad j = 1,2.$$

- Существует унитарное преобразование V:

$$\varphi_2(f,t) = V\varphi_1(f,t)V^{-1}$$
$$c\Psi_{02} = V\Psi_{01}.$$

Формулировка теоремы Хаага

Пусть:

- $\varphi_1(f,t)$ и $\varphi_2(f,t)$ — два неприводимых набора операторов скалярного нейтрального поля в момент времени t, определенных в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.
- Обе теории инвариантны относительно собственной группы Пуанкаре:

$$U_j(a,\Lambda)\varphi_j(x)U_j^{-1}(a,\Lambda) = \varphi_j(\Lambda x + a)$$
$$U_j(a,\Lambda)\Psi_{0j} = \Psi_{0j}, \quad j = 1,2.$$

- Существует унитарное преобразование V:

$$\varphi_2(f,t) = V\varphi_1(f,t)V^{-1}$$
$$c\Psi_{02} = V\Psi_{01}.$$

- Спектр оператора энергии-импульса P сосредоточен в замкнутом верхнем световом конусе (постулат спектральности):

$$P^0 \geqslant |\vec{P}|.$$

Формулировка теоремы Хаага

Тогда:

Формулировка теоремы Хаага

Тогда:

- Функции Уайтмана, в которые входят до четырех операторов таких полей включительно, в обеих теориях совпадают.

Формулировка теоремы Хаага

Тогда:

- Функции Уайтмана, в которые входят до четырех операторов таких полей включительно, в обеих теориях совпадают.
- Если $\varphi_1(x)$ — свободное поле массы $m \geqslant 0$, то $\varphi_2(x)$ — также свободное поле массы m и обе теории совпадают с точностью до унитарного преобразования V.

Постановка задач

Постановка задач

1. Обобщить теорему Хаага на некоммутативную квантовую теорию поля.

Постановка задач

1. Обобщить теорему Хаага на некоммутативную квантовую теорию поля.
   - $SO(1,\, k)$-инвариантная теория с произвольным фиксированным числом m некоммутативных координат.

Постановка задач

1. Обобщить теорему Хаага на некоммутативную квантовую теорию поля.
   - $SO(1, k)$-инвариантная теория с произвольным фиксированным числом m некоммутативных координат.
   - Space/space-некоммутативность.

Постановка задач

1. Обобщить теорему Хаага на некоммутативную квантовую теорию поля.
   - $SO(1, k)$-инвариантная теория с произвольным фиксированным числом m некоммутативных координат.
   - Space/space-некоммутативность.
   - Time/space-некоммутативность.

Постановка задач

1. Обобщить теорему Хаага на некоммутативную квантовую теорию поля.
   - $SO(1,\, k)$-инвариантная теория с произвольным фиксированным числом m некоммутативных координат.
   - Space/space-некоммутативность.
   - Time/space-некоммутативность.
2. Получить некоторые следствия из теоремы для процессов рассеяния частиц в многомерном некоммутативном пространстве.

Постановка задач

1. Обобщить теорему Хаага на некоммутативную квантовую теорию поля.
   - $SO(1, k)$-инвариантная теория с произвольным фиксированным числом m некоммутативных координат.
   - Space/space-некоммутативность.
   - Time/space-некоммутативность.
2. Получить некоторые следствия из теоремы для процессов рассеяния частиц в многомерном некоммутативном пространстве.
3. Распространить теорему на теории с индефинитной метрикой (теории с нефизическими частицами).

$\boxed{\text{Некоммутативное пространство-время}}$

Некоммутативное пространство-время

- Осуществляется замена 4-мерных координат на операторы:

$$x^\mu \longrightarrow \hat{x}^\mu, \quad \mu = \overline{0,3}.$$

Некоммутативная теория

Некоммутативное пространство-время

- Осуществляется замена 4-мерных координат на операторы:

$$x^{\mu} \longrightarrow \hat{x}^{\mu}, \qquad \mu = \overline{0,3}.$$

- Постулируются коммутационные соотношения:

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{2}$$

где $\theta^{\mu\nu}$ - постоянная антисимметричная матрица.

Некоммутативная теория

Некоммутативное пространство-время

- Осуществляется замена 4-мерных координат на операторы:

$$x^\mu \longrightarrow \hat{x}^\mu, \quad \mu = \overline{0, 3}.$$

- Постулируются коммутационные соотношения:

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{2}$$

где $\theta^{\mu\nu}$ - постоянная антисимметричная матрица.

- Соотношение (2) нарушает лоренц-инвариантность теории, но в ней сохраняется трансляционная инвариантность, а также $\boxed{SO(1,\ 1) \times SO(2) \text{ - симметрия}}$.

Space/space-некоммутативность

$$\boxed{\theta^{0i} = 0,\ i = \overline{1,3}}$$

Space/space-некоммутативность

$$\boxed{\theta^{0i} = 0,\ i = \overline{1,3}}$$

- Существует линейное преобразование координат, такое, что

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Space/space-некоммутативность

$$\boxed{\theta^{0i} = 0,\ i = \overline{1,3}}$$

- Существует линейное преобразование координат, такое, что

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

- координаты x^0 и x^1 коммутативны, а координаты x^2 и x^3 - некоммутативны.

Space/space-некоммутативность

$$\boxed{\theta^{0i} = 0,\ i = \overline{1,3}}$$

- Существует линейное преобразование координат, такое, что

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix}$$

- координаты x^0 и x^1 коммутативны, а координаты x^2 и x^3 - некоммутативны.
- Теория нелокальна в пространстве на масштабе $\sqrt{\theta}$.

Time/space-некоммутативность

Общий случай $\boxed{\theta^{0i} \neq 0}$

Time/space-некоммутативность

Общий случай $\boxed{\theta^{0i} \neq 0}$

- Линейная замена координат:

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta' \\ 0 & 0 & -\theta' & 0 \end{pmatrix}$$

- Коммутативные координаты выделить нельзя.

Time/space-некоммутативность

Общий случай $\boxed{\theta^{0i} \neq 0}$

- Линейная замена координат:

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta' \\ 0 & 0 & -\theta' & 0 \end{pmatrix}$$

- Коммутативные координаты выделить нельзя.
- Теория нелокальна как во времени, так и в пространстве.

$SO(1, k)$-инвариантная теория

- Теория, инвариантная относительно собственных преобразований Лоренца в $(k+1)$ - мерном пространстве, затрагивающих одну временную переменную и k коммутативных пространственных переменных.

- Теория, инвариантная относительно собственных преобразований Лоренца в $(k+1)$ -мерном пространстве, затрагивающих одну временную переменную и k коммутативных пространственных переменных.
- Число некоммутативных координат равно $m = 2n$ и соотношения между ними имеют вид:

$$[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta_1, \quad , \ldots , \quad [\hat{x}^{2n-1}, \hat{x}^{2n}] = i\theta_n.$$

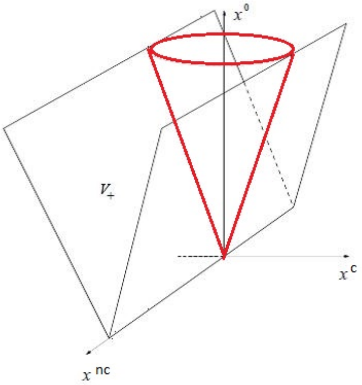
Здесь $\theta_1, \ldots, \theta_n$ — положительные действительные параметры, а остальные коммутаторы равны нулю.

Обобщение теоремы Хаага

Доказательство основывается на спектральном условии и свойствах аналитического продолжения функций Уайтмана:

- Спектральное условие:

$$P_n^0 \geqslant \left[\sum_{i=1}^{k} (P_n^i)^2 \right]^{1/2}$$



Замкнутый верхний конус по коммутативным координатам.

Обобщение теоремы Хаага

- Аналитичность в расширенном домене T_n:

$$\mathbf{T}_n = \bigcup_{\Lambda_c} \Lambda_c \, \mathbf{T}_n^+ ,$$

где Λ_c— аналог комплексного преобразования Лоренца в $(k+1)$-мерном пространстве, $\mathbf{T}_n^+$ - будущая трубчатая область

$$\mathbf{T}_n^+ = \{z_j = x_j + iy_j;\, y_j \in \mathbf{V}^+,\, x_j \in \mathbb{R}^{k+1},\, j = 1, \ldots, n\}$$

Обобщение теоремы Хаага

- Аналитичность в расширенном домене T_n:

$$\mathbf{T}_n = \bigcup_{\Lambda_c} \Lambda_c \, \mathbf{T}_n^+ ,$$

где Λ_c— аналог комплексного преобразования Лоренца в $(k+1)$-мерном пространстве, $\mathbf{T}_n^+$ - будущая трубчатая область

$$\mathbf{T}_n^+ = \{z_j = x_j + iy_j;\, y_j \in \mathbf{V}^+,\, x_j \in \mathbb{R}^{k+1},\, j = 1, \ldots, n\}$$

- Расширенный домен $\mathbf{T}_n$ содержит вещественные точки аналитичности — **точки Йоста.**

Обобщение теоремы Хаага

- Из условий теоремы следует, что все функции Уайтмана в обеих рассматриваемых теориях совпадают при равных временах:

$$\langle \Psi_{01}, \varphi_1(t, x_1), \ldots, \varphi_1(t, x_n)\Psi_{01}\rangle = \langle \Psi_{02}, \varphi_2(t, x_1), \ldots, \varphi_2(t, x_n)\Psi_{02}\rangle$$

Обобщение теоремы Хаага

- Из условий теоремы следует, что все функции Уайтмана в обеих рассматриваемых теориях совпадают при равных временах:

$$\langle \Psi_{01}, \varphi_1(t, x_1), \ldots, \varphi_1(t, x_n) \Psi_{01} \rangle = \langle \Psi_{02}, \varphi_2(t, x_1), \ldots, \varphi_2(t, x_n) \Psi_{02} \rangle$$

- При $n \leqslant k + 1$ точки с равными временными компонентами и точки, полученные из них собственными преобразованиями Лоренца, образуют вещественную окрестность в области аналитичности функций Уайтмана.

Обобщение теоремы Хаага

- Из условий теоремы следует, что все функции Уайтмана в обеих рассматриваемых теориях совпадают при равных временах:

$$\langle \Psi_{01}, \varphi_1(t, x_1), \ldots, \varphi_1(t, x_n) \Psi_{01} \rangle = \langle \Psi_{02}, \varphi_2(t, x_1), \ldots, \varphi_2(t, x_n) \Psi_{02} \rangle$$

- При $n \leqslant k + 1$ точки с равными временными компонентами и точки, полученные из них собственными преобразованиями Лоренца, образуют вещественную окрестность в области аналитичности функций Уайтмана.
- Если же $n > k + 1$, то такое множество не образует открытого подмножества точек Йоста.

Обобщение теоремы Хаага

Вывод

В случае $SO(1, k)$ - симметрии и произвольного числа m некоммутативных переменных в теориях, связанных унитарным преобразованием, совпадают первые $k+1$ функции Уайтмана.

Следствия: коммутативная $SO(1, k)$-теория

- Пусть $k \geqslant 3$ и $< p_3, p_4 | p_1, p_2 >_i$, $i = 1, 2$, — амплитуды упругого рассеяния для полей $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответственно.

- Пусть $k \geqslant 3$ и $< p_3, p_4 | p_1, p_2 >_i$, $i = 1, 2$, — амплитуды упругого рассеяния для полей $\varphi_1\,(x)$ и $\varphi_2\,(x)$ соответственно.
- Согласно редукционным формулам,

$$< p_3, p_4 | p_1, p_2 >_i \sim \int d\,x_1 \ldots d\,x_4\ \exp\{i\,(-p_1\,x_1 - p_2\,x_2 + p_3\,x_3 + p_4\,x_4)\}\times$$
$$\times \prod_{j=1}^{4} (\Box_j + m^2)\,\langle \Psi_{0i} | T\,\varphi_i\,(x_1)\ \ldots\ \varphi_i\,(x_4) | \Psi_{0i} \rangle, \tag{3}$$

где $T\,\varphi_i\,(x_1)\ \ldots\ \varphi_i\,(x_4)$ — хронологическое произведение операторов.

Следствия: коммутативная $SO(1, k)$-теория

- Пусть $k \geqslant 3$ и $< p_3, p_4 | p_1, p_2 >_i$, $i = 1, 2,$ — амплитуды упругого рассеяния для полей $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ соответственно.
- Согласно редукционным формулам,

$$< p_3, p_4 | p_1, p_2 >_i \sim \int dx_1 \ldots dx_4 \, \exp\{i(-p_1 x_1 - p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4)\} \times \\ \times \prod_{j=1}^{4} (\Box_j + m^2) \langle \Psi_{0i} | T \varphi_i(x_1) \ldots \varphi_i(x_4) | \Psi_{0i} \rangle, \tag{3}$$

где $T\varphi_i(x_1) \ldots \varphi_i(x_4)$ — хронологическое произведение операторов.

- Из равенства $W_2(x_1, \ldots, x_4) = W_1(x_1, \ldots, x_4)$ и (3) следует, что

$$< p_3, p_4 | p_1, p_2 >_2 = < p_3, p_4 | p_1, p_2 >_1 . \tag{4}$$

Следствия: коммутативная $SO(1, k)$-теория

- По оптической теореме полные сечения для полей $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают.

Следствия: коммутативная $SO(1, k)$-теория

- По оптической теореме полные сечения для полей $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ совпадают.
- В частности, если S-матрица для поля $\varphi_1(x)$ равна единице, тогда она также равна единице для поля $\varphi_2(x)$.

Следствия: коммутативная $SO(1, k)$-теория

- Рассмотрим процессы рассеяния “$2 \to n$”, $n \geqslant 3$.

Следствия: коммутативная $SO(1,\,k)$-теория

- Рассмотрим процессы рассеяния “$2 \to n$”, $n \geqslant 3$.
- В соответствии с редукционной формулой

$$< p_1', p_2', \ldots p_n' | p_1, p_2 >_i \; \sim \int d\,x_1 \ldots d\,x_{n+2} \, \exp\{i\,(-p_1\,x_1 - p_2\,x_2 + p_1'\,x_3 + \\ + \ldots + p_n'\,x_{n+2})\} \times \prod_{j=1}^{n} (\Box_j + m^2) \, \langle \Psi_{0i} | T\,\varphi_i\,(x_1) \, \ldots \, \varphi_i\,(x_{n+2}) | \Psi_{0i} \rangle. \tag{5}$$

Следствия: коммутативная $SO(1,\, k)$-теория

- Рассмотрим процессы рассеяния “$2 \to n$”, $n \geqslant 3$.
- В соответствии с редукционной формулой

$$< p_1', p_2', \ldots p_n' | p_1, p_2 >_i \sim \int d\,x_1 \ldots d\,x_{n+2} \exp\{i\,(-p_1\,x_1 - p_2\,x_2 + p_1'\,x_3 + \\ + \ldots + p_n'\,x_{n+2})\} \times \prod_{j=1}^{n} (\Box_j + m^2)\,\langle \Psi_{0i} | T\,\varphi_i\,(x_1)\ \ldots\ \varphi_i\,(x_{n+2}) | \Psi_{0i} \rangle. \tag{5}$$

- амплитуды этих процессов совпадают в двух теориях, если совпадают $(n+2)$-точечные функции Уайтмана, т.е., если

$$n \leqslant k - 1.$$

Следствия: некоммутативная $SO(1, d)$-теория

- Рассмотрим $SO(1, d)$-инвариантную теорию с некоторым числом дополнительных некоммутативных размерностей l.

Следствия: некоммутативная $SO(1, d)$-теория

- Рассмотрим $SO(1, d)$-инвариантную теорию с некоторым числом дополнительных некоммутативных размерностей l.
- Функции Грина:

$$G_n(x_1, \ldots, x_n) = \langle \Psi_0 | T(\varphi(x_1) \star \ldots \star \varphi(x_n)) | \Psi_0 \rangle, \tag{6}$$

Следствия: некоммутативная $SO(1,\, d)$-теория

- Рассмотрим $SO(1,\, d)$-инвариантную теорию с некоторым числом дополнительных некоммутативных размерностей l.
- Функции Грина:

$$G_n(x_1,\, \ldots,\, x_n) = \langle \Psi_0 | T(\varphi(x_1) \star \ldots \star \varphi(x_n)) | \Psi_0 \rangle, \tag{6}$$

- $\star$-произведение операторов, взятых в различных точках:

$$\varphi(x_1) \star \ldots \star \varphi(x_n) = \prod_{a<b} \exp\left(\frac{i}{2}\, \theta^{\mu\nu}\, \frac{\partial}{\partial x_a^\mu}\, \frac{\partial}{\partial x_b^\nu} \right) \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_n), \qquad a, b = 1, 2, \ldots n, \tag{7}$$

- Аналог редукционных формул для такой теории:

$$\begin{aligned}\langle\Psi_0|a^-_{out}(\vec{p}_1)\,\ldots\,a^-_{out}(\vec{p}_k)\,a^+_{in}(\vec{p}_{k+1})\,\ldots\,a^+_{in}(\vec{p}_n)|\Psi_0\rangle &= \left[\frac{1}{i(2\pi)^{(d+l)/2}}\right]^n \times \\ \times\,\exp\left[\frac{i}{2}\,\theta_{\mu\nu}\sum_{a<b}p^{\mu}_{a,\,nc}p^{\nu}_{b,\,nc}\right]\Bigg|_{-p_{out}}\prod_{j=1}^{n}\frac{p_j^2-m^2}{\sqrt{2\omega(\vec{p}_j)}}\,G_n(-p_1,\,\ldots,\,-p_k,\,p_n,\,\ldots,\,p_{k+1}),\end{aligned} \tag{8}$$

Следствия: некоммутативная $SO(1, d)$-теория

- Аналог редукционных формул для такой теории:

$$\langle\Psi_0|a^-_{out}(\vec{p}_1)\,\ldots\,a^-_{out}(\vec{p}_k)\,a^+_{in}(\vec{p}_{k+1})\,\ldots\,a^+_{in}(\vec{p}_n)|\Psi_0\rangle = \left[\frac{1}{i(2\pi)^{(d+l)/2}}\right]^n \times$$
$$\times\;\exp\left[\frac{i}{2}\,\theta_{\mu\nu}\sum_{a<b}p^{\mu}_{a,\,nc}p^{\nu}_{b,\,nc}\right]\Bigg|_{-p_{out}}\prod_{j=1}^{n}\frac{p_j^2-m^2}{\sqrt{2\omega(\vec{p}_j)}}\,G_n(-p_1,\,\ldots,\,-p_k,\,p_n,\,\ldots,\,p_{k+1}), \tag{8}$$

- $G_n(p_1,\,\ldots,\,p_n)$ — фурье-образ функции Грина:

$$G_n(p_1,\,\ldots,\,p_n) = \int dx_1\ldots dx_n\,\exp\left[-i\sum_{j=1}^{n}p_jx_j\right]G(x_1,\,\ldots,\,x_n).$$

Следствия: некоммутативная $SO(1, d)$-теория

- Следствие: амплитуды процессов рассеяния “$m \to n$” совпадают в двух теориях, если

$$m + n \leqslant d + 1.$$

Time/space-некоммутативность

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta' \\ 0 & 0 & -\theta' & 0 \end{pmatrix}$$

Time/space-некоммутативность

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta' \\ 0 & 0 & -\theta' & 0 \end{pmatrix}$$

- $SO(1,\,1) \times SO(2)$ - симметрия.

Time/space-некоммутативность

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta' \\ 0 & 0 & -\theta' & 0 \end{pmatrix}$$

- $SO(1,\,1) \times SO(2)$ - симметрия.
- Постулат спектральности:

$$P_i^0 \geq |P_i^1|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Time/space-некоммутативность

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta' \\ 0 & 0 & -\theta' & 0 \end{pmatrix}$$

- $SO(1,\,1) \times SO(2)$ - симметрия.
- Постулат спектральности:
$$P_i^0 \geq |P_i^1|, \quad i = 1, \ldots, n.$$
- Аналитические свойства функций Уайтмана нарушаются, выделить точки Иоста нельзя.

Time/space-некоммутативность

$$\theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta' \\ 0 & 0 & -\theta' & 0 \end{pmatrix}$$

- $SO(1,\,1) \times SO(2)$ - симметрия.
- Постулат спектральности:
$$P_i^0 \geq |P_i^1|, \quad i = 1, \ldots, n.$$
- Аналитические свойства функций Уайтмана нарушаются, выделить точки Иоста нельзя.
- Возникает проблема с формулировкой принципа локальной коммутативности.

Time/space-некоммутативность

Принцип локальной коммутативности - отражение принципа релятивистской микропричинности:

Локальность

Пусть функции f_1 и f_2 таковы, что их носители O_1 и O_2 компактны и разделены пространственноподобным интервалом:

$$(x-y)^2 < 0 \quad \forall x \in O_1, y \in O_2.$$

Тогда

$$[\varphi(f_1), \varphi(f_2)] = 0.$$

Time/space-некоммутативность

- Операция $\star$ - произведения:

$$f(x) \star f(y) = exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)f(x)f(y).$$

Time/space-некоммутативность

- Операция $\star$ - произведения:

$$f(x) \star f(y) = exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right) f(x) f(y).$$

- В качестве пространства основных функций выбирается **пространство Гельфанда-Шилова** S^{β} с $\beta < 1/2$.

$$\left| x^k f^{(q)}(x) \right| \leqslant C_k B^q q^{q\beta} \qquad (k, q = 0, 1, 2, \ldots).$$

Time/space-некоммутативность

- Операция $\star$ - произведения:

$$f(x) \star f(y) = exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)f(x)f(y).$$

- В качестве пространства основных функций выбирается **пространство Гельфанда-Шилова** S^{β} с $\beta < 1/2$.

$$\left|x^k f^{(q)}(x)\right| \leqslant C_k B^q q^{q\beta} \qquad (k, q = 0, 1, 2, \ldots).$$

- S^{β} при $\beta \leqslant 1$ финитных функций уже не содержит.

Ряд экспоненты для $\star$ -произведения будем записывать так:

$$exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)f(x)f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)^{n}f(x)f(y)\equiv$$

$$\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{D_n}{n!}f(x)f(y),$$

где $D_n\equiv\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial y^{\nu}}\right)^{n}$.

Time/space-некоммутативность

- Рассмотрим функционалы W_k, действующие на функции $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \in S^{\beta}$:

$$(\mathrm{W}_k, f) = \int \mathrm{W}(x_1, \ldots, x_n) \sum_{n=0}^{k} \frac{D_n}{n!} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Time/space-некоммутативность

- Рассмотрим функционалы W_k, действующие на функции $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \in S^\beta$:

$$(\mathrm{W}_k, f) = \int \mathrm{W}(x_1, \ldots, x_n) \sum_{n=0}^{k} \frac{D_n}{n!} f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

- Это выражение получается, если оборвать ряд экспоненты на k-ом слагаемом.

Time/space-некоммутативность

- Рассмотрим функционалы W_k, действующие на функции $f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \in S^\beta$:

$$(\mathrm{W}_k, f) = \int \mathrm{W}(x_1,\ldots,x_n) \sum_{n=0}^{k} \frac{D_n}{n!} f(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

- Это выражение получается, если оборвать ряд экспоненты на k-ом слагаемом.
- Полученные таким образом функции Уайтмана W_k становятся обобщенными функциями умеренного роста.

Time/space-некоммутативность

- Рассмотрим функционалы W_k, действующие на функции $f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \in S^\beta$:

$$(\mathrm{W}_k,f) = \int \mathrm{W}(x_1,\ldots,x_n)\sum_{n=0}^{k}\frac{D_n}{n!}f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

- Это выражение получается, если оборвать ряд экспоненты на k-ом слагаемом.
- Полученные таким образом функции Уайтмана W_k становятся обобщенными функциями умеренного роста.
- Функционалы W_k описывают локальную теорию.

Time/space-некоммутативность

- Рассмотрим функционалы W_k, действующие на функции $f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \in S^\beta$:

$$(\mathrm{W}_k, f) = \int \mathrm{W}(x_1,\ldots,x_n)\sum_{n=0}^{k}\frac{D_n}{n!}f(x_1,\ldots,x_n)dx_1\ldots dx_n.$$

- Это выражение получается, если оборвать ряд экспоненты на k-ом слагаемом.
- Полученные таким образом функции Уайтмана W_k становятся обобщенными функциями умеренного роста.
- Функционалы W_k описывают локальную теорию.
- На основании $SO(1,\,1)$-симметрии выводится утверждение о совпадении **двухточечных** функций Уайтмана.

- Рассмотрим функционалы W_k, действующие на функции $f(x_1,\ldots,x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n) \in S^\beta$:

$$(\mathrm{W}_k, f) = \int \mathrm{W}(x_1,\ldots,x_n) \sum_{n=0}^{k} \frac{D_n}{n!} f(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

- Это выражение получается, если оборвать ряд экспоненты на k-ом слагаемом.
- Полученные таким образом функции Уайтмана W_k становятся обобщенными функциями умеренного роста.
- Функционалы W_k описывают локальную теорию.
- На основании $SO(1,\ 1)$-симметрии выводится утверждение о совпадении **двухточечных** функций Уайтмана.
- Из условия ЛК и равенства двухточечных функций получается утверждение о свободном поле.

Time/space-некоммутативность

Далее осуществляется предельный переход $k \to \infty$:

Time/space-некоммутативность

Далее осуществляется предельный переход $k \to \infty$:

- Числовая последовательность (W_k, f), сходится при любой $f(x) \in S^\beta, \beta < 1/2$.

Time/space-некоммутативность

Далее осуществляется предельный переход $k \to \infty$:

- Числовая последовательность (W_k, f), сходится при любой $f(x) \in S^\beta, \beta < 1/2$.
- Последовательность функционалов W_k слабо сходится к некоторому пределу, и этот предел также принадлежит пространству обобщенных функций над S^β.

Time/space-некоммутативность

Далее осуществляется предельный переход $k \to \infty$:

- Числовая последовательность (W_k, f), сходится при любой $f(x) \in S^\beta, \beta < 1/2$.
- Последовательность функционалов W_k слабо сходится к некоторому пределу, и этот предел также принадлежит пространству обобщенных функций над S^β.
- Предельный переход определен корректно.

Time/space-некоммутативность

Далее осуществляется предельный переход $k \to \infty$:

- Числовая последовательность (W_k, f), сходится при любой $f(x) \in S^\beta, \beta < 1/2$.
- Последовательность функционалов W_k слабо сходится к некоторому пределу, и этот предел также принадлежит пространству обобщенных функций над S^β.
- Предельный переход определен корректно.
- Физическая интерпретация: максимальная скорость распространения взаимодействия в теории зависит от параметра k и стремится к бесконечности, когда $k \to \infty$. В этом пределе мы и получаем некоммутативную теорию.

Вывод

Утверждение теоремы Хаага справедливо как в коммутативной, так и некоммутативной теории при выборе надлежащих классов пространств пробных функций.

Публикации

1. K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Haag's theorem in noncommutative quantum field theory // Physics of Atomic Nuclei. 2013. Vol. 76. P. 965-968.
2. Антипин К. В., Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н. Доказательство обобщенной теоремы Хаага в пространстве произвольной размерности // Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2011. № 4. С. 27-32.
3. K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Haag's Theorem in SO (1, k) invariant quantum field theory // Proceedings of the The XIXth International Workshop "High Energy Physics and Quantum Field Theory QFTHEP-2010 (Golitsyno, Moscow, September 2010). PoS - Proceedings of Science, SISSA, Trieste, Italy, 2010, p.080.
4. K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Extension of Generalized Haag's Theorem on Spaces with Arbitrary Dimensions // Proceedings of the 16-th International Seminar on High Energy Physics "QUARKS-2010"(6-12 июня, 2010, Коломна, Россия)/ Под ред. В.А. Матвеева, А.Г. Панина, В.А. Рубакова, Издат. Отдел ИЯИ, Москва, Россия, 2010, с.391-401.
5. K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Consequences of the Generalized Haag's Theorem // Proceedings of the 16-th International Seminar on High Energy Physics "QUARKS-2010" (6-12 июня, 2010, Коломна, Россия) Под ред. В.А. Матвеева, А.Г. Панина, В.А. Рубакова, Издат. Отдел ИЯИ, Москва, Россия, 2010, с.133-136.

Теории с нефизическими частицами

Нефизические частицы необходимо вводить в калибровочных теориях, чтобы использовать ковариантную калибровку.

Теории с нефизическими частицами

Нефизические частицы необходимо вводить в калибровочных теориях, чтобы использовать ковариантную калибровку.

Пример

Квантование электромагнитного поля.

Нефизические частицы необходимо вводить в калибровочных теориях, чтобы использовать ковариантную калибровку.

Пример

Квантование электромагнитного поля.

- Рассматриваются операторы $a_n^{\pm}$ как операторы рождения и уничтожения четырех независимых сортов фотонов: двух поперечных, “продольных” и “временных”.

Теории с нефизическими частицами

Нефизические частицы необходимо вводить в калибровочных теориях, чтобы использовать ковариантную калибровку.

Пример

Квантование электромагнитного поля.

- Рассматриваются операторы $a_n^{\pm}$ как операторы рождения и уничтожения четырех независимых сортов фотонов: двух поперечных, “продольных” и “временных”.
- Квантование оказывается несовместимым с предположением о вещественности поля или положительности метрики.

Теории с нефизическими частицами

Нефизические частицы необходимо вводить в калибровочных теориях, чтобы использовать ковариантную калибровку.

Пример

Квантование электромагнитного поля.

- Рассматриваются операторы $a_n^{\pm}$ как операторы рождения и уничтожения четырех независимых сортов фотонов: двух поперечных, “продольных” и “временных”.
- Квантование оказывается несовместимым с предположением о вещественности поля или положительности метрики.
- Формальный прием (Блейлер, Гупта): для сохранения самосопряженности оператора a_n вводится индефинитная метрика в пространстве амплитуд состояния.

Представление Вейля

Представление Вейля

- Канонические перестановочные соотношения:

$$[\varphi(t,x), \varphi(t,y)] = [\pi(t,x), \pi(t,y)] = 0,$$
$$[\varphi(t,x), \pi(t,y)] = i\delta(x-y)I.$$

- Канонические перестановочные соотношения:

$$[\varphi(t,x),\varphi(t,y)] = [\pi(t,x),\pi(t,y)] = 0,$$
$$[\varphi(t,x),\pi(t,y)] = i\delta(x-y)I.$$

- Переход к дискретному базису:

$$Q_n(t) = \int \varphi(t,x)h_n(x)\,d^3x,$$
$$P_n(t) = \int \pi(t,x)h_n(x)\,d^3x,$$

где $h_n(x) = N_n e^{-x^2/2} H_{n_1,n_2,n_3}(x)$, n — составной дискретный индекс $n = (n_1, n_2, n_3)$.

Представление Вейля

- Перестановочные соотношения в терминах Q_n и P_n:

$$[Q_k(t), Q_l(t)] = [P_k(t), P_l(t)] = 0$$
$$[Q_k(t), P_l(t)] = i\delta_{kl} I.$$

Представление Вейля

- Перестановочные соотношения в терминах Q_n и P_n:

$$[Q_k(t), Q_l(t)] = [P_k(t), P_l(t)] = 0$$
$$[Q_k(t), P_l(t)] = i\delta_{kl} I.$$

- Для операторов

$$U_k(\alpha) = \exp\{i\alpha P_k\}, \; V_l(\beta) = \exp\{i\beta Q_l\}$$

будет выполнено соотношение Вейля:

$$U_k(\alpha) V_l(\beta) = V_l(\beta) U_k(\alpha) e^{i\alpha\beta\delta_{kl}}.$$

Представление Вейля

- Перестановочные соотношения в терминах Q_n и P_n:

$$[Q_k(t), Q_l(t)] = [P_k(t), P_l(t)] = 0$$
$$[Q_k(t), P_l(t)] = i\delta_{kl} I.$$

- Для операторов

$$U_k(\alpha) = \exp\{i\alpha P_k\}, \; V_l(\beta) = \exp\{i\beta Q_l\}$$

будет выполнено соотношение Вейля:

$$U_k(\alpha) V_l(\beta) = V_l(\beta) U_k(\alpha) e^{i\alpha\beta\delta_{kl}}.$$

- Операторы $U_k(\alpha)$ и $V_l(\beta)$ образуют представление Вейля в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Пространство Крейна

Пространство Крейна

- Линейное пространство $\mathcal{K}$, представимое в виде прямой суммы ортогональных подпространств $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^-$:
$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-,$$

Пространство Крейна

- Линейное пространство $\mathcal{K}$, представимое в виде прямой суммы ортогональных подпространств $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^-$:
$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-,$$
$\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^-$ — полные подпространства с положительно и отрицательно определенными метриками соответственно.

Пространство Крейна

- Линейное пространство $\mathcal{K}$, представимое в виде прямой суммы ортогональных подпространств $\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^-$:
$$\mathcal{K} = \mathcal{K}^+ \oplus \mathcal{K}^-,$$
$\mathcal{K}^+$ и $\mathcal{K}^-$ — полные подпространства с положительно и отрицательно определенными метриками соответственно.
- Класс пространств Крейна включает гильбертовы пространства ($\mathcal{K}^- = 0$).

Пространство Крейна

- Каждый вектор x пространства Крейна $\mathcal{K}$ допускает разложение:

$$x = x_+ + x_-, \quad x_\pm \in \mathcal{K}^\pm,$$

Пространство Крейна

- Каждый вектор x пространства Крейна $\mathcal{K}$ допускает разложение:

$$x = x_+ + x_-, \quad x_\pm \in \mathcal{K}^\pm,$$

- Оператор фундаментальной симметрии J:

$$Jx = J(x_+ + x_-) \equiv x_+ - x_-.$$

Пространство Крейна

- Каждый вектор x пространства Крейна $\mathcal{K}$ допускает разложение:

$$x = x_+ + x_-, \quad x_\pm \in \mathcal{K}^\pm,$$

- Оператор фундаментальной симметрии J:

$$Jx = J(x_+ + x_-) \equiv x_+ - x_-.$$

- С помощью J в пространстве Крейна вводится положительно определенное скалярное произведение:

$$(x,y)_J \equiv (x,Jy) = (x_+,y_+) - (x_-,y_-)$$

Пространство Крейна

- Каждый вектор x пространства Крейна $\mathcal{K}$ допускает разложение:

$$x = x_+ + x_-, \quad x_\pm \in \mathcal{K}^\pm,$$

- Оператор фундаментальной симметрии J:

$$Jx = J(x_+ + x_-) \equiv x_+ - x_-.$$

- С помощью J в пространстве Крейна вводится положительно определенное скалярное произведение:

$$(x, y)_J \equiv (x, Jy) = (x_+, y_+) - (x_-, y_-)$$

- Соотношение между A^* и A^+:

$$A^+ = JA^*J.$$

Регулярные представления в пространстве Крейна

В работе “Irreducible Representations of the Heisenberg Algebra in Krein Spaces” / M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi, Yu. S. Vernov // J. Math. Phys. 1998. Vol. 39. p. 2969 было показано, что в пространстве Крейна может реализовываться **антифоковское представление**:

Регулярные представления в пространстве Крейна

В работе “Irreducible Representations of the Heisenberg Algebra in Krein Spaces” / M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi, Yu. S. Vernov // J. Math. Phys. 1998. Vol. 39. p. 2969 было показано, что в пространстве Крейна может реализовываться **антифоковское представление**:

- Характеризуется соотношением:

$$a_k^+ \Psi_{-1} = 0 \quad \forall k.$$

Регулярные представления в пространстве Крейна

В работе “Irreducible Representations of the Heisenberg Algebra in Krein Spaces” / M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi, Yu. S. Vernov // J. Math. Phys. 1998. Vol. 39. p. 2969 было показано, что в пространстве Крейна может реализовываться **антифоковское представление**:

- Характеризуется соотношением:

$$a_k^+ \Psi_{-1} = 0 \quad \forall k.$$

- Набор нормированных собственных векторов $\{\Psi_{-n}^{(k)}\}$ оператора $N_k = a_k^+ a_k$:

$$\Psi_{-n}^{(k)} = \frac{a_k^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}} \Psi_{-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(\Psi_{-n}^{(k)}, \Psi_{-n}^{(k)}) = (-1)^{n-1} \; .$$

Построение представления Вейля для антифоковского случая

Пусть a_k и a_k^+ — операторы антифоковского представления в пространстве Крейна.

Построение представления Вейля для антифоковского случая

Пусть a_k и a_k^+ — операторы антифоковского представления в пространстве Крейна.

- Замена: $b_k = a_k^+$ и $b_k^+ = a_k$. В терминах новых операторов:

$$[b_k, b_l^+] = -\delta_{kl} I, \quad \tilde{N}_k = -N_k - 1,$$

$$\mathrm{Sp}\tilde{N}_k = \mathbb{N}, \quad \Psi_{-n}^{(k)} = \tilde{\psi}_{n-1}^{(k)},$$

Построение представления Вейля для антифоковского случая

Пусть a_k и a_k^+ — операторы антифоковского представления в пространстве Крейна.

- Замена: $b_k = a_k^+$ и $b_k^+ = a_k$. В терминах новых операторов:

$$[b_k, b_l^+] = -\delta_{kl} I, \quad \tilde{N}_k = -N_k - 1,$$
$$\mathrm{Sp}\tilde{N}_k = \mathbb{N}, \quad \Psi_{-n}^{(k)} = \tilde{\psi}_{n-1}^{(k)},$$

- Также имеет место соотношение:

$$b_k^* = J b_k^+ J = -b_k^+ .$$

Построение представления Вейля для антифоковского случая

Пусть a_k и a_k^+ — операторы антифоковского представления в пространстве Крейна.

- Замена: $b_k = a_k^+$ и $b_k^+ = a_k$. В терминах новых операторов:

$$[b_k, b_l^+] = -\delta_{kl} I, \quad \tilde{N}_k = -N_k - 1,$$
$$\mathrm{Sp}\tilde{N}_k = \mathbb{N}, \quad \Psi_{-n}^{(k)} = \tilde{\psi}_{n-1}^{(k)},$$

- Также имеет место соотношение:

$$b_k^* = J b_k^+ J = -b_k^+ .$$

- Операторы b_k и b_k^* удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$[b_k, b_l] = [b_k^*, b_l^*] = 0,$$
$$[b_k, b_l^*] = \delta_{kl} I.$$

Построение представления Вейля для антифоковского случая

В итоге мы получили теорию в некотором эффективном гильбертовом пространстве.

Построение представления Вейля для антифоковского случая

В итоге мы получили теорию в некотором эффективном гильбертовом пространстве.

- Операторы “координаты” и “импульса”:

$$\tilde{P}_k = \frac{(b_k - b_k^*)}{\sqrt{2}i}, \quad \tilde{Q}_k = \frac{(b_k + b_k^*)}{\sqrt{2}}.$$

Построение представления Вейля для антифоковского случая

В итоге мы получили теорию в некотором эффективном гильбертовом пространстве.

- Операторы “координаты” и “импульса”:

$$\tilde{P}_k = \frac{(b_k - b_k^*)}{\sqrt{2}i}, \quad \tilde{Q}_k = \frac{(b_k + b_k^*)}{\sqrt{2}}.$$

- Для операторов $U_k(\alpha) = \exp\{i\alpha\tilde{P}_k\}, \quad V_l(\beta) = \exp\{i\beta\tilde{Q}_l\}$ можно стандартным образом доказать соотношение Вейля:

$$U_k(\alpha)V_l(\beta) = V_l(\beta)U_k(\alpha)e^{i\alpha\beta\delta_{kl}}.$$

Построение представления Вейля для антифоковского случая

В итоге мы получили теорию в некотором эффективном гильбертовом пространстве.

- Операторы “координаты” и “импульса”:

$$\tilde{P}_k = \frac{(b_k - b_k^*)}{\sqrt{2}i}, \quad \tilde{Q}_k = \frac{(b_k + b_k^*)}{\sqrt{2}}.$$

- Для операторов $U_k(\alpha) = \exp\{i\alpha\tilde{P}_k\}, \quad V_l(\beta) = \exp\{i\beta\tilde{Q}_l\}$ можно стандартным образом доказать соотношение Вейля:

$$U_k(\alpha)V_l(\beta) = V_l(\beta)U_k(\alpha)e^{i\alpha\beta\delta_{kl}}.$$

- Получаем аналог представления канонических коммутационных соотношений в форме Вейля для антифоковского случая.

Построение представления Вейля для антифоковского случая

Используя результаты*, полученные для представления Вейля в рамках алгебраического подхода, мы можем распространить теорему Хаага на случай антифоковского представления перестановочных соотношений в пространстве Крейна.

** Ж. Эмх, Алгебраические методы в статистической механике и квантовой теории поля, М.: Мир, 1976.*

Публикации

1. K. V. Antipin, M. N. Mnatsakanova, Yu. S. Vernov. Haag's theorem in the theories with non-physical particles // International Journal of Modern Physics A. 2013. Vol. 28. P. 1350076-1350086.
2. Антипин К. В., Вернов Ю. С., Мнацаканова М. Н. Теорема Хаага в теориях с нефизическими частицами // Материалы докладов XX Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» (Москва, 2013 г.). 2013. С. 336.

Результаты

1. Теорема Хаага обобщена на некоммутативную квантовую теорию поля.
   - Установлено число совпадающих функций Уайтмана в двух теориях с $SO(1,k)$-симметрией.
   - Space/space-некоммутативность.
   - Time/space-некоммутативность.
2. Для некоммутативной теории в многомерном пространстве установлено равенство амплитуд некоторых упругих и неупругих процессов.
3. Обобщение на теории с индефинитной метрикой.