Высшие спины в 3D

Ю. М. Зиновьев

19.02.2013

План

Конструктивный подход

- Лагранжиан и калибровочные преобразования предполагаются в виде ряда по степеням полей:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &\sim \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots \\
\delta &\sim \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \dots
\end{aligned}
$$

- При этом условие калибровочной инвариантности тоже разлагается в ряд:

$$
\begin{aligned}
\delta_0 \mathcal{L}_0 &= 0 \\
\delta_0 \mathcal{L}_1 + \delta_1 \mathcal{L}_0 &= 0 \\
\delta_0 \mathcal{L}_2 + \delta_1 \mathcal{L}_1 + \delta_2 \mathcal{L}_0 &= 0
\end{aligned}
$$

- Линейное приближение — кубические вершины и линейные калибровочные преобразования.

Реперный формализм

- Минимальное число производных в кубической вершине с $s_1 \geq s_2 \geq s_3$:
$$n_{min} = s_1 + s_2 - s_3$$
- Высшие производные $\Leftrightarrow$ проблемы с числом степеней свободы:
  - в уравнениях $\Rightarrow$ рост числа степеней свободы (духи!)
  - в калибровочных преобразованиях $\Rightarrow$ рост числа связей
- Реперный формализм в гравитации:
$$\delta_0 h_\mu{}^a = D_\mu \xi^a + \eta_\mu{}^a, \qquad \delta_0 \omega_\mu{}^{ab} = D_\mu \eta^{ab}$$
- Произвольный спин:
$$\Phi_\mu{}^{a_1 \dots a_{s-1}}, \qquad \Omega_\mu{}^{a_1 \dots a_{s-1}, b_1 \dots b_k}, \qquad 1 \leq k \leq s-1$$
$$\delta_0 \Omega_\mu{}^{a_1 \dots a_{s-1}, b_1 \dots b_k} = D_\mu \eta^{a_1 \dots a_{s-1}, b_1 \dots b_k} + \dots$$

Безмассовый спин 2 в AdS_3

- В $d = 3$ можно ввести дуальный тензор $\omega_\mu{}^a = \varepsilon^{abc}\omega_\mu{}^{bc}$. Тогда свободный лагранжиан в AdS_3 $(\Lambda = -\lambda^2)$ имеет вид:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} \omega_\mu{}^a \omega_\nu{}^b - \varepsilon^{\mu\nu\alpha}\omega_\mu{}^a D_\nu h_\alpha{}^a + \frac{\lambda^2}{2}\left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} h_\mu{}^a h_\nu{}^b$$

$$\delta_0 h_\mu{}^a = D_\mu \xi^a + \varepsilon_\mu{}^{ab}\eta^b, \qquad \delta_0 \omega_\mu{}^a = D_\mu \eta^a + \lambda^2 \varepsilon_\mu{}^{ab}\xi^b$$

- При $\lambda \neq 0$ можно разделить переменные:

$$\Omega_{\pm\mu}{}^a = \omega_\mu{}^a \pm \lambda h_\mu{}^a \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-$$

- Каждая половинка включает одно поле и имеет свое калибровочное преобразование:

$$\mathcal{L}_\pm = -\frac{1}{4\lambda}\varepsilon^{\mu\nu\alpha}\Omega_{\pm\mu}{}^a D_\nu \Omega_{\pm\alpha}{}^a \mp \frac{1}{4}\left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} \Omega_{\pm\mu}{}^a \Omega_{\pm\nu}{}^b$$

3D гравитация

- Предполагая, что разделение переменных возможно и после включения взаимодействия, нетрудно построить линейное приближение:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{\alpha_0}{12\lambda}\left\{ {\mu\nu\alpha \atop abc} \right\} \Omega_\mu{}^a \Omega_\nu{}^b \Omega_\alpha{}^c, \qquad \delta_1 \Omega_\mu{}^a = \alpha_0 \varepsilon^{abc} \Omega_\mu{}^b \eta^c$$

- Но в $d = 3$ реперном формализме для полей со спинами $s \geq 2$ есть только кубические верщины!
- Данная теория оказывается замкнутой без введения других полей и соответствует теории Черна-Саймонса с алгеброй

$$O(2,1) \approx SL(2) \approx Sp(2)^*$$

- Сохранение четности требует двух половинок:

$$O(2,2) \approx O(2,1) \oplus O(1,2) \approx SL(2) \oplus SL(2) \approx Sp(2)^* \oplus Sp(2)^*$$

Безмассовый спин 3 (и выше)

- В $d = 3$ для произвольного спина достаточно двух полей:

$$\Phi_\mu{}^{a_1 \dots a_{s-1}}, \qquad \Omega_\mu{}^{a_1 \dots a_{s-1}}$$

- Свободный лагранжиан для спина 3 в AdS_3:

$$\mathcal{L}_0 = -\left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} \Omega_\mu{}^{ac} \Omega_\nu{}^{bc} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \Omega_\mu{}^{ab} D_\nu \Phi_\alpha{}^{ab} - \lambda^2 \left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} \Phi_\mu{}^{ac} \Phi_\nu{}^{bc}$$

- Соответственно можно разделить переменные

$$\Omega_{\pm\mu}{}^{ab} = \Omega_\mu{}^{ab} \pm \lambda \Phi_\mu{}^{ab} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_+ + \mathcal{L}_-$$

и работать с одной половинкой (и одним калибровочным преобразованием):

$$\mathcal{L}_\pm = \frac{1}{4\lambda} [\varepsilon^{\mu\nu\alpha} \Omega_{\pm\mu}{}^{ab} D_\nu \Omega_{\pm\alpha}{}^{ab} \mp 2\lambda \left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} \Omega_{\pm\mu}{}^{ac} \Omega_{\pm\nu}{}^{bc}]$$

Безмассовый спин 3 $\oplus$ гравитация

- Линейное приближение для гравитационного взаимодействия спина 3:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\alpha_1}{2\lambda} \left\{ {}^{\mu\nu\alpha}_{abc} \right\} \Omega_\mu{}^{ad} \Omega_\nu{}^{bd} \omega_\alpha{}^c$$

$$\begin{aligned} \delta_1 \Omega_\mu{}^{ab} &= \alpha_1 \varepsilon^{cd(a} [\Omega_\mu{}^{b)c} \eta^d - \eta^{b)c} \omega_\mu{}^d] \\ \delta_1 \omega_\mu{}^a &= -2\alpha_1 \varepsilon^{abc} \Omega_\mu{}^{bd} \eta^{cd} \end{aligned}$$

- Вместе с самодействием гравитона имеем:

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{\alpha_0}{12\lambda} \left\{ {}^{\mu\nu\alpha}_{abc} \right\} \omega_\mu{}^a \omega_\nu{}^b \omega_\alpha{}^c + \frac{\alpha_1}{2\lambda} \left\{ {}^{\mu\nu\alpha}_{abc} \right\} \Omega_\mu{}^{ad} \Omega_\nu{}^{bd} \omega_\alpha{}^c$$

- Все квадратичные вариации сокращаются при $\alpha_1 = \alpha_0$. Полученная теория соответствует теории Черна-Саймонса с алгеброй $SL(3)$.

Взаимодействия безмассовых высших спинов

- Два класса теорий для взаимодействия высших спинов в $d = 3$:
  - В первом входят все спины от $s = 2$ до $s = N$, а соответствующая алгебра $SL(N)$
  - Вр втором — только четные спины $s = 2, 4, \ldots 2n$, с алгеброй $Sp(2n)^*$

- "Ложка дегтя на десерт":
  В теориях Черна-Саймонса уравнения соответствуют равенству нулю всех калибровочно инвариантных напряженностей $\Longrightarrow$ все поля являются чистыми калибровками и не имеют физических степеней свободы.

Взаимодействия безмассовых высших спинов

- Два класса теорий для взаимодействия высших спинов в $d = 3$:
  - В первом входят все спины от $s = 2$ до $s = N$, а соответствующая алгебра $SL(N)$
  - Вр втором — только четные спины $s = 2, 4, \dots 2n$, с алгеброй $Sp(2n)^*$

- "Ложка дегтя на десерт":
  В теориях Черна-Саймонса уравнения соответствуют равенству нулю всех калибровочно инвариантных напряженностей $\Longrightarrow$ все поля являются чистыми калибровками и не имеют физических степеней свободы.

Массивный спин 2

- Калибровочно инвариантный реперный формализм: $(\Omega_\mu{}^a, f_\mu{}^a)$, (B^a, A_μ), (π^a, φ) $(M^2 = 2m^2 - \Lambda)$:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} \Omega_\mu{}^a \Omega_\nu{}^b - \varepsilon^{\mu\nu\alpha} \Omega_\mu{}^a D_\nu f_\alpha{}^a + \frac{M^2}{2} \left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} f_\mu{}^a f_\nu{}^b + \dots$$

- Калибровочные преобразования:

$$\begin{aligned} \delta_0 \Omega_\mu{}^a &= D_\mu \eta^a + M^2 \varepsilon_\mu{}^{ab} \xi^b, \quad \delta_0 f_\mu{}^a = D_\mu \xi^a + \varepsilon_\mu{}^{ab} \eta^b + m e_\mu{}^a \xi \\ \delta_0 B^a &= -2m\eta^a, \qquad \delta_0 A_\mu = D_\mu \xi + m \xi_\mu \\ \delta_0 \pi^a &= 2Mm\xi^a, \qquad \delta_0 \varphi = -2M\xi \end{aligned}$$

- Частично безмассовый случай $M^2 = 2m^2 - \Lambda = 0 \Longrightarrow$ скалярное поле отцепляется $\Longrightarrow$ одна степень свободы.

Самодействие массивного спина 2

- Линейное приближение (в унитарной калибровке):

$$\mathcal{L}_1 = \kappa_3 \left\{ {}^{\mu\nu\alpha}_{abc} \right\} [\Omega_\mu{}^a \Omega_\nu{}^b f_\alpha{}^c + \frac{M^2 + m^2}{3} f_\mu{}^a f_\nu{}^b f_\alpha{}^c]$$

- Калибровочные преобразования:

$$\begin{aligned} \delta_1 \Omega_\mu{}^a &= \varepsilon^{abc}[\Omega_\mu{}^b \eta^c + (M^2 + m^2) f_\mu{}^b \xi^b] + m\Omega_\mu{}^a \xi \\ \delta_1 f_\mu{}^a &= \varepsilon^{abc}[f_\mu{}^b \eta^c + \Omega_\mu{}^b \xi^c] - m f_\mu{}^a \xi \end{aligned}$$

- Коэффициент перед f^3 — фиксирован.
- Частично безмассовый предел — отсутствует.

Гравитационное взаимодействие массивного спина 2

- Линейное приближение (в унитарной калибровке):

$$\mathcal{L}_1 = \kappa_2 \left\{ {}^{\mu\nu\alpha}_{abc} \right\} [\Omega_\mu{}^a \Omega_\nu{}^b h_\alpha{}^c + 2\Omega_\mu{}^a \omega_\nu{}^b f_\alpha{}^c + M^2 f_\mu{}^a f_\nu{}^b h_\alpha{}^c]$$

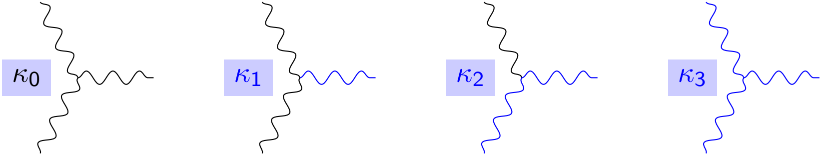
- Калибровочные преобразования со скалярным параметром:

$$\begin{aligned} \delta_1 \omega_\mu{}^a &= -2m\Omega_\mu{}^a \xi, \qquad \delta_1 h_\mu{}^a = 2mf_\mu{}^a \xi \\ \delta_1 \Omega_\mu{}^a &= 0, \qquad \delta_1 f_\mu{}^a = 2mh_\mu{}^a \xi \end{aligned}$$

- Частично безмассовый предел — существует.

Бигравитация

- Четыре независимых кубических вершины для двух безмассовых полей со спином 2:



- Замыкание алгебры требует ($\sigma = \pm 1$):

$$\kappa_1{}^2 + \kappa_2{}^2 - \sigma\kappa_0\kappa_2 - \kappa_1\kappa_3 = 0$$

- Одно из полей массивное $\Longrightarrow$ $\kappa_1 = 0 \Longrightarrow \kappa_2 = \sigma\kappa_0$.
- Если предположить несингулярный безмассовый предел (т.е. отсутствие старших производных), то есть решение соответствующее т.н. ''Новой массивной гравитации''

$$4\sigma\kappa_0{}^2 + \kappa_3{}^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma = -1$$

Массивный спин 3

- Набор полей для калибровочно инвариантного описания:

$$(\Omega_\mu{}^{ab}, \Phi_\mu{}^{ab}), \quad (\Omega_\mu{}^a, f_\mu{}^a), \quad (B^a, A_\mu), \quad (\pi^a, \varphi)$$

и соответственно 5 калибровочных преобразований:

$$(\eta^{ab}, \xi^{ab}), \quad (\eta^a, \xi^a), \quad \xi$$

- Есть два частично безмассовых предела:
  - при $m^2 = \frac{\Lambda}{2}$ остаются:

$$(\Omega_\mu{}^{ab}, \Phi_\mu{}^{ab}), \quad (\Omega_\mu{}^a, f_\mu{}^a), \quad (B^a, A_\mu)$$

$\Longrightarrow$ одна степень свободы
  - при $m^2 = \frac{2\Lambda}{3}$ остаются:

$$(\Omega_\mu{}^{ab}, \Phi_\mu{}^{ab}), \quad (\Omega_\mu{}^a, f_\mu{}^a)$$

$\Longrightarrow$ 0 степеней свободы.

Гравитационное взаимодействие массивного спина 3

- Кубической вершины, сохраняющей четность, нет.
- Есть минимальное гравитационное взаимодействие без необходимости вводить поправки с высшими производными в лагранжиан и/или калибровочные преобразования.
- Как следствие существуют несингулярные плоский и все (частично) безмассовые пределы.
- Гравитон нетривиально преобразуется относительно калибровочных преобразований спина 3.

$$(\eta^{ab}, \xi^{ab}), \quad (\eta^a, \xi^a), \quad \xi \quad \oplus \quad (\hat{\eta}^a, \hat{\xi}^a)$$

- Алгебра не замыкается!

Гравитационное взаимодействие произвольного спина

- Есть минимальное гравитационное взаимодействие без необходимости вводить поправки с высшими производными в лагранжиан и/или калибровочные преобразования.
- Как следствие существуют несингулярные плоский и все (частично) безмассовые пределы.
- Примеров замкнутых теорий пока нет.

Заключение

- Основной урок — при переходе от безмассовых полей к массивным спектр полей, а значит и алгебра калибровочных симметрий, радикально меняются.
- Следующая задача — классификация кубических вершин для массивных полей.