

Эффекты динамического нарушения симметрий в плотной кварковой среде с учетом граничных условий и неоднородности конденсатов в четырехфермионных моделях

Хунджуа Тамаз Григорьевич

Семинар отделения теоретической физики ИФВЭ г.Протвино

7 мая 2013 г.

Содержание диссертационной работы

Введение

- Описаны основные свойства плотной кварковой материи
- Обоснована необходимость применения эффективных моделей
- Поставлена задача и обоснована ее актуальность

Глава 1 – Модели с четырехфермионным взаимодействием

Глава 2 – Пионная конденсация в модели ГН

Глава 3 – Неоднородные дикварковый и киральный конденсаты в модели ГН

Заключение

Содержание диссертационной работы

Введение

Глава 1 – Модели с четырехфермионным взаимодействием

- Описана модель Намбу–Йоно-Лазинио
- Описана модель Гросса–Невё и изучен ее фазовый портрет
- Описаны основные виды пространственно неоднородных конденсатов

Глава 2 – Пионная конденсация в модели ГН

Глава 3 – Неоднородные дикварковый и киральный конденсаты в модели ГН

Заключение

Содержание диссертационной работы

Введение

Глава 1 – Модели с четырехфермионным взаимодействием

Глава 2 – Пионная конденсация в модели ГН

- Описан эффект пионной конденсации в рамках модели ГН
- В случае $\mu = 0$ ТДП удалось записать в аналитическом виде
- Исследовано влияние конечного объема взаимодействия на эффект ПК

Глава 3 – Неоднородные дикварковый и киральный конденсаты в модели ГН

Заключение

Содержание диссертационной работы

Введение

Глава 1 – Модели с четырехфермионным взаимодействием

Глава 2 – Пионная конденсация в модели ГН

Глава 3 – Неоднородные дикварковый и киральный конденсаты в модели ГН

- Описан эффект сверхпроводимости в рамках модели ГН
- Исследовано влияние ВКП на сверхпроводящую фазу
- Исследована возможность образования неоднородной сверхпроводящей фазы

Заключение

Содержание диссертационной работы

Введение

Глава 1 – Модели с четырехфермионным взаимодействием

Глава 2 – Пионная конденсация в модели ГН

Глава 3 – Неоднородные дикуарковый и киральный конденсаты в модели ГН

Заключение

- Резюмированы полученные оригинальные результаты
- Подведены итоги исследований

Введение

Адронная материя

В ходе экспериментов по столкновению тяжелых ионов образуются сгустки сверхплотной материи, изучению которой в последнее время уделяется повышенное внимание. При достижении критических значений плотности доминирующую роль начинают играть кварки. Фундаментальной теорией сильных взаимодействий является квантовая хромодинамика (КХД).

Основные свойства КХД

- Калибровочная симметрия
- Перенормируемость
- Асимптотическая свобода
- Размерная трансмутация

При описании коллективных эффектов горячей кварковой материи используется модифицированная КХД с учетом ненулевых температуры и плотности.

Фазовый портрет адронной материи



Эффективные теории

При описании коллективных эффектов дальнего порядка константа связи становится слишком большой для применения пертурбативной техники. Поэтому используются эффективные модели. Самой популярной из них стала модель четырехфермионного взаимодействия.

В $(3+1)$ -мерном пространстве (Nambu–Jona-Lasinio, 1961) четырехфермионная модель неперенормируема, а в $(1+1)$ -мерном (Gross-Neveu, 1974) – перенормируема.

Эффективная модель Гросса–Неве в пространстве размерности $(1+1)$

- Перенормируема
- Асимптотически свободна
- Описывает динамическое нарушение симметрий
- Обладает явлением размерной трансмутации
- Имеет схожий с КХД фазовый портрет

Пионная конденсация в модели Гросса-Невё

Исходный Лагранжиан модели

$$\mathcal{L}_{q,\bar{q}} = \bar{q} \left[\gamma^\nu i \partial_\nu - m_0 + \mu \gamma^0 + \frac{\mu_I}{2} \tau_3 \gamma^0 \right] q + \frac{G}{N_c} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma^5 \vec{\tau}q)^2]$$

Обозначения

- Двух компонентный Дираковский спинор^a $q(x) \equiv q_{i\alpha}(x)$ является дублетом по ароматам ($i = u, d$) и N_c -плетом по цветам ($\alpha = 1, \dots, N_c$)
- τ_k ($k = 1, 2, 3$) - матрицы Паули
- μ - барионный химический потенциал
- μ_I - изотопический химический потенциал

^aГамма матрицы Дирака имеют следующее представление
 $\gamma^0 = \sigma_1; \gamma^1 = i\sigma_2; \gamma^5 = \sigma_3.$

Исходный Лагранжиан модели

$$\mathcal{L}_{q,\bar{q}} = \bar{q} \left[\gamma^\nu i \partial_\nu - m_0 + \mu \gamma^0 + \frac{\mu_I}{2} \tau_3 \gamma^0 \right] q + \frac{G}{N_c} [(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma^5 \vec{\tau} q)^2]$$

Симметрии

- Если $\mu_I = 0$ и $m_0 = 0$, лагранжиан инвариантен относительно преобразований киральной $SU_L(2) \times SU_R(2)$ группы
- Если $\mu_I \neq 0$ и $m_0 = 0$, симметрия нарушается до $U_{I_3L}(1) \times U_{I_3R}(1)$ ^a
- Если $\mu_I \neq 0$ и $m_0 \neq 0$ симметрия лагранжиана U_{I_3}
- Симметрия относительно $SU(N_c)$ -группы реализуется во всех случаях

^aГруппа может быть представлена, как $U_{I_3}(1) \times U_{AI_3}(1)$, где

$U_{I_3}(1)$ изоспиновая подгруппа ($q \rightarrow e^{i\alpha\tau_3} q$), а

$U_{AI_3}(1)$ аксиально-изоспиновая ($q \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5\tau_3} q$)

Линеаризация

Линеаризованный Лагранжиан, который содержит составные бозонные поля $\sigma(x)$ и $\pi_a(x)$, имеет следующую форму:

$$\mathcal{L}_{\sigma,\pi} = \left[\gamma^\nu i \partial_\nu - m_0 + \mu \gamma^0 + \frac{\mu_I}{2} \tau_3 \gamma^0 - \sigma - i \gamma^5 \pi_a \tau_a \right] q - \frac{N_c}{4G} [\sigma\sigma + \pi_a \pi_a],$$

где

$$\sigma(x) = -2 \frac{G}{N_c} (q); \quad \pi_a(x) = -2 \frac{G}{N_c} (i \gamma^5 \tau_a q).$$

Составные бозонные поля преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} U_3(1) : \quad & \sigma \rightarrow \sigma; \quad \pi_3 \rightarrow \pi_3; \\ & \pi_1 \rightarrow \cos(2\alpha)\pi_1 + \sin(2\alpha)\pi_2; \\ & \pi_2 \rightarrow \cos(2\alpha)\pi_2 - \sin(2\alpha)\pi_1; \end{aligned}$$

Эффективное действие

Эффективное действие $S_{\text{eff}}[\sigma, \pi_a]$ в приближении $N_c \rightarrow \infty$, может быть найдено с помощью выражения:

$$e^{iS_{\text{eff}}[\sigma, \pi_a]} = \int [d\bar{q}][dq] e^{i \int d^2x \mathcal{L}_{\sigma, \pi}}.$$

Взяв континуальный интеграл по фермионным полям и прологарифмировав, получим следующее выражение:

$$S_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a) = -N_c \int \frac{\sigma^2 + \pi_a^2}{4G} d^2x - iN_c \text{Tr}_{sfx} \ln D,$$

где

$$D = i\gamma^\nu \partial_\nu - m_0 + \mu\gamma^0 + \frac{\mu_I}{2} \tau_3 \gamma^0 - \sigma - i\gamma^5 \pi_a \tau_a.$$

Tr-оператор соответствует следу по спинорным (**s**), ароматовым (**f**) и пространственным (**x**) индексам соответственно.

Термодинамический потенциал

Исходя из выражения для $S_{\text{eff}}[\sigma, \pi_a]$ можно получить термодинамический потенциал (ТДП) модели при нулевой температуре ($T = 0$) в приближении среднего поля ($N_c \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu\mu_l}(\sigma, \pi_a) &\equiv - \frac{S_{\text{eff}}(\sigma, \pi_a)}{N_c \int d^2x} \Big|_{\sigma, \pi_a = \text{const}} = \frac{\sigma^2 + \pi_a^2}{4G} + i \frac{\text{Tr}_{sf} \ln D}{\int d^2x} \\ &= \frac{\sigma^2 + \pi_a^2}{4G} + i \text{Tr}_{sf} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln(\not{p} - m_0 + \mu\gamma^0 + \frac{\mu_l}{2} \tau_3 \gamma^0 - \sigma - i\gamma^5 \pi_a \tau_a), \end{aligned}$$

где поля σ и π_a не зависят от пространственной переменной (x), а в круглых скобках \overline{D} - импульсное представление оператора Дирака D .

Термодинамический потенциал зависит от комбинации бозонных полей: $(\pi_1^2 + \pi_2^2)$, которая инвариантна относительно группы $U_{I_3}(1)$. В этом случае, без потери общности, можно положить $\pi_2 = 0$ и изучать ТДП как функцию только двух переменных: $M \equiv \sigma + m_0$ и $\Delta \equiv \pi_1$. Тогда ТДП имеет следующий вид:

$$\Omega_{\mu\nu}(M, \Delta) = \frac{(M - m_0)^2 + \Delta^2}{4G} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \{E_{\Delta}^+ + E_{\Delta}^- + (\mu - E_{\Delta}^+) \theta(\mu - E_{\Delta}^+) + (\mu - E_{\Delta}^-) \theta(\mu - E_{\Delta}^-)\},$$

где

$$E_{\Delta}^{\pm} = \sqrt{\left(\sqrt{p_1^2 + M^2} \pm \frac{\mu_I}{2}\right)^2 + \Delta^2} \equiv \sqrt{(E \pm \nu)^2 + \Delta^2};$$

$$E = \sqrt{p_1^2 + M^2}, \quad \nu = \frac{\mu_I}{2}.$$

Перенормированный термодинамический потенциал

$$\Omega_{\mu\nu}(M, \Delta) = V_0(M, \Delta) - \frac{Mm_r}{2} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \{E_{\Delta}^+ + E_{\Delta}^- - 2\sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} + (\mu - E_{\Delta}^+)\theta(\mu - E_{\Delta}^+) + (\mu - E_{\Delta}^-)\theta(\mu - E_{\Delta}^-)\},$$

где

Перенормированный вакуумный термодинамический потенциал

$$V_0(M, \Delta) \equiv \Omega_{\mu\nu}(M, \Delta) \Big|_{\mu=\mu_f=0} = \frac{M^2 + \Delta^2}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) - 1 \right], \text{ а } m_r \equiv \frac{m_0}{G(\Lambda)}$$

Процедура перенормировки сопровождается явлением **размерной трансмутации**. Более того, в вакууме киральная симметрия $SU_L(2) \times SU_R(2)$ всегда спонтанно нарушена, а величина M_0 соответствует **динамической массе кварка**.

Учет конечного объема

Вложим нашу двумерную модель в область пространства ограниченную следующим образом $0 \leq x \leq L$. В этом случае мы рассматриваем модель в пространстве-времени с топологией $R^1 \times S^1$, что накладывает на квантовые поля следующее условие:

$$q(t, x + L) = q(t, x).$$

В результате чего, для получения термодинамического потенциала $\Omega_{L\mu\nu}(M, \Delta)$ в пространстве ограниченном условием $0 \leq x \leq L$ и не нулевыми химическими потенциалами μ, ν , необходимо заменить интегрирование на бесконечное суммирование, используя следующее правило:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} f(p_1) \rightarrow \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(p_{1n}) \quad p_{1n} = \frac{2n\pi}{L}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Термодинамический потенциал в пространстве $R^1 \times S^1$

$$\Omega_{L\mu\nu}(M, \Delta) = V_L(\rho) - \frac{Mm_r}{2} - \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ E_{L\Delta n}^+ + E_{L\Delta n}^- - 2\sqrt{\rho^2 + \frac{\pi^2}{L^2}(2n + \phi)^2} \right. \\ \left. + (\mu - E_{L\Delta n}^+) \theta(\mu - E_{L\Delta n}^+) + (\mu - E_{L\Delta n}^-) \theta(\mu - E_{L\Delta n}^-) \right\},$$

где $\rho = \sqrt{M^2 + \Delta^2}$, и

$$E_{L\Delta n}^{\pm} = \sqrt{\left(\sqrt{M^2 + \frac{\pi^2}{L^2}(2n + \phi)^2} \pm \nu \right)^2 + \Delta^2}.$$

Выражение для плотности барионной материи n_{qL} в пространстве $R^1 \times S^1$

$$n_{qL} \equiv -\frac{\partial \Omega_{L\mu\nu}}{\partial \mu} = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \theta(\mu - E_{L\Delta n}^+) + \theta(\mu - E_{L\Delta n}^-) \right\}.$$

Термодинамический потенциал в пространстве $R^1 \times S^1$

$$\Omega_{L\mu\nu}(M, \Delta) = V_L(\rho) - \frac{Mm_r}{2} - \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ E_{L\Delta n}^+ + E_{L\Delta n}^- - 2\sqrt{\rho^2 + \frac{\pi^2}{L^2}(2n + \phi)^2} \right. \\ \left. + (\mu - E_{L\Delta n}^+) \theta(\mu - E_{L\Delta n}^+) + (\mu - E_{L\Delta n}^-) \theta(\mu - E_{L\Delta n}^-) \right\},$$

где $\rho = \sqrt{M^2 + \Delta^2}$, и

$$E_{L\Delta n}^{\pm} = \sqrt{\left(\sqrt{M^2 + \frac{\pi^2}{L^2}(2n + \phi)^2} \pm \nu \right)^2 + \Delta^2}.$$

Безразмерные величины

$$\lambda = \frac{\pi}{LM_0} \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{M_0}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{M_0} \equiv \frac{\mu_l}{2M_0}, \quad m = \frac{M}{M_0}, \quad \delta = \frac{\Delta}{M_0},$$

Фазовый портрет

Уравнение щели

$$\frac{\partial \Omega_{\vec{\mu}\vec{\nu}}(m, \delta)}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial \Omega_{\vec{\mu}\vec{\nu}}(m, \delta)}{\partial \delta} = 0.$$

Координаты точки глобального минимума термодинамического потенциала m и δ пропорциональны основному состоянию $\langle \bar{q}q \rangle$ и $\langle \bar{q}i\gamma^5\tau_1 q \rangle$.

- Если $m = 0, \delta = 0$, исходная симметрия $U_{I_3}(1) \times U_{A_{I_3}}(1)$ сохраняется;
- Если $m \neq 0, \delta = 0$, в модели реализуется симметрия $U_{I_3}(1)$;
- Если $m = 0, \delta \neq 0$, в модели реализуется симметрия $U_{A_{I_3}}(1)$, при которой пионы конденсированы и изоспиновая симметрия $U_{I_3}(1)$, спонтанно нарушена;
- Случай с $m \neq 0, \delta \neq 0$ соответствует полному нарушению симметрий

Частный случай $\mu = \nu = \lambda = 0$

Введем безразмерный параметр α по следующей формуле: $m_r \equiv \alpha M_0 / \pi$.

Термодинамический потенциал

$$\Omega(M, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) - 1 \right] - \frac{\alpha M_0 M}{2\pi}.$$

Уравнение щели

$$\frac{\partial \Omega(M, \Delta)}{\partial M} = 2M \ln \left(\frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) - \alpha M_0 = 0,$$

$$\frac{\partial \Omega(M, \Delta)}{\partial \Delta} = 2\Delta \ln \left(\frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) = 0.$$

Частный случай $\mu = \nu = \lambda = 0$

Введем безразмерный параметр α по следующей формуле: $m_r \equiv \alpha M_0 / \pi$.

Термодинамический потенциал

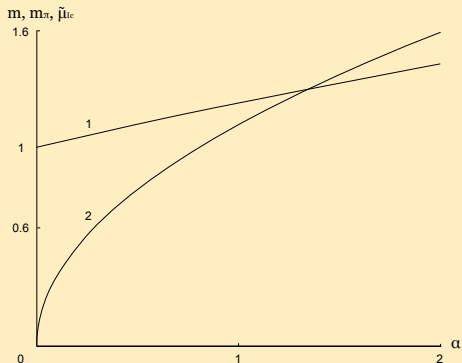
$$\Omega(M, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) - 1 \right] - \frac{\alpha M_0 M}{2\pi}.$$

Уравнение щели

$$\frac{M}{M_0} \ln \left(\frac{M}{M_0} \right)^2 = \frac{\alpha}{2} \implies m \ln m = \frac{\alpha}{4}, \quad \text{где } m = \frac{M}{M_0}$$

Частный случай $\mu = \nu = \lambda = 0$

Щель $m(\alpha)$



- Кривая 1 соответствует динамической массе кварка m
- Кривая 2 соответствует динамической массе π -мезона
- Отношению $\frac{m}{m_\pi} = \frac{350\text{МэВ}}{140\text{МэВ}} = \frac{5}{2}$ соответствует $\alpha = 0.17$

Частный случай $\mu = 0$, $\nu \neq 0$, $\lambda = 0$

Термодинамический потенциал

$$\Omega_\nu(M, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) - 1 \right] - \frac{\alpha M_0 M}{2\pi} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \left\{ E_\Delta^+ + E_\Delta^- - 2\sqrt{p_1^2 + M^2 + \Delta^2} \right\}.$$

ТДП выраженный через эллиптические интегралы

$$\Omega_\nu(M, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) + \mathbf{I}_{-1} + \mathbf{I}'_{-1} - 1 \right] + \frac{M}{4\pi} \left[2\alpha M_0 + A(\nu \mathbf{I}_1 + I_0) - A'(\nu \mathbf{I}'_1 - I'_0) \right].$$

Частный случай $\mu = 0, \nu \neq 0, \lambda = 0$

Эллиптические интегралы в форме Вейерштрасса

$$I_0 = \int_0^{\infty} \frac{du}{\sqrt{Au^3 + Bu^2 + Cu + 1}},$$

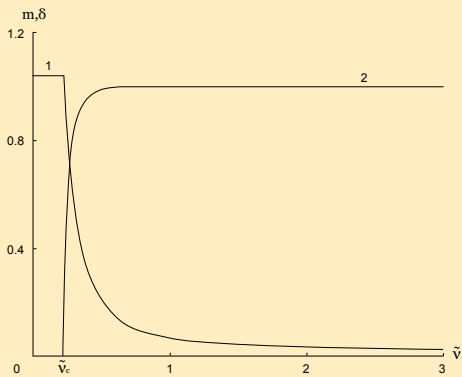
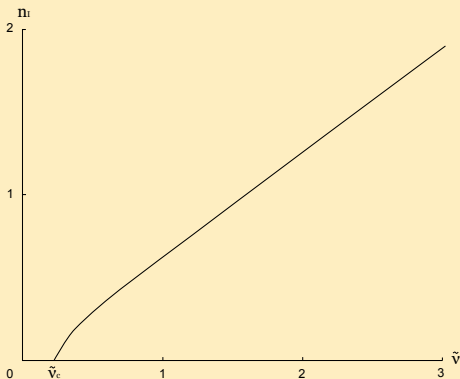
$$I_{-1} = \int_{\frac{1}{\lambda}}^{\infty} \frac{du}{u\sqrt{Au^3 + Bu^2 + Cu + 1}}, \quad I_1 = \int_0^{\lambda} \frac{udu}{\sqrt{Au^3 + Bu^2 + Cu + 1}}, \quad \text{где}$$

$$A = 2M((M + \nu)^2 + \Delta^2),$$

$$B = 5M^2 + 6M\nu + \nu^2 + \Delta^2,$$

$$C = 4M + 2\nu.$$

Частный случай $\mu = 0, \nu \neq 0, \lambda = 0$

Щель $\delta, m(\tilde{\nu})$ Изотопическая плотность $n_I(\tilde{\nu})$ 

Частный случай $\mu \neq 0, \nu = 0, \lambda = 0$

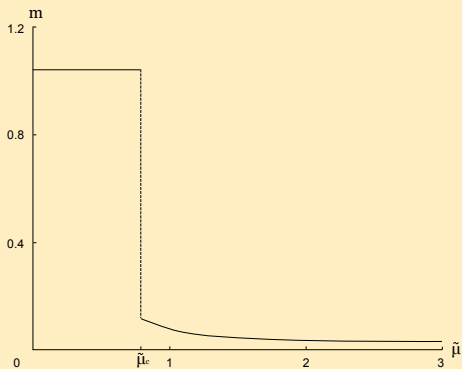
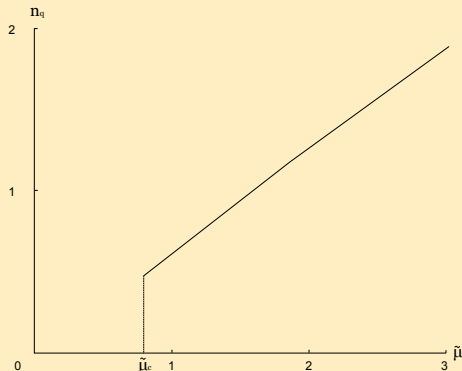
Термодинамический потенциал

$$\Omega_\mu(M, \Delta) = \frac{M^2 + \Delta^2}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{M^2 + \Delta^2}{M_0^2} \right) - 1 \right] - \frac{\alpha M_0 M}{2\pi} +$$

$$+ \frac{\theta(\mu - \sqrt{M^2 + \Delta^2})}{\pi} \Omega'_\mu(M, \Delta),$$

где

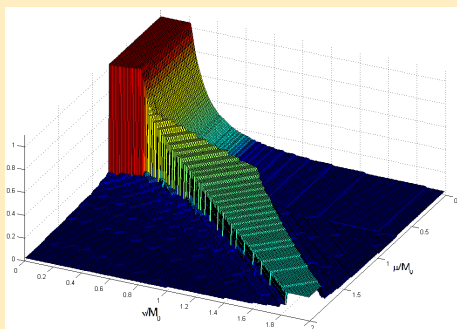
$$\Omega'_\mu(M, \Delta) = (M^2 + \Delta^2) \ln \left(\frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2 - \Delta^2}}{\sqrt{M^2 + \Delta^2}} \right) - \mu \sqrt{\mu^2 - M^2 - \Delta^2}.$$

Частный случай $\mu \neq 0$, $\nu = 0$, $\lambda = 0$ Щель $m(\tilde{\mu})$ Изотопическая плотность $n_q(\tilde{\mu})$ 

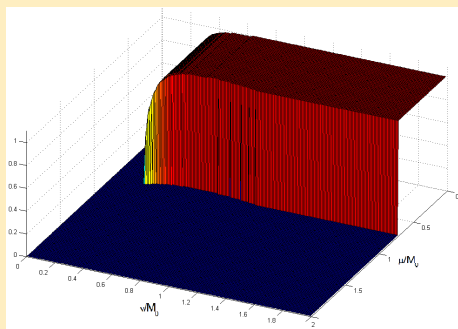
Фазовый портрет $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ при $\lambda = 0$

Для каждого значения $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ необходимо найти точку глобального минимума ТДП $\Omega_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(m, \delta)$ относительно переменных m и δ . Таким образом результатом вычислений являются два трехмерных графика $m(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ и $\delta(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$.

Щель $m(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$

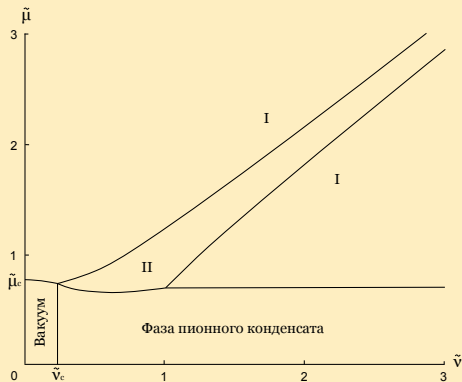


Щель $\delta(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$



Фазовый портрет $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ при $\lambda = 0$

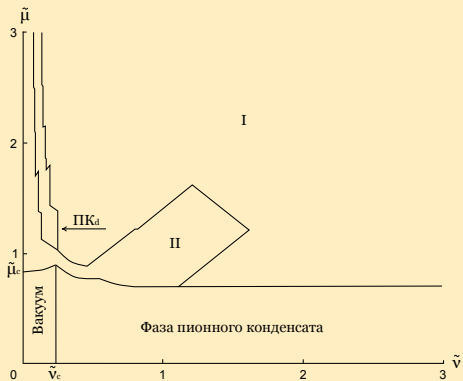
Фазовый портрет



- В фазе I и II – $\delta = 0, m \neq 0, n_q \neq 0, n_l = 0$;
- В фазе ПК – $\delta \neq 0, m \neq 0, n_q = 0, n_l \neq 0$;
- В Вакууме – $\delta = 0, m = 1.04, n_q = 0, n_l = 0$;

Фазовый портрет $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ при $\lambda = 0.1$

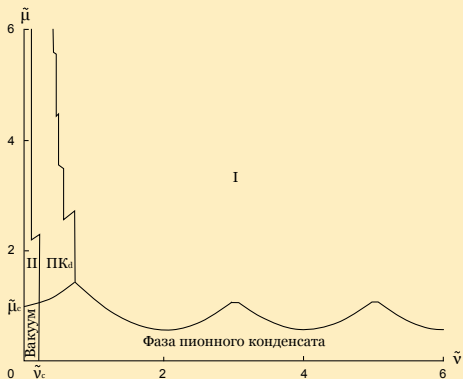
Фазовый портрет



- В фазе I и II – $\delta = 0, m \neq 0, n_q \neq 0, n_l = 0$;
- В фазе ПК – $\delta \neq 0, m \neq 0, n_q = 0, n_l \neq 0$;
- В фазе ПК_d – $\delta \neq 0, m \neq 0, n_l \neq 0, n_q \neq 0$;
- В Вакууме – $\delta = 0, m = 1.04, n_q = 0, n_l = 0$;

Фазовый портрет $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ при $\lambda = 1$

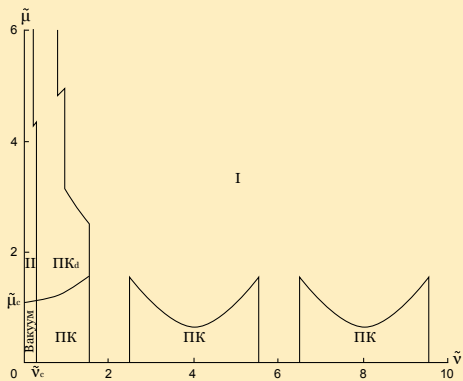
Фазовый портрет



- В фазе I и II – $\delta = 0, m \neq 0, n_q \neq 0, n_l = 0$;
- В фазе ПК – $\delta \neq 0, m \neq 0, n_q = 0, n_l \neq 0$;
- В фазе ПК_d – $\delta \neq 0, m \neq 0, n_l \neq 0, n_q \neq 0$;
- В Вакууме – $\delta = 0, m = 1.04, n_q = 0, n_l = 0$;

Фазовый портрет $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ при $\lambda = 2$

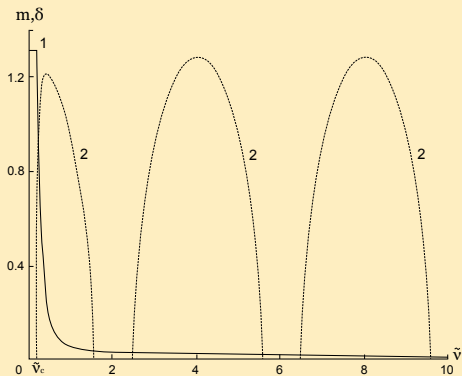
Фазовый портрет



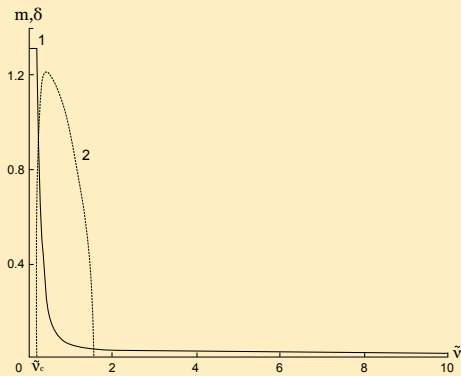
- В фазе I и II – $\delta = 0$, $m \neq 0$, $n_q \neq 0$, $n_l = 0$;
- В фазе ПК – $\delta \neq 0$, $m \neq 0$, $n_q = 0$, $n_l \neq 0$;
- В фазе ПК $_{\alpha}$ – $\delta \neq 0$, $m \neq 0$, $n_l \neq 0$, $n_q \neq 0$;
- В Вакууме – $\delta = 0$, $m = 1.04$, $n_q = 0$, $n_l = 0$;

Фазовый портрет $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ при $\lambda = 2$

Щель $m(\tilde{\nu})$ и $\delta(\tilde{\nu})$ при $\tilde{\mu} = 0$



Щель $m(\tilde{\nu})$ и $\delta(\tilde{\nu})$ при $\tilde{\mu} = 2$



Основные результаты раздела

- Описано явление пионной конденсации в рамках модели Гросса–Невё с учетом барионного μ и изотопического μ_I химических потенциалов.
- В случае нулевого барионного химического потенциала, используя эллиптические интегралы, удалось выразить эффективный потенциал модели в аналитическом виде и на его основе предсказать фазовый переход из вакуума в фазу пионной конденсации.
- В случае безграничного объема взаимодействия, что соответствует тривиальной топологии ($R^1 \times R^1$), с помощью численных методов построен фазовый портрет модели в переменных (μ, ν) и исследована его структура.
- В случае ограниченного объема взаимодействия построена и изучена серия фазовых портретов в зависимости от размеров системы и условий периодичности.
- В случае периодических граничных условий образуется новая фаза пионной конденсации $ПК_d$, которая, в отличие от классической фазы ПК, имеет ненулевую кварковую плотность.

Публикации по материалам данного раздела

- В.Ч. Жуковский, К.Г. Клименко, Т.Г. Хунджуа.
Пионная конденсация в модели Гросса–Неве // Вестник Московского Университета. 2010. Т. 3, № 1. с. 23.
- D. Ebert, T.G. Khunjua, K.G. Klimenko, V.Ch. Zhukovsky.
Charged pion condensation phenomenon of dense baryonic matter induced by finite volume: the NJL₂ model consideration // Int.J.Mod.Phys. A. 2012. Т. 27, № 27. с. 1250162.
- D. Ebert, T.G. Khunjua, K.G. Klimenko, V.Ch. Zhukovsky.
Finite size effects in the Gross–Neveu model with isospin and baryonic chemical potentials // Proceedings of the Fifteen Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics, Moscow, 18-24 August 2011/ Ed. by A. Studenikin. – Singapore: World Scientific, 2013. – Pp. 429-432.

Неоднородные киральный и дикварковый конденсаты в модели Гросса–Невё

Исходный лагранжиан модели

Исследования основаны на (1+1)-мерной модели Гросса-Неве с безмассовыми фермионами принадлежащими фундаментальному мультиплету $O(N)$ ароматовой группы (Chodos et al., 1999).

$$\mathcal{L}_{\psi, \bar{\psi}} = \bar{\psi}_k \left[\gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 \right] \psi_k + \frac{G_1}{N} \left[(\bar{\psi}_k \psi_k)^2 + (\bar{\psi}_k i \gamma^5 \psi_k)^2 \right] + \frac{G_2}{N} (\psi_k^T \epsilon \psi_k) (\bar{\psi}_j \epsilon \bar{\psi}_j^T),$$

Описание

- ψ_k ($k = 1, \dots, N$) представляет собой фундаментальный мультиплет группы $O(N)$ и дираковский спинор^a;
- μ химический потенциал числа фермионов;

^aМатрицы дирака имеют следующий вид $\gamma^0 = \sigma_1; \gamma^1 = i\sigma_2; \gamma^5 = \sigma_3$

Исходный лагранжиан модели

Исследования основаны на (1+1)-мерной модели Гросса-Неве с безмассовыми фермионами принадлежащими фундаментальному мультиплету $O(N)$ ароматовой группы (Chodos et al., 1999).

$$\mathcal{L}_{\psi, \bar{\psi}} = \bar{\psi}_k \left[\gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0 \right] \psi_k + \frac{G_1}{N} \left[(\bar{\psi}_k \psi_k)^2 + (\bar{\psi}_k i \gamma^5 \psi_k)^2 \right] + \frac{G_2}{N} (\psi_k^T \epsilon \psi_k) (\bar{\psi}_j \epsilon \bar{\psi}_j^T),$$

Симметрии

- Относительно цветовой группы $U(1)$: $\psi_k \rightarrow \exp(i\alpha)\psi_k$
- Относительно киральной группы преобразований: $\psi_k \rightarrow \exp(i\alpha' \gamma^5)\psi_k$
- Относительно внутренней группы $O(N)$

Линеаризованный лагранжиан модели

Введение составных бозонных полей $\sigma(x)$, $\pi(x)$, $\Delta(x)$, $\Delta^*(x)$:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= -2\frac{G_1}{N}(\bar{\psi}_k\psi_k), & \pi(x) &= -2\frac{G_1}{N}(\bar{\psi}_k i\gamma^5\psi_k), \\ \Delta(x) &= -2\frac{G_2}{N}(\psi_k^T\epsilon\psi_k), & \Delta^*(x) &= -2\frac{G_2}{N}(\bar{\psi}_k\epsilon\bar{\psi}_k^T),\end{aligned}$$

позволяет линеаризовать лагранжиан и привести его к виду:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\sigma,\pi,\Delta} &= \bar{\psi}_k \left[\gamma^\nu i\partial_\nu + \mu\gamma^0 - \sigma - i\gamma^5\pi \right] \psi_k - \frac{N}{4G_1}(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{N}{4G_2}\Delta^*\Delta - \\ &\quad - \frac{\Delta^*}{2}[\psi_k^T\epsilon\psi_k] - \frac{\Delta}{2}[\bar{\psi}_k\epsilon\bar{\psi}_k^T].\end{aligned}$$

Эффективное действие

Эффективное действие $\mathcal{S}_{\text{eff}}[\sigma(x), \pi(x), \Delta(x)]$ в пределе $N \rightarrow \infty$ может быть получено с помощью следующего выражения:

$$e^{i\mathcal{S}_{\text{eff}}[\sigma(x), \pi(x), \Delta(x)]} = \int [d\bar{\psi}][d\psi] e^{i \int d^2x \mathcal{L}_{\sigma, \pi, \Delta}}.$$

Величины полей основного состояния $\langle \sigma(x) \rangle$, $\langle \pi(x) \rangle$, $\langle \Delta(x) \rangle$ и $\langle \Delta^*(x) \rangle$ определяются системой уравнений на поиск седловой точки:

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \sigma(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \pi(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \Delta(x)} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{S}_{\text{eff}}}{\delta \Delta^*(x)} = 0.$$

Неоднородные конденсаты

В вакууме, то есть в состоянии с нулевой плотностью частиц ($\mu = 0$), величины $\langle \sigma(x) \rangle$, $\langle \pi(x) \rangle$, $\langle \Delta(x) \rangle$ и $\langle \Delta^*(x) \rangle$ не зависят от пространственной координаты. Однако в плотной среде ($\mu \neq 0$) эти величины могут иметь нетривиальную зависимость от координаты пространства. В данной работе мы рассматриваем следующий вид неоднородности:

$$\begin{aligned}\langle \sigma(x) \rangle &= M \cos(2bx), & \langle \pi(x) \rangle &= M \sin(2bx), \\ \langle \Delta(x) \rangle &= \Delta \exp(-2ib'x), & \langle \Delta^*(x) \rangle &= \Delta \exp(2ib'x).\end{aligned}$$

Таким образом, подставив данный анзац в выражение для эффективного действия $S_{\text{eff}}[\sigma(x), \pi(x), \Delta(x)]$ мы получим эффективное действие $S_{\text{eff}}[M, \Delta, b, b']$.

Термодинамический потенциал

Вычислив эффективное действие $S_{\text{eff}}[M, \Delta, b, b']$, можно записать выражение для термодинамического потенциала (ТДП):

$$\Omega(M, b, b', \Delta) \equiv -\frac{S_{\text{eff}}[M, \Delta, b, b']}{N \int d^2x} = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + \frac{i}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln(\lambda_1(p)\lambda_2(p)),$$

где выражение для $\lambda_{1,2}(p)$:

$$\lambda_{1,2}(p) = p_0^2 - \tilde{\mu}^2 - p_1^2 + b'^2 + M^2 - \Delta^2 \pm 2\sqrt{M^2 p_0^2 - M^2 p_1^2 + \tilde{\mu}^2 p_1^2 - 2p_0 b' \tilde{\mu} p_1 + p_0^2 b'^2}, \quad \tilde{\mu} = b - \mu.$$

► Численно-аналитический метод интегрирования

Перенормировка и отношение констант связи

Очевидно, что ТДП ультрафиолетово расходится, поэтому необходимо провести процедуру перенормировки. Не останавливаясь на подробностях данной процедуры, следует отметить ее важные свойства.

Размерная трансмутация

$$G_1, G_2 \rightarrow \delta = 2 \ln \frac{G_1}{G_2} \text{ и } M_1$$

ТДП в вакууме ($\mu = 0, T = 0$)

$$V_0(M, \Delta) = \Delta^2(\delta - 1) - M^2 + (M - \Delta)^2 \ln \left| \frac{M - \Delta}{M_1} \right| + (M + \Delta)^2 \ln \left(\frac{M + \Delta}{M_1} \right)$$

Вычисление фазового портрета

При рассмотрении ненулевой температуры T , термодинамический потенциал станет зависеть от двух внешних параметров μ и T , а также от переменных M, Δ, b, b' . Таким образом, перед нами стоит задача поиска минимума функции $\Omega_{\mu, T}(M, \Delta, b, b')$ для каждого значения параметров μ и T . Решением данной задачи является четыре трехмерных графика $M(\mu, T)$; $\Delta(\mu, T)$; $b(\mu, T)$; $b'(\mu, T)$, удовлетворяющих условию минимума термодинамического потенциала:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{\mu, T}(M, \Delta, b, b')}{\partial M} = 0; & \quad \frac{\partial \Omega_{\mu, T}(M, \Delta, b, b')}{\partial \Delta} = 0 \\ \frac{\partial \Omega_{\mu, T}(M, \Delta, b, b')}{\partial b} = 0; & \quad \frac{\partial \Omega_{\mu, T}(M, \Delta, b, b')}{\partial b'} = 0 \end{aligned}$$

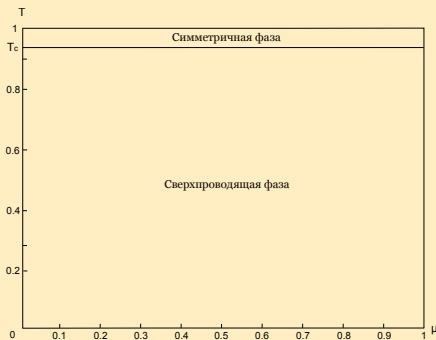
Фазовый портрет модели является результатом совмещения этих графиков.

Однородный случай ($b = b' = 0$)

Фазовый портрет для $\delta = 1$



Фазовый портрет для $\delta = -1$

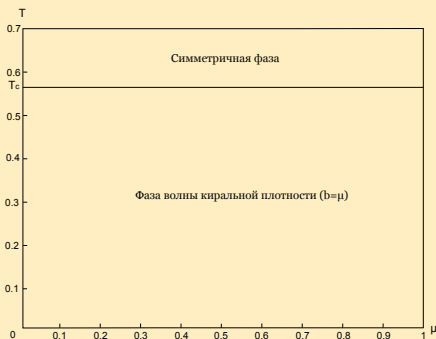


Критический химический потенциал

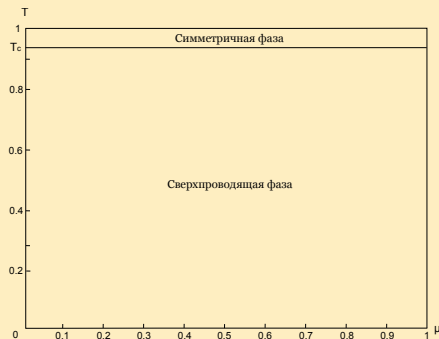
$$\mu_c = \frac{M_1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - e^{-\delta}} \implies \text{при } \delta \rightarrow \infty \quad \mu_c = \frac{M_1}{\sqrt{2}}$$

Неоднородный случай ($b \neq 0; b' \neq 0$)

Фазовый портрет для $\delta = 1$



Фазовый портрет для $\delta = -1$



- Фаза волны киральной плотности подавила фазу цветовой сверхпроводимости, при этом волновой вектор $b = \mu$
- Дикварковый конденсат остался однородным $b' = 0$

Подавление сверхпроводимости $\delta = 1$

Фазовый портрет для $b = 0$



Фазовый портрет для $b \neq 0$



Выводы

- Исследована фазовая структура модели с учетом возможности возникновения неоднородных конденсатов
- Обнаружен эффект подавления фазы цветовой сверхпроводимости волной киральной плотности
- Обнаружена тенденция дикваркового конденсата оставаться в пространственно однородном состоянии

Публикации по материалам данного раздела

- В.Ч. Жуковский, К.Г. Клименко, Т.Г. Хунджуа.
Влияние волны киральной плотности на сверхпроводящую фазу в двумерной модели Гросса-Невё // Вестник Московского Университета. 2013. Т. 3, № 2. с. 11.
- Жуковский В.Ч., Клименко К.Г., Хунджуа Т.Г.
Влияние волны киральной плотности на сверхпроводящую фазу в двумерной модели Гросса-Невё // Научная конференция "Ломоносовские чтения", секция физики, апрель 2013 года. Сборник тезисов докладов. – Москва: физ. ф-т. МГУ, 2013. – С. 149-152.

Интегрирование ТДП при $b \neq 0$ и $b' \neq 0$

Основная задача состоит в интегрировании следующего выражения:

$$\Omega^{un}(M, b', \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + \frac{i}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln [\lambda_1(p)\lambda_2(p)]$$

Перемножим λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 = & (p_0^2 - \tilde{\mu}^2 - p_1^2 + b'^2 + M^2 - \Delta^2)^2 - \\ & - 4(M^2p_0^2 - M^2p_1^2 + \tilde{\mu}^2p_1^2 - 2p_0b'\tilde{\mu}p_1 + p_0^2b'^2) \end{aligned}$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 = & p_0^4 - 2M^2p_0^2 - 2\Delta^2p_0^2 - 2\tilde{\mu}^2p_0^2 - 2b'^2p_0^2 - p_0^2p_1^2 + 4b'\tilde{\mu}p_0p_1 + \\ & + p_1^4 + 2M^2p_1^2 + 2\Delta^2p_1^2 - 2\tilde{\mu}^2p_1^2 - 2b'^2p_1^2 - p_0^2p_1^2 + 4b'\tilde{\mu}p_0p_1 + \\ & + M^4 + b'^4 + \Delta^4 + \tilde{\mu}^4 - 2b'^2\Delta^2 + 2b'^2M^2 - \\ & - 2\Delta^2M^2 - 2b'^2\tilde{\mu}^2 + 2\Delta^2\tilde{\mu}^2 - 2M^2\tilde{\mu}^2. \end{aligned}$$

Интегрирование ТДП при $b \neq 0$ и $b' \neq 0$

Собрав одинаковые члены, получим:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \lambda_2 = & p_0^4 - 2p_0^2(M^2 + \Delta^2 + \tilde{\mu}^2 + b'^2 + p_1^2) + \\ & 8b' \tilde{\mu} p_1 p_0 + p_1^4 - 2p_1^2(\tilde{\mu}^2 + b'^2 - M^2 - \Delta^2) + \\ & (\Delta^2 - M^2 + \tilde{\mu}^2 - b'^2)^2. \end{aligned}$$

В упрощенной форме имеем:

$$\lambda_1 \lambda_2 = p_0^4 + \alpha p_0^2 + \beta p_0 + \gamma, \quad \text{где}$$

$$\alpha = -2(M^2 + \Delta^2 + \tilde{\mu}^2 + b'^2 + p_1^2)$$

$$\beta = 8b' \tilde{\mu} p_1$$

$$\gamma = p_1^4 - 2p_1^2(\tilde{\mu}^2 + b'^2 - M^2 - \Delta^2) + (\Delta^2 - M^2 + \tilde{\mu}^2 - b'^2)^2.$$

Интегрирование ТДП при $b \neq 0$ и $b' \neq 0$

Благодаря основной теореме алгебры можно утверждать, что:

$$p_0^4 + \alpha p_0^2 + \beta p_0 + \gamma = (p_0^2 + r p_0 + q)(p_0^2 - r p_0 + s)$$

Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты получим:

$$\alpha = s + q - r^2 \Rightarrow \alpha + r^2 = s + q$$

$$\beta = rs - qr \Rightarrow \frac{\beta}{r} = s - q$$

$$\gamma = sq,$$

Интегрирование ТДП при $b \neq 0$ и $b' \neq 0$

Для связи коэффициентов α, β, γ с коэффициентами r, s, q , мы должны решить следующее уравнение:

$$(\alpha + r^2)^2 - \left(\frac{\beta}{r}\right)^2 = (s + q)^2 - (s - q)^2 = 4sq = 4\gamma$$

Заменяя переменные запишем его в следующем виде:

$$X^3 + AX^2 + BX + C = 0, \quad \text{where}$$

$$X = r^2$$

$$A = 2\alpha = -4(M^2 + \Delta^2 + \tilde{\mu}^2 + b'^2 + p_1^2)$$

$$B = \alpha^2 - 4\gamma = 16 \left[b'^2 \Delta^2 + M^2 \tilde{\mu}^2 + \Delta^2 M^2 + b'^2 \tilde{\mu}^2 + p^2 (\tilde{\mu}^2 + b'^2) \right]$$

$$C = \beta^2 = -(8b' \tilde{\mu} p_1)^2$$

Интегрирование ТДП при $b \neq 0$ и $b' \neq 0$

Кубическое уравнение можно решить с помощью формулы Кордано. После этого, можно определить коэффициенты r , s , q :

$$r = \sqrt{X}$$

$$q = \frac{\alpha}{2} + \frac{r^2}{2} - \frac{\beta}{2r}$$

$$s = \frac{\alpha}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{\beta}{2r}$$

Интегрирование ТДП при $b \neq 0$ и $b' \neq 0$

Вспомним, что наша основная задача вычислить следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
 & \frac{i}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln [\lambda_1(p)\lambda_2(p)] = \\
 & = \frac{i}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln [p_0^2 + rp_0 + q] + \frac{i}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln [p_0^2 - rp_0 + s] = \\
 & = \frac{i}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \left[\left(p_0 + \frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{r^2}{4} - q\right) \right] + \\
 & + \frac{i}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln \left[\left(p_0 - \frac{r}{2}\right)^2 - \left(\frac{r^2}{4} - s\right) \right].
 \end{aligned}$$

Интегрирование ТДП при $b \neq 0$ и $b' \neq 0$

Используя, известную формулу:

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \ln [(p_0 + a)^2 - b^2] = \frac{i}{2} \{ |a - b| + |a + b| \},$$

можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \ln [\lambda_1(p)\lambda_2(p)] = \\ - \int \frac{dp_1}{8\pi} \left\{ \left| \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - q} \right| + \left| \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - q} \right| + \right. \\ \left. + \left| -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - s} \right| + \left| -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - s} \right| \right\} \end{aligned}$$

Интегрирование ТДП при $b \neq 0$ и $b' \neq 0$

Итак, можно заключить, что выражение для ТДП проинтегрировано в общем виде. В ходе численных вычислений, нам удалось выяснить, что первые два модуля в предыдущем выражении раскрываются с положительным знаком, а вторые два с отрицательным. Следовательно оно упрощается до следующего вида:

$$\frac{i}{2} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln [\lambda_1(p)\lambda_2(p)] = - \int \frac{dp_1}{4\pi} r$$

Таким образом, нам необходимо для каждой переменной решать кубическое уравнение, а затем подставлять корень из X в данное выражение. И уже потом, численно, брать оставшийся интеграл по переменной p_1 , не забывая конечно о соответствующей перенормировке.

▶ Вернуться