Критическое поведение по константе связи и ультрафиолетовые асимптотики в четырехмерной скалярной теории

В. Е. Рочев

15 января 2013 г.

Содержание

Введение

Проблема ультрафиолетового поведения в четырехмерных перенормируемых моделях без асимптотической свободы является частью общей проблемы неслабой связи в КТП

Двухчастичное приближение для системы уравнений Дайсона-Швингера:

V.E. Rochev: J.Phys. A44 (2011) 305403 (модель $(\phi^*\phi)^2$)

V.E. Rochev: J.Phys. A45 (2012) 205401 (модель Юкавы)

Лагранжиан

Лагранжиан ($x \in E_4$)

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{\mu^2}{2} \chi^2 + g \phi^* \phi \chi$$

ϕ – фион, χ – хион.

Метастабильность:

G. Baym: Phys.Rev. 117 (1960) 886

J.M. Cornwall and D.A. Morris: Phys.Rev. D52 (1995) 6074

F. Gross et al: Phys.Rev. D64 (2001) 076008

Уравнения Швингера-Дайсона

Производящий функционал

$$G(\eta, j) = \int D(\phi, \phi^*, \chi) \exp\left\{ \int dx\, \mathcal{L}(x) - \phi^*(y)\cdot\eta(y,x)\cdot\phi(x) + j(x)\cdot\chi(x) \right\}.$$

УШД в функциональных производных:

$$g\left[\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta(y,x)\delta j(x)} + \frac{\delta Z}{\delta j(x)}\frac{\delta Z}{\delta\eta(y,x)}\right] = (m^2 - \partial_x^2)\frac{\delta Z}{\delta\eta(y,x)} +$$
$$+\eta(x, x_1)\cdot\frac{\delta Z}{\delta\eta(y, x_1)} + \delta(x-y),$$
$$\frac{\delta Z}{\delta j(x)} = D_c(x - x_1)\cdot j(x_1) - gD_c(x - x_1)\cdot\frac{\delta Z}{\delta\eta(x_1, x_1)}$$

Здесь $Z = \log G$, $D_c = (\mu^2 - \partial^2)^{-1}$ и

$$A(x_1)\cdot B(x_1) \equiv \int dx_1\, A(x_1)B(x_1)$$

Уравнения Швингера-Дайсона

УШД для $\delta Z/\delta j$ позволяет выразить все хионные функции Грина через функции, содержащие только фионы.
Трехточечная хион-фионная функция:

$$V(xy|z) \equiv -\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta j(z)\delta\eta(yx)}\right|_{\eta=j=0} = gD_c(z-z_1)\cdot Z_2\begin{pmatrix} z_1 & z_1 \\ x & y \end{pmatrix}$$

Пропагатор хиона:

$$D(x-y) \equiv \left.\frac{\delta^2 Z}{\delta j(y)\delta j(x)}\right|_{\eta=j=0} =$$

$$= D_c(x-y) + g^2 D_c(x-x_1)\cdot Z_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 \end{pmatrix}\cdot D_c(y_1-y)$$

и т.д.
Таким образом, для полного описания модели достаточно знать фионные функции Грина $\delta^n Z/\delta^n\eta$.

Уравнения Швингера-Дайсона

Исключая дифференцирование по j, мы получаем уравнение

$$g^2 D_c(x - x_1) \cdot \left[\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta(x_1, x_1)\delta\eta(y, x)} + \frac{\delta Z}{\delta\eta(x_1, x_1)}\frac{\delta Z}{\delta\eta(y, x)}\right] +$$

$$+(m^2 - \partial_x^2)\frac{\delta Z}{\delta\eta(y, x)} + \eta(x, y_1) \cdot \frac{\delta Z}{\delta\eta(y, y_1)} + \delta(x - y) = 0,$$

содержащее производные только по источнику η.
Последовательное дифференцирование этого уравнения дает нам бесконечную систему уравнений Дайсона-Швингера для функций Грина.

Система уравнений Дайсона-Швингера

Система уравнений Дайсона-Швингера (производные УШД при выключенном источнике):

Уравнение для пропагатора:

$$(\bar{m}^2 - \partial_x^2)\Delta(x-y) = \delta(x-y) + g^2 D_c(x-x_1)\cdot Z_2\begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

Уравнение для двухчастичной функции:

$$(\bar{m}^2 - \partial_x^2)Z_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} - g^2 D_c(x-x_1)\cdot Z_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}\Delta(x-y) +$$

$$+ g^2 D_c(x-x_1)\cdot Z_3\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \delta(x-y')\Delta(x'-y),$$

и т.д.

Здесь $\Delta \equiv -\delta Z/\delta\eta|_{\eta=0}$, $Z_n \equiv \delta^n Z/\delta\eta^n|_{\eta=0}$, $\bar{m}^2 = m^2 - \frac{g^2}{\mu^2}\Delta(x=0)$.

Разложение среднего поля

Разложение среднего поля для производящего функционала

$$Z = Z^{(0)} + Z^{(1)} + \cdots$$

основано на главном приближении

$$g^2 D_c \cdot \frac{\delta Z^{(0)}}{\delta \eta} \frac{\delta Z^{(0)}}{\delta \eta} + (m^2 - \partial^2) \frac{\delta Z^{(0)}}{\delta \eta} + \eta \cdot \frac{\delta Z^{(0)}}{\delta \eta} + 1 = 0.$$

Уравнение следующего порядка есть

$$g^2 D_c \cdot \frac{\delta Z^{(1)}}{\delta \eta} \frac{\delta Z^{(0)}}{\delta \eta} + g^2 D_c \cdot \frac{\delta Z^{(0)}}{\delta \eta} \frac{\delta Z^{(1)}}{\delta \eta} +$$

$$+(m^2 - \partial^2) \frac{\delta Z^{(1)}}{\delta \eta} + \eta \cdot \frac{\delta Z^{(1)}}{\delta \eta} = -g^2 D_c \cdot \frac{\delta^2 Z^{(0)}}{\delta \eta^2}$$

и т.д.

Главный порядок

Пропагатор фиона

$$\Delta_0^{-1}(p) = \Delta_c^{-1}(p) \equiv \bar{m}^2 + p^2.$$

Двухчастичная функция

$$Z_2^{(0)}\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \Delta_0(x-y')\Delta_0(x'-y)+$$

$$+\Delta_0(x-x_1)\Delta_0(x'-x_2)\cdot f_0(x_1-x_2)\cdot\Delta_0(x_1-y)\Delta_0(x_2-y'),$$

где

$$f_0^{-1}(x) = \frac{1}{g^2}D_c^{-1}(x) - L_0(x)$$

и $L_0(x) = \Delta_0(x)\Delta_0(-x)$ – скалярная петля.

Пропагатор хиона

$$D_0^{-1}(p) = \mu^2 + p^2 - g^2 L_0(p^2).$$

Перенормировка

Условия нормировки для для перенормированных пропагаторов Δ_r и D_r:

$$\Delta_r^{-1}(0) = m_r^2, \quad \left.\frac{d\Delta_r^{-1}}{dp^2}\right|_{p=0} = 1,$$

$$D_r^{-1}(0) = \mu_r^2, \quad \left.\frac{dD_r^{-1}}{dp^2}\right|_{p=0} = 1.$$

Перенормированный пропагатор фиона:

$$\Delta_r^{-1}(p) = m_r^2 + p^2.$$

Перенормированный пропагатор хиона:

$$D_r^{-1}(p^2) = \mu_r^2 + p^2 - g^2 L_r(p^2),$$

где $L_r(p^2) = L_0(p^2) - L_0(0) - p^2 L_0'(0)$.

Критическая константа связи

При $p^2 \to +\infty$

$$D_r^{-1}(p^2) = (1 - \frac{g^2}{96\pi^2 m_r^2})p^2 + \frac{g^2}{16\pi^2}\log\frac{p^2}{m_r^2} + O(1).$$

Критическая константа связи в скалярных моделях с трилинейным взаимодействием:

T. Nieuwenhuis and J.A. Tjon: Phys.Rev.Lett. 77 (1996) 814

S. Ahlig and R. Alkofer: Annals Phys. 275 (1999) 113

V. Sauli: J.Phys. A36 (2003) 8703

K. Barro-Bergflodt et al: Few Body Syst. (2006) 193

C.-R. Ji and Y. Tokunaga: Phys.Rev. D86 (2012) 054011

Последовательность n-частичных приближений

Система УДШ, порождаемая фунционально-дифференциальным уравнением УШД, есть бесконечный набор интегральных уравнений для n-частичных фионных функций $Z_n \equiv \delta^n Z/\delta\eta^n|_{\eta=0}$. n-ое уравнение есть $(n-1)$-ая производная функционально-дифференциального уравнения по источнику η при $\eta = 0$ и включает в себя набор фионных функций от одночастичной (пропагатора фиона) до $n+1$-частичной.

Для того, чтобы получить последовательность замкнутых систем уравнений, поступим следующим образом: мы будем называть n-частичным приближением системы УДШ систему уравнений, в которой первые $n-1$ уравнений являются точными, а в n-ом уравнении опущен член, содержащий $(n+1)$-частичную функцию. Ясно, что при $n \to \infty$ эта последовательность приближений стремится к точной системе УДШ.

Одночастичное приближение есть просто УШД при $\eta = 0$ без Z_2, и решение его есть свободный пропагатор.

2ЧП

Двухчастичное приближение (2ЧП) есть система уравнений

$$(\bar{m}^2 - \partial_x^2)\Delta(x-y) = \delta(x-y) + g^2 D_c(x-x_1)\cdot Z_2\begin{pmatrix} x & y \\ x_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

$$(\bar{m}^2 - \partial_x^2)Z_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} - g^2 D_c(x-x_1)\cdot Z_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}\Delta(x-y) =$$

$$= \delta(x-y')\Delta(x'-y).$$

Для сравнения: уравнения РСП для пропагатора и Z_2 в главном порядке имеют вид;

$$(\bar{m}^2 - \partial_x^2)\Delta(x-y) = \delta(x-y)$$

$$(\bar{m}^2 - \partial_x^2)Z_2\begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} - g^2 D_c(x-x_1)\cdot Z_2\begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x' & y' \end{pmatrix}\Delta(x-y) =$$

$$= \delta(x-y')\Delta(x'-y).$$

2ЧП

В рамках 2ЧП функцию Z_2 можно выразить как функционал от Δ:

$$Z_2 \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = \Delta_c(x - y')\Delta(x' - y) +$$

$$+\Delta_c(x - x_1)\Delta(x' - x_2) \cdot f(x_1 - x_2) \cdot \Delta(x_1 - y)\Delta_c(x_2 - y'),$$

где

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{g^2} D_c^{-1}(x) - L(x)$$

и

$$L(x) = \Delta_c(x)\Delta(-x).$$

Система уравнений 2ЧП для пропагаторов

Система уравнений для пропагаторов хиона и фиона:

$$D^{-1}(p^2) = \mu^2 + p^2 - g^2 L(p^2)$$

$$\Delta^{-1}(p^2) = \bar{m}^2 + p^2 - g^2 K(p^2)$$

где

$$L(p^2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_c(p+q)\Delta(q), \quad K(p^2) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \Delta_c(p-q) D(q).$$

Система перенормированных уравнений:

$$D_r^{-1}(p^2) = \mu_r^2 + p^2 - g^2 L_r(p^2)$$

$$\Delta_r^{-1}(p^2) = m_r^2 + p^2 - g^2 K_r(p^2),$$

где

$$L_r = L(p^2) - L(0) - p^2 L'(0), \; K_r = K(p^2) - K(0) - p^2 K'(0).$$

Приближение безмассового интегрирования

При исследовании асимптотического поведения решений уравнений 2ЧП в глубоко-евклидовой области можно сделать приближение, существенно упрощающее вычисления, а именно, заменить под интегралом Δ_c на асимптотику при $p^2 \to \infty$, т.е. на безмассовый пропагатор $1/p^2$. Использование известной формулы

$$\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \, \frac{\Phi(q^2)}{(p-q)^2} = \frac{1}{16\pi^2}\left[\frac{1}{p^2}\int_0^{p^2} \Phi(q^2)\, q^2\, dq^2 + \int_{p^2}^{\infty} \Phi(q^2)\, dq^2\right]$$

дает нам тогда систему уравнений 2ЧП в приближении безмассового интегрирования

$$\Delta^{-1}(p^2) = m^2 + (1 - \frac{g^2}{32\pi^2\mu^2})p^2 + \frac{g^2}{16\pi^2}\int_0^{p^2} dq^2 D(q^2)(1 - \frac{q^2}{p^2})$$

$$D^{-1}(p^2) = \mu^2 + (1 - \frac{g^2}{32\pi^2 m^2})p^2 + \frac{g^2}{16\pi^2}\int_0^{p^2} dq^2 \Delta(q^2)(1 - \frac{q^2}{p^2})$$

Здесь и всюду в дальнейшем мы опускаем индекс r, имея в виду, что все величины являются перенормированными.

Безразмерные переменные

Система уравнений 2ЧП симметрична относительно замены

$$\Delta \longleftrightarrow D, \; m^2 \longleftrightarrow \mu^2.$$

С учетом этой симметрии введем безразмерные величины:

$$u = \frac{\Delta^{-1}}{m^2}, \; v = \frac{D^{-1}}{\mu^2}, \; t = \frac{p^2}{\mu m}, \; t' = \frac{q^2}{\mu m}, \; \lambda = \frac{g^2}{32\pi^2 \mu m}.$$

(Здесь $m \equiv \sqrt{m^2}$, $\mu \equiv \sqrt{\mu^2}$.) В терминах этих величин, система уравнений 2ЧП принимает вид

$$u(t) = (\frac{\mu}{m} - \lambda)t + 1 + 2\lambda \int_0^t \frac{dt'}{v(t')}(1 - \frac{t'}{t})$$

$$v(t) = (\frac{m}{\mu} - \lambda)t + 1 + 2\lambda \int_0^t \frac{dt'}{u(t')}(1 - \frac{t'}{t})$$

Дифференциальные уравнения

Условия нормировки для безразмерных величин имеют вид

$$u(0) = v(0) = 1; \quad \dot{u}(0) = \frac{\mu}{m}, \; \dot{v}(0) = \frac{m}{\mu}.$$

Из системы интегральных уравнений легко получить систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$(\ddot{tu}) = 2(\frac{\mu}{m} - \lambda) + \frac{2\lambda}{v}$$

$$(\ddot{tv}) = 2(\frac{m}{\mu} - \lambda) + \frac{2\lambda}{u}$$

для которой граничными условиями являются условия нормировки.

Слабая связь

Слабая связь: $\frac{g^2}{32\pi^2} < \min\{\mu^2, m^2\}$ $(\lambda < \min\{\frac{\mu}{m}, \frac{m}{\mu}\})$.

Асимптотическое поведение в глубоко-евклидовой области $(t \to \infty)$:

$$u = (\frac{\mu}{m} - \lambda)t + O(\log t)$$

$$v = (\frac{m}{\mu} - \lambda)t + O(\log t)$$

Такое асимптотическое поведение является самосогласованным в области слабой связи при и соответствует асимптотически свободному поведению пропагаторов

$$\Delta \sim 1/p^2, \; D \sim 1/p^2.$$

$\mu^2 = m^2$

Вне области слабой связи нужно различать случаи $\mu^2 = m^2$ и $\mu^2 \neq m^2$.

При $\mu^2 = m^2$ система уравнений принимает вид:

$$u = (1-\lambda)t + 1 + 2\lambda \int_0^t \frac{dt'}{v(t')}(1 - \frac{t'}{t})$$

$$v = (1-\lambda)t + 1 + 2\lambda \int_0^t \frac{dt'}{u(t')}(1 - \frac{t'}{t})$$

Итерационное решение этой системы дает нам $u^{(n)} = v^{(n)}$, следовательно $u = v$ (при условии сходимости процедуры итераций). При $u = v$:

$$u = (1-\lambda)t + 1 + 2\lambda \int_0^t \frac{dt'}{u(t')}(1 - \frac{t'}{t}).$$

$\mu^2 = m^2$: сильная связь

В области сильной связи $\lambda > 1$ соответствующее дифференциальное уравнение

$$(t\ddot{u}) = 2(1-\lambda) + \frac{2\lambda}{u}$$

имеет положительное точное решение

$$u_{exact} = u_0 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

u_0 является решением интегрального уравнения

$$u_0 = (1-\lambda)t + \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}} + 2\lambda \int_0^t \frac{dt'}{u_0}(1 - \frac{t'}{t}).$$

$\mu^2 = m^2$: сильная связь

Линеаризация:

$$u = u_0 + u_1, \quad \frac{1}{u} \simeq \frac{1}{u_0} - \frac{u_1}{u_0^2},$$

получим для u_1 линейное дифференциальное уравнение

$$(t\ddot{u}_1) = -a^2 u_1,$$

где $a^2 = \frac{2(\lambda-1)^2}{\lambda}$, решение которого есть

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\Big(A_1 J_1(2a\sqrt{t}) + A_2 Y_1(2a\sqrt{t})\Big) = o(1).$$

Здесь J_1 и Y_1 – цилиндрические функции.

$\mu^2 = m^2:\ \lambda = 1$

При критическом значении константы связи $\lambda = 1$ дифференциальное уравнение имеет точное решение

$$u_{exact} = \bar{u} = \sqrt{\frac{8t}{3}}.$$

Линеаризация:

$$u = \bar{u} + u_1,\ \frac{1}{u} \simeq \frac{1}{\bar{u}} - \frac{u_1}{\bar{u}^2}.$$

Линеаризованное дифференциальное уравнение для u_1 при $\lambda = 1$:

$$(t\ddot{u}_1) = -\frac{3}{4t}u_1.$$

Решение:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(A_1 \sin\frac{\log t}{\sqrt{2}} + A_2 \cos\frac{\log t}{\sqrt{2}}\right) = o(\bar{u}).$$

$\mu^2 = m^2$

Таким образом, при $\mu^2 = m^2$:

В области сильной связи $\frac{g^2}{32\pi^2} > m^2$:

$$D = \Delta \sim const$$

В критической точке $\frac{g^2}{32\pi^2} = m^2$:

$$D = \Delta \sim 1/\sqrt{p^2}$$

при $p^2 \to \infty$.

$\mu^2 \neq m^2$: сильная связь

При $\mu^2 \neq m^2$ существуют два критических значения связи:

$$\lambda_{c1} = \min\{\frac{\mu}{m}, \frac{m}{\mu}\} \text{ и } \lambda_{c2} = \max\{\frac{\mu}{m}, \frac{m}{\mu}\},$$

т.е. область слабой связи $\lambda < \lambda_{c1}$ отделена от области сильной связи $\lambda > \lambda_{c2}$ полосой промежуточной связи $\lambda_{c1} \leq \lambda \leq \lambda_{c2}$.

В области сильной связи $\lambda > \lambda_{c2} = \max\{\frac{\mu}{m}, \frac{m}{\mu}\}$ система дифференциальных уравнений имеет положительное точное решение

$$u_{exact} = u_0 = \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu - m}, \; v_{exact} = v_0 = \frac{\lambda m}{\lambda m - \mu}.$$

$\mu^2 \neq m^2$: сильная связь

$\{u_0, v_0\}$ есть решение системы интегральных уравнений

$$u_0 = (\frac{\mu}{m} - \lambda)t + \frac{1}{1 - \frac{m}{\lambda\mu}} + 2\lambda \int_0^t \frac{dt'}{v_0}(1 - \frac{t'}{t})$$

$$v_0 = (\frac{m}{\mu} - \lambda)t + \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\lambda m}} + 2\lambda \int_0^t \frac{dt'}{u_0}(1 - \frac{t'}{t})$$

Линеаризация системы дифференциальных уравнений, полностью аналогичная линеаризации соответствующего уравнения при $\mu^2 = m^2$ приводит к линейным уравнениям, решение которых, также как и для случая $\mu^2 = m^2$, выражается через цилиндрические функции и имеет порядок $o(1)$ в области больших t, что подтверждает вывод о том, что $\{u_0, v_0\}$ есть главная асимптотика решения.

$\mu^2 \neq m^2: \ \lambda = \min\{\frac{\mu}{m}, \frac{m}{\mu}\}$

При $\lambda = \lambda_{c1} = \min\{\frac{\mu}{m}, \frac{m}{\mu}\}$, как и в области слабой связи, существует самосогласованное решение.

Если $\mu > m$, то $\lambda_{c1} = m/\mu$, и в области больших t это решение имеет вид

$$u \simeq \frac{\mu^2 - m^2}{\mu m} t, \ v \simeq \frac{2m^2}{\mu^2 - m^2} \log t.$$

Если $\mu < m$, то $\lambda_{c1} = \mu/m$, и в области больших t это решение имеет вид

$$u \simeq \frac{2\mu^2}{m^2 - \mu^2} \log t, \ v \simeq \frac{m^2 - \mu^2}{\mu m} t.$$

$\mu^2 \neq m^2$: промежуточная связь

В области промежуточной связи

$$\lambda_{c1} < \lambda \leq \lambda_{c2}$$

$$(\lambda_{c1} = \min\{\frac{\mu}{m}, \frac{m}{\mu}\}, \ \lambda_{c2} = \max\{\frac{\mu}{m}, \frac{m}{\mu}\})$$

самосогласованных решений не существует: либо u, либо v содержат сингулярность Ландау.

Заключение

Для модели с взаимодействием $g\phi^*\phi\chi$ в двухчастичном приближении системы уравнений Дайсона-Швингера происходит разделение области значений константы связи на три интервала:

1. Область слабой связи $g^2 \leq g_{c1}^2$ с асимптотически свободным поведением пропагаторов полей в ультрафиолетовой области.

2. Область промежуточной связи $g_{c1}^2 < g^2 \leq g_{c2}^2$, в которой не существует самосогласованных решений без сингулярностей Ландау. При равных массах эта область вырождается в точку $g^2 = g_c^2$, в которой пропагаторы обладают самосогласованным поведением $1/\sqrt{p^2}$ ("фермионо-подобное" поведение).

Заключение

3. Область сильной связи $g^2 > g_{c2}^2$, в которой асимптотики пропагаторов есть положительные константы
– поведение ультралокального типа.

Ультралокальное приближение в КТП: $m^2 - \partial^2 \to m^2$:

E.R. Caianiello and G. Scarpetta: Nuovo Cim. A22 (1974) 448

R.J. Rivers: "Path Integral Methods in Quantum Field Theory", Cambridge, 1987

N.F. Svaiter: Physica A345 (2005) 517