Анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально симметричного незаряженного гравитационного поля

М.В.Горбатенко, В.П.Незнамов

Arxiv: 1404.2085

1. ВВЕДЕНИЕ

Широко известным решением общей теории относительности (ОТО) для точечного центрально симметричного незаряженного гравитационного поля является метрика Шварцшильда [1].

Классическое решение Шварцшильда характеризуется точечным сферически симметричным источником гравитационного поля массой M и «горизонтом событий» (гравитационным радиусом)

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}. \qquad (1)$$

В формуле (1) G - гравитационная постоянная, c - скорость света. В классическом случае с точки зрения удаленного наблюдателя пробная частица достигает «горизонта событий» за бесконечное время.

Существует ряд других метрик, полученных координатными преобразованиями метрики Шварцшильда и являющихся также точными решениями ОТО.

Можно отметить следующие решения: метрика Шварцшильда в изотропных координатах [2], метрика Шварцшильда в гармонических координатах [3], метрика Леметра-Финкельштейна [4], [5], метрика Крускала [6], [7], метрика Эддингтона-Финкельштейна [8], [5], метрика Пенлеви-Гуллстранда [9], [10].

В данной работе проводится анализ квантово-механической эквивалентности вышеприведенных центрально симметричных решений уравнений ОТО, полученных координатными преобразованиями метрики Шварцшильда [1]. Для каждой метрики анализу подвергаются дираковские самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций. Исследуются области определения волновых функций, эрмитовость гамильтонианов и возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

Для каждой метрики гамильтонианы получены как непосредственно с тетрадами в калибровке Швингера [14], так и с помощью преобразований самосопряженного гамильтониана в гравитационном поле Шварцшильда [1].

2. МЕТОДОЛОГИЯ АНАЛИЗА КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЦЕНТРАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОТО

2.1. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА

Предполагается, что движение частицы со спином ½ во внешнем гравитационном поле описывается ковариантным уравнением Дирака. В системе единиц $\hbar = c = 1$ оно имеет вид

$$\gamma^{\alpha}\nabla_{\alpha}\psi - m\psi = 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Здесь m - масса частицы, ψ представляет собой четырехкомпонентный биспинор, ∇_{α} - ковариантная производная, γ^{α} - мировые 4x4 дираковские матрицы, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta} + \gamma^{\beta}\gamma^{\alpha} = 2g^{\alpha\beta}E. \qquad \textbf{(3)}$$

В последующем, наряду с матрицами Дирака γ^{α} с мировым индексами, мы будем использовать матрицы Дирака $\gamma^{\underline{\alpha}}$ с локальным индексами, удовлетворяющие соотношению

$$\gamma^{\underline{\alpha}}\gamma^{\underline{\beta}}+\gamma^{\underline{\beta}}\gamma^{\underline{\alpha}}=2\eta^{\underline{\alpha\beta}}E. \qquad \textbf{(4)}$$

В (4) $\eta^{\underline{\alpha\beta}}$ соответствует метрическому тензору плоского пространств Минковского с сигнатурой

$$\eta_{\underline{\alpha\beta}}=diag\left[1,-1,-1,-1\right]. \qquad \textbf{(5)}$$

Ковариантная производная биспинора $\nabla_\alpha \psi$ в (2) равна

$$\nabla_\alpha \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + \Phi_\alpha \psi. \qquad \textbf{(8)}$$

В (8) для определения биспинорных связностей Φ_α необходим выбор определенной системы тетрадных векторов $H^\mu_{\underline{\alpha}}$, удовлетворяющих соотношениям

$$H^\mu_{\underline{\alpha}} H^\nu_{\underline{\beta}} g_{\mu\nu} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \qquad \textbf{(9)}$$

При выборе системы тетрадных векторов биспинорные связности определяются с помощью кристоффельных производных от тетрадных векторов

$$\Phi_{\alpha} = -\frac{1}{4} H^{\underline{\varepsilon}}_{\mu} H_{\nu\underline{\varepsilon};\alpha} S^{\mu\nu} = \frac{1}{4} H^{\varepsilon}_{\underline{\mu}} H_{\underline{\nu}\varepsilon;\alpha} S^{\underline{\mu\nu}};\ S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right). \quad \textbf{(10)}$$

Связь между γ^{α} и $\gamma^{\underline{\alpha}}$ определяется соотношением

$$\gamma^{\alpha} = H^{\alpha}_{\underline{\beta}} \gamma^{\underline{\beta}}. \qquad \textbf{(11)}$$

При координатных преобразованиях

$$\left\{x^{\alpha}\right\} \to \left\{x'^{\alpha}\right\} \qquad \textbf{(12)}$$

выполняются следующие соотношения

$$\gamma'^{\alpha} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \gamma^{\beta}, \qquad \textbf{(13)}$$

$$\Phi'_{\alpha} = \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \Phi_{\beta}. \qquad \textbf{(14)}$$

Две произвольные системы тетрадных векторов в одном и том же пространстве-времени связаны друг с другом преобразованием Лоренца $L(x)$

$$\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}(x) = \Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(x) H_{\underline{\beta}}^{\mu}(x). \qquad \textbf{(15)}$$

Величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x)\Lambda_{\underline{\beta}}^{\underline{\nu}}(x)\eta^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \eta^{\underline{\mu}\underline{\nu}},$$

$$\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\mu}}(x)\Lambda_{\underline{\beta}}^{\underline{\nu}}(x)\eta_{\underline{\mu}\underline{\nu}} = \eta_{\underline{\alpha}\underline{\beta}}. \qquad \textbf{(16)}$$

Введенный математический аппарат обеспечивает ковариантность уравнения Дирака (2) как при координатных преобразованиях (12), так и при переходе от одной системы тетрадных векторов к другой (15).

2.2. РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Для полного применения аппарата квантовой механики целесообразен переход от уравнения Дирака (2) к уравнению типа Шредингера с выделением производной волновой функции от времени.

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi. \qquad \textbf{(17)}$$

В левой части (17) $t = x^0$; в правой части (17) H является оператором Гамильтона.

Учитывая (8) и равенство $\gamma^0\gamma^0 = g^{00}$, из уравнения (2) можно получить выражение для гамильтониана

$$H = \frac{m}{g^{00}}\gamma^0 - \frac{1}{g^{00}}i\gamma^0\gamma^k\frac{\partial}{\partial x^k} - i\Phi_0 - \frac{1}{g^{00}}i\gamma^0\gamma^k\Phi_k. \qquad \textbf{(18)}$$

В работе [12] показано, что в одном и том же пространстве-времени с помощью преобразования Лоренца $L(x)$ можно от любой системы тетрадных векторов $\left\{H^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ перейти к системе тетрадных векторов $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$ в калибровке Швингера [14].

Для системы $\left\{\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}(x)\right\}$

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \sqrt{g^{00}};\quad \tilde{H}^{k}_{\underline{0}} = -\frac{g^{0k}}{\sqrt{g^{00}}};\qquad \tilde{H}^{0}_{\underline{k}} = 0. \tag{19}$$

Пространственные тетрады, удовлетворяющие соотношениям, написанным ниже, могут быть использованы в качестве тетрадных векторов $\tilde{H}^{n}_{\underline{m}}$:

$$\tilde{H}^{m}_{\underline{k}}\tilde{H}^{n}_{\underline{k}} = f^{mn};\quad f^{mn} = g^{mn} + \frac{g^{om}g^{0n}}{g^{00}};\quad f^{mn}g_{nk} = \delta^{m}_{k}. \tag{20}$$

Матрица преобразования Лоренца имеет вид

$$L(x) = \mathrm{R}\exp\left\{\frac{\theta}{2}\frac{\tilde{H}_{\underline{0}}^{\mu}H_{\underline{0}}^{\nu}S_{\mu\nu}}{\sqrt{\left(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\varepsilon}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)^2-1}}\right\}. \qquad \textbf{(21)}$$

В (21) R **представляет матрицу пространственного вращения, коммутирующую с** γ^0**. Второй множитель представляет преобразование гиперболического вращения (boost) на угол** θ**, определяемый из соотношения**

$$\mathrm{th}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\left(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\varepsilon}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)+1}{\left(\tilde{H}_{\underline{0}}^{\varepsilon}H_{\underline{0}\varepsilon}\right)-1}}. \qquad \textbf{(22)}$$

Матрица L **преобразует** $\gamma^0(x)$ **в диагональный вид**

$$L\gamma^0L^{-1} = \sqrt{g^{00}}\gamma^{\underline{0}}. \qquad \textbf{(23)}$$

2.3. УСЛОВИЕ ЭРМИТОВОСТИ ДЛЯ ГАМИЛЬТОНИАНОВ И ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

В работе [12] показано, что стационарные дираковские гамильтонианы во внешнем гравитационном поле являются псевдоэрмитовыми и удовлетворяют условию псевдоэрмитовой квантовой механики [15] – [17].

$$H^{+} = \rho H \rho^{-1}. \quad \textbf{(24)}$$

Оператор ρ в (24) является весовым оператором Паркера [18]

$$\rho = \sqrt{-g}\,\gamma^{\underline{0}}\gamma^{0}. \quad \textbf{(25)}$$

В (25) g - детерминант метрики $g_{\mu\nu}$.

Для тетрадных векторов в калибровке Швингера

$$\rho = \sqrt{-g}\sqrt{g^{00}}. \quad \textbf{(26)}$$

Скалярное произведение волновых функций с оператором ρ имеет вид

$$(\Phi, \Psi) = \int \psi^{+}(x)\rho(x)\psi(x)d^{3}x. \quad \textbf{(27)}$$

Общее условие эрмитовости дираковских гамильтонианов во внешних гравитационных полях $(\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)$ можно записать в виде [11]

$$\oint ds_k\left(\sqrt{-g}\,j^k\right) + \int d^3x\sqrt{-g}\left[\psi^+\gamma^{\underline{0}}\left(\gamma^0_{,0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \;\; 0 \end{pmatrix}\gamma^0\right)\psi + \begin{pmatrix} k \\ k \;\; 0 \end{pmatrix} j^0\right] = 0. \quad \textbf{(28)}$$

В (28) компоненты тока j^μ определены в виде

$$j^\mu = \psi^+\gamma^{\underline{0}}\gamma^\mu\psi. \quad \textbf{(29)}$$

Для не зависящих от времени гамильтонианов $\gamma^0_{,0} \equiv \dfrac{\partial\gamma^0}{\partial x^0} = 0$, символы Кристоффеля $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \;\; 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ k \;\; 0 \end{pmatrix}$ для центрально симметричных полей равны нулю и условие (28) становится равным

$$\oint ds_k\left(\sqrt{-g}\,j^k\right) = 0. \quad \textbf{(30)}$$

Если существует оператор η, удовлетворяющий соотношению

$$\left(\frac{g_G}{g}\right)^{1/2}\rho=\eta^{+}\eta, \qquad \textbf{(31)}$$

то гамильтониан

$$H_\eta=\eta H\eta^{-1} \qquad \textbf{(32)}$$

будет самосопряженным

$$H_\eta^{+}=H_\eta, \qquad \textbf{(33)}$$

а скалярное произведение (27) становится плоским (без весового множителя $\rho(x)$).

При этом

$$\psi_\eta(x)=\eta\psi(x). \qquad \textbf{(34)}$$

В (31) введено обозначение $g_G=g/g_c$ [13], где g_c - детерминант, который возникает при написании элемента объема в криволинейных координатах ($g_c=1$ - для декартовых координат, $g_c=r^2$ - для цилиндрических координат, $g_c=r^4\sin^2\theta$ - для сферических координат и т.д.).

2.4. ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

При определении областей определения волновых функций будем руководствоваться выполнением условий причинности Гильберта [19], [20]

$$g < 0;\ \overset{\overset{SOS}{\downarrow}}{g_{00} > 0};\ g_{11} < 0;\ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0;\ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0. \qquad \textbf{(36)}$$

Особенно будем следить за выполнением второго неравенства $g_{00} > 0$**; все другие неравенства в (36), как правило, выполняются для известных решений ОТО.**

2.5 ИНЕРЦИАЛЬНАЯ И ВРАЩАЮЩАЯСЯ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Как пример необходимости выполнения условия $g_{00} > 0$ рассмотрим дираковские гамильтонианы в инерциальной и вращающейся системах отсчета пространства Минковского.

Для инерциальной системы отсчета $\left(x'^{\mu}\right) = \left(t', x', y', z'\right)$ гамильтониан дираковской частицы с неограниченной областью определения волновых функций имеет вид

$$H' = \gamma^0 m - i\gamma^0 \gamma^k \frac{\partial}{\partial x'^k}. \qquad (37)$$

Введем вращающуюся систему отсчета [20]

$$t = t';\; x = x'\cos\omega t + y'\sin\omega t;\; y = -x'\sin\omega t + y'\cos\omega t;\; z = z'. \qquad (38)$$

В (38) скорость вращения ω - вещественное число. Метрика Минковского в этой системе отсчета стационарна и имеет вид

$$ds^2 = \left(1 - \omega^2\left(x^2 + y^2\right)\right)dt^2 + 2\omega\left(ydx - xdy\right)dt - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (39)$$

Гамильтониан (37) в новой системе отсчета имеет вид (см., например, [21])

$$H = \gamma^0 m - i\gamma^0\gamma^k \frac{\partial}{\partial x'^k} - i\omega\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right). \qquad \textbf{(40)}$$

Область определения волновых функций гамильтониана (40) ограничивается условием $g_{00} > 0$**, что для метрики (39) сводится к условию** $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{\omega}$**. Невыполнение этого условия приводит к тому, что для расстояний** $\sqrt{x^2+y^2} > \frac{1}{\omega}$ **скорость вращения была бы больше скорости света. Таким образом, при** $g_{00} < 0$ **вращающаяся система отсчета не может быть осуществлена реальными телами [20].**

2.6. ДОРОЖНАЯ КАРТА КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭКВИВАЛЕТНОСТИ ЦЕНТРАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТО

В качестве базовой метрики рассматриваем решение Шварцшильда в координатах (t, r, θ, φ). Все другие центрально симметричные решения уравнений ОТО будут получаться соответствующими координатными преобразованиями базовой метрики.

Для каждой метрики прямым образом будут получены дираковские самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций и с тетрадами в калибровке Швингера (19), (20).

Далее для преобразованных метрик самосопряженные гамильтонианы в η-представлении и с тетрадами (19), (20) будут получены в два этапа. Первый этап – преобразование базового самосопряженного гамильтониана Шварцшильда к координатам преобразованной метрики в соответствии с (11) – (13) с сохранением тетрад базового гамильтониана, т.е. при этом преобразовании тетрады равны

$$H'^{\alpha}_{\underline{\beta}} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} H^{\mu}_{\underline{\beta}}. \tag{41}$$

При необходимости осуществляется второй этап – преобразование Лоренца (15), (16), (21), (22) для приведения полученного гамильтониана в координатах преобразованной метрики к тетрадам в калибровке Швингера.

В конце преобразований будут контролироваться область определения волновых функций, эрмитовость гамильтониана, возможность существования стационарных связанных состояний частиц с полуцелым спином в соответствующих гравитационных полях.

3. МЕТРИКА ШВАРЦШИЛЬДА В КООРДИНАТАХ (t, r, θ, φ)

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dt^2 - \frac{dr^2}{f_S} - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \quad (42)$$

В (42) $f_S = 1 - r_0/r$. Ненулевые тетрады в калибровке Швингера $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ равны

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \; \tilde{H}^1_{\underline{1}} = \sqrt{f_S}; \;\; \tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{r}; \; \tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{r\sin\theta}. \quad (43)$$

В соответствии с (11) матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \frac{1}{\sqrt{f_S}}\gamma^{\underline{0}}; \;\; \tilde{\gamma}^1 = \sqrt{f_S}\gamma^{\underline{1}}; \;\; \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}}; \;\; \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \quad (44)$$

Самосопряженный дираковский гамильтониан с тетрадами (43) имеет вид [13]

$$H_\eta = \sqrt{f_S} m\gamma^{\underline{0}} - i\sqrt{f_S}\gamma^{\underline{0}}\left\{\gamma^{\underline{1}}\sqrt{f_S}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) + \right.$$
$$\left. + \gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} - \frac{i}{2}\frac{\partial f_S}{\partial r}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}. \quad (45)$$

Область определения волновых функций уравнения Дирака с гамильтонианом (45) ограничивается условием причинности Гильберта

$$g_{00} > 0 \to f_S = 1 - \frac{r_0}{r} > 0 \to r > r_0. \qquad \textbf{(46)}$$

Из (46) следует

$\sqrt{f_S}$ **- положительное вещественное число. (47)**

Оператор преобразования η **(31) равен**

$$\eta = 1 \Big/ f_S^{1/4}. \qquad \textbf{(48)}$$

Компоненты тока

$$j^{\mu} = \psi_{\eta}^{+} \left(\eta^{-1}\right)^{+} \left(\gamma^{0} \tilde{\gamma}^{\mu}\right) \left(\eta^{-1}\right) \psi_{\eta} \qquad \textbf{(49)}$$

равны

$$j^{0} = \psi_{\eta}^{+} \psi_{\eta}, \qquad \textbf{(50)}$$

$$j^{r} = \psi_{\eta}^{+} f_S \gamma^{1} \psi_{\eta} = 0, \qquad \textbf{(51)}$$

$$j^{\theta} = \psi_{\eta}^{+} \frac{\sqrt{f_S}}{r} \gamma^{2} \psi_{\eta} = 0, \qquad \textbf{(52)}$$

$$j^{\varphi} = \psi_{\eta}^{+} \frac{\sqrt{f_S}}{r \sin\theta} \gamma^{3} \psi_{\eta}. \qquad \textbf{(53)}$$

Равенство нулю радиальной (51) и полярной (52) компонент тока обусловлено видом сферических гармоник для спина ½ (см., например, [22], [23]).

В случае метрики Шварцшильда для области определения волновых функций (46) условия эрмитовости дираковских гамильтонианов (28), (30) можно записать в виде

$$4\pi r^2 j^r(r)\Big|_{r\to\infty} + 4\pi r^2 j^r(r)\Big|_{r\to r_0} = 0, \qquad (54)$$

что с учетом (51) автоматически выполняется. Отсюда следует, что с введением физически разумного граничного условия для волновых функций на любой сферической поверхности с $r > r_0$ и отбором экспоненциально спадающих решений при $r \to \infty$ самосопряженный гамильтониан (45) будет иметь стационарный вещественный энергетический спектр связанных состояний частиц со спином ½ [24], [25].

Иногда для осуществления возможности движения частиц в поле Шварцшильда под «горизонтом событий» предлагается в метрике Шварцшильда (42) взаимно поменять местами временную и радиальную координаты [26], [27]. Тогда квадрат интервала становится равным

$$ds^2 = \frac{t}{r_0 - t} dt^2 - \frac{r_0 - t}{t} dr^2 - t^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \qquad \textbf{(55)}$$

В (55) $t \in (0, r_0), \;\; r \in (0, \infty)$**.**

Ненулевые компоненты тетрадных векторов в калибровке Швингера равны

$$\tilde{H}_{\underline{0}}^{0} = \sqrt{\frac{r_0 - t}{t}}; \;\; \tilde{H}_{\underline{1}}^{1} = \sqrt{\frac{t}{r_0 - t}}; \;\; \tilde{H}_{\underline{2}}^{2} = \frac{1}{t}; \;\; \tilde{H}_{\underline{3}}^{3} = \frac{1}{t \sin \theta}. \qquad \textbf{(56)}$$

Самосопряженный гамильтониан в η **-представлении равен**

$$\begin{aligned} H_\eta = {} & \sqrt{\frac{t}{r_0 - t}} m \gamma^{\underline{0}} - i \gamma^{\underline{0}} \gamma^{\underline{1}} \frac{t}{r_0 - t} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \\ & - i \gamma^{\underline{0}} \gamma^{\underline{2}} \sqrt{\frac{t}{r_0 - t}} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \theta \right) - i \gamma^{\underline{0}} \gamma^{\underline{3}} \sqrt{\frac{t}{r_0 - t}} \frac{1}{t \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \qquad \textbf{(57)}$$

Область определения волновых функций гамильтониана (57) ограничена условием причинности Гильберта $g_{00} > 0$, т.е.

$$t < r_0. \qquad (58)$$

Гамильтониан (57) явно зависит от времени и физически неэквивалентен стационарному гамильтониану (45) с областью определения волновых функций $r > r_0$. Условие Гильберта $g_{00} \neq 0$ не позволяет «сшивать» волновые функции на «горизонте событий» $r = r_0$.

Далее мы будем рассматривать преобразования гамильтониана (45) с областью определения волновых функций $r > r_0$ и с вещественными положительными значениями $\sqrt{f_S}$.

4. МЕТРИКИ ШВАРЦШИЛЬДА В ИЗОТРОПНЫХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

4.1 РЕШЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДА В ИЗОТРОПНЫХ КООРДИНАТАХ

Координаты

$$(t, R, \theta, \varphi). \qquad \textbf{(59)}$$

Координатное преобразование

$$r = R\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2; \quad dR = dr \Big/ \left(1 - \frac{r_0^2}{16R^2}\right). \qquad \textbf{(60)}$$

$$SOS: \quad R = \frac{1}{2}\left[\left(r - \frac{r_0}{2}\right) \pm \sqrt{r\left(r - r_0\right)}\right]$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = V^2(R)dt^2 - W^2(R)\left[dR^2 + R^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]. \qquad \textbf{(61)}$$

Здесь

$$V(R) = \left(1 - \frac{r_0}{4R}\right) \Big/ \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right), \quad W(R) = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2. \qquad \textbf{(62)}$$

Величины $(-g)$, g_G **и** η **равны**

$$-g = V^2 \cdot W^6 \cdot R^4 \sin^2\theta = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^6 R^4 \sin^2\theta, \qquad \textbf{(63)}$$

$$g_G = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^6, \qquad \textbf{(64)}$$

$$\eta = \left(g_G\right)^{1/4}\left(g^{00}\right)^{1/4} = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^2 \Big/ \left(1 - \frac{r_0}{4R}\right)^{1/2}. \qquad \textbf{(65)}$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \frac{1+\frac{r_0}{4R}}{1-\frac{r_0}{4R}}; \quad \tilde{H}^{1}_{\underline{1}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}; \quad \tilde{H}^{2}_{\underline{2}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\frac{1}{R}; \quad \tilde{H}^{3}_{\underline{3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\frac{1}{R\sin\theta}. \qquad \textbf{(66)}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^{0} = \frac{1+\frac{r_0}{4R}}{1-\frac{r_0}{4R}}\gamma^{\underline{0}}; \quad \tilde{\gamma}^{1} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{1}}; \quad \tilde{\gamma}^{2} = \frac{1}{R\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{2}}; \quad \tilde{\gamma}^{3} = \frac{1}{R\sin\theta\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^2}\gamma^{\underline{3}}. \qquad \textbf{(67)}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (66) равен

$$H_{\eta} = \frac{1-\frac{r_0}{4R}}{1+\frac{r_0}{4R}} m\gamma^{\underline{0}} - i\frac{1-\frac{r_0}{4R}}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^3}\gamma^{\underline{0}}\left[\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R}\right)+\right.$$

$$\left. +\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\theta\right)+\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right] - \frac{i}{2}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{\partial}{\partial R}\frac{1-\frac{r_0}{4R}}{\left(1+\frac{r_0}{4R}\right)^3}. \qquad \textbf{(68)}$$

Компоненты тока

$$j^{\mu} = \psi_{\eta}^{+} \left(\eta^{-1}\right)^{+} \gamma^{\underline{0}} \tilde{\gamma}^{\mu} \left(\eta^{-1}\right) \psi_{\eta} \qquad \textbf{(69)}$$

равны

$$j^{0} = \psi_{\eta}^{+} \left(1 \Big/ \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^{3} \right) \psi_{\eta}, \qquad \textbf{(70)}$$

$$j^{r} = j^{\theta} = 0, \qquad \textbf{(71)}$$

$$j^{\varphi} = \psi_{\eta}^{+} \left(\left(1 - \frac{r_0}{4R}\right) \Big/ \left(\left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^{6} R \sin\theta \right) \right) \gamma^{\underline{0}} \gamma^{\underline{3}} \psi_{\eta}. \qquad \textbf{(72)}$$

Получим теперь гамильтониан (68) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43).

При координатном преобразовании (60) тетрады (43) преобразуются в соответствии с (41).

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{is} = \frac{\partial t}{\partial t} \left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_{S} = 1 \Big/ \sqrt{f_S} = \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right) \Big/ \left(1 - \frac{r_0}{4R}\right); \qquad \textbf{(73)}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{is} = \frac{\partial R}{\partial r} \left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} = \sqrt{f_S} \Big/ \left(1 - \frac{r_0^2}{16R^2}\right) = 1 \Big/ \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^{2}; \qquad \textbf{(74)}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{is} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_{S} = 1/r = 1 \Big/ \left(R \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^{2} \right); \qquad \textbf{(75)}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{is} = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_{S} = 1/(r \sin\theta) = 1 \Big/ \left(R \sin\theta \left(1 + \frac{r_0}{4R}\right)^{2} \right). \qquad \textbf{(76)}$$

Преобразованные тетрады совпадают с тетрадами в калибровке Швингера (66) для метрики Шварцшильда в изотропных координатах. В соответствии с (35) гамильтониан с тетрадами (73) – (76) будет совпадать с гамильтонианом (68).

Обратим внимание, что при определении тетрады $\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{is}$ (73) для сохранения условия положительности $\sqrt{f_S}$ (47) необходимо выполнение условия $R > r_0/4$.

Таким образом, несмотря на то, что в преобразованной метрике условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ выполняется для интервала $R \in (0, \infty)$, за исключением единственной точки $R = r_0/4$, введенные ограничения на область определения волновых функций в гамильтониане (45) с базовой метрикой Шварцшильда продолжают действовать в новых переменных для области определения преобразованного гамильтониана (68). Область определения волновых функций уравнения Дирака с метрикой Шварцшильда в изотропных координатах равна

$$R > r_0/4. \quad (77)$$

4.2 РЕШЕНИЕ ШВАРЦШИЛЬДА В СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Координаты

$$(t, R, \theta, \varphi). \qquad \textbf{(78)}$$

Координатное преобразование

$$r = R + (r_0/2); \quad dr = dR. \qquad \textbf{(79)}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = \left(\left(1 - \frac{r_0}{2R}\right) \Big/ \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)\right) dt^2 - \left(\left(1 + \frac{r_0}{2R}\right) \Big/ \left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)\right) dR^2 - \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^2 R^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad \textbf{(80)}$$

Величины $(-g)$, g_G **и** η **равны**

$$-g = \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^4 R^4 \sin^2\theta, \qquad \textbf{(81)}$$

$$g_G = \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^4, \qquad \textbf{(82)}$$

$$\eta = (g_G)^{1/4} (g^{00})^{1/4} = \left(1 + \frac{r_0}{2R}\right)^{5/4} \Big/ \left(1 - \frac{r_0}{2R}\right)^{1/4} \qquad \textbf{(83)}$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}} = \sqrt{\frac{1+\frac{r_0}{2R}}{1-\frac{r_0}{2R}}};\ \tilde{H}^{1}_{\underline{1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{2R}}{1+\frac{r_0}{2R}}};\ \ \tilde{H}^{2}_{\underline{2}} = \frac{1}{R\left(1+\frac{r_0}{2R}\right)};\ \ \tilde{H}^{3}_{\underline{3}} = \frac{1}{R\sin\theta\left(1+\frac{r_0}{2R}\right)}. \qquad \textbf{(84)}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^{0} = \sqrt{\frac{1+\frac{r_0}{2R}}{1-\frac{r_0}{2R}}}\gamma^{\underline{0}};\ \ \tilde{\gamma}^{1} = \sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{2R}}{1+\frac{r_0}{2R}}}\gamma^{\underline{1}};\ \ \tilde{\gamma}^{2} = \frac{1}{R\left(1+\frac{r_0}{2R}\right)}\gamma^{\underline{2}};\ \ \tilde{\gamma}^{3} = \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{2R}\right)R\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \qquad \textbf{(85)}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (84) равен

$$H_{\eta} = \sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{2R}}{1+\frac{r_0}{2R}}}m\gamma^{\underline{0}} - i\frac{1-\frac{r_0}{2R}}{1+\frac{r_0}{2R}}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R}\right) -$$

$$-i\sqrt{\frac{1-\frac{r_0}{2R}}{1+\frac{r_0}{2R}}}\frac{1}{1+\frac{r_0}{2R}}\left[\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{R}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\,\theta\right)+\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right] - \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1-\frac{r_0}{2R}}{1+\frac{r_0}{2R}}\right). \qquad \textbf{(86)}$$

Компоненты тока (69) для рассматриваемого случая равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \left(1 \Big/ \left(1 + \frac{r_0}{2R} \right)^2 \right) \psi_\eta, \qquad \textbf{(87)}$$

$$j^r = j^\theta = 0, \qquad \textbf{(88)}$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \left(\left(1 - \frac{r_0}{2R} \right)^{1/2} \Big/ \left(\left(1 + \frac{r_0}{2R} \right)^{7/2} R \sin\theta \right) \right) \gamma^0 \gamma^3 \psi_\eta . \qquad \textbf{(89)}$$

При координатном преобразовании (79) тетрады (84) преобразуются в соответствии с (41)

$$\left(H'^0_{\underline{0}} \right)_{gr} = \frac{\partial t}{\partial t} \left(H^0_{\underline{0}} \right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}} = \sqrt{\left(1 + \frac{r_0}{2R} \Big/ 1 - \frac{r_0}{2R} \right)}; \qquad \textbf{(90)}$$

$$\left(H'^1_{\underline{1}} \right)_{gr} = \frac{\partial R}{\partial r} \left(H^1_{\underline{1}} \right)_S = \sqrt{f_S} = \sqrt{\left(1 - \frac{r_0}{2R} \Big/ 1 + \frac{r_0}{2R} \right)}; \qquad \textbf{(91)}$$

$$\left(H'^2_{\underline{2}} \right)_{gr} = \left(H^2_{\underline{2}} \right)_S = \frac{1}{r} = \left(1 \Big/ \left(R \left(1 + \frac{r_0}{2R} \right) \right) \right); \qquad \textbf{(92)}$$

$$\left(H'^3_{\underline{3}} \right)_{gr} = \left(H^3_{\underline{3}} \right)_S = 1/(r \sin\theta) = 1 \Big/ \left(R \sin\theta \left(1 + \frac{r_0}{2R} \right) \right). \qquad \textbf{(93)}$$

Преобразованные тетрады (90) – (93) совпадают с тетрадами в калибровке Швингера (84) для метрики Шварцшильда в сферических гармонических координатах. В соответствии с (35) гамильтониан с тетрадами (90) – (93) будет совпадать с гамильтонианом (86).

Так же как и для метрики в изотропных координатах (см. п.4.1) при определении тетрад $\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{gr}$ (90) и $\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{gr}$ (91) для сохранения условия вещественности f_S (47) необходимо выполнение условия $R > r_0/2$. Это же следует из условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для рассматриваемой метрики (80).

Приведенное в п.4.1, 4.2 рассмотрение показывает, что самосопряженные гамильтонианы для метрик Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах (68), (86) эквивалентны базовому гамильтониану (45) за исключением изменения области определения волновых функций $R > r_0/4$ для метрики (68) и $R > r_0/2$ для метрики (86). Эти изменения обязаны координатным преобразованиям (60), (79).

Для всех трех гамильтонианов (45), (68), (86) выполняется условие эрмитовости (28), (54) при соответствующем переопределении «горизонтов событий»: r_0 - метрика Шварцшильда (42); $r_0/2$ - метрика Шварцшильда в гармонических координатах (80); $r_0/4$ - метрика Шварцшильда в изотропных координатах (61), (62).

5. МЕТРИКИ ЭДДИНГТОНА-ФИНКЕЛЬШТЕЙНА И ПЕНЛЕВИ-ГУЛЛСТРАНДА

5.1 РЕШЕНИЕ ЭДДИНГТОНА-ФИНКЕЛЬШТЕЙНА

Координаты

$$(T,r,\theta,\varphi). \qquad \textbf{(94)}$$

Координатное преобразование

$$dT = dt + \frac{r_0}{r}\frac{dr}{f_S}. \qquad \textbf{(95)}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dT^2 - 2\frac{r_0}{r}dTdr - \left(1+\frac{r_0}{r}\right)dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad \textbf{(96)}$$

Величины $(-g)$, g_G и η равны

$$-g = r^4 \sin^2\theta, \qquad \textbf{(97)}$$

$$g_G = 1, \qquad \textbf{(98)}$$

$$\eta = \left(1+\frac{r_0}{r}\right)^{1/4}. \qquad \textbf{(99)}$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^{0}_{\underline{0}}=\sqrt{1+\frac{r_0}{r}};\;\; \tilde{H}^{1}_{\underline{0}}=-\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}};\quad \tilde{H}^{1}_{\underline{1}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}};\;\; \tilde{H}^{2}_{\underline{2}}=\frac{1}{r};\;\; \tilde{H}^{3}_{\underline{3}}=\frac{1}{r\sin\theta}. \qquad \textbf{(100)}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^{0}=\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}\gamma^{\underline{0}};\;\; \tilde{\gamma}^{1}=-\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{0}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{1}};\quad \tilde{\gamma}^{2}=\frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}};\quad \tilde{\gamma}^{3}=\frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \qquad \textbf{(101)}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (100) равен [13]

$$H_{\eta}=\frac{m}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\gamma^{\underline{0}}-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}+\frac{r_0}{2r^2}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\right)-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right)-$$

$$-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+i\frac{r_0}{r}\frac{1}{1+\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2r\left(1+\frac{r_0}{r}\right)}\right). \qquad \textbf{(102)}$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \psi_\eta, \qquad (103)$$

$$j^r = \psi_\eta^+ \left(-\frac{\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}} + \frac{\gamma^0\gamma^1}{1+\frac{r_0}{r}} \right) \psi_\eta = \psi_\eta^+ \left(-\frac{\frac{r_0}{r}}{1+\frac{r_0}{r}} \right) \psi_\eta, \qquad (104)$$

$$j^\theta = 0, \qquad (105)$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \frac{1}{\left(1+\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} r\sin\theta} \psi_\eta. \qquad (106)$$

Получим гамильтониан (102) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43).

При координатном преобразовании (95) преобразованные в соответствии с (41) ненулевые тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{E-F} = \frac{\partial T}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \quad \textbf{(107)}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{E-F} = \frac{\partial T}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S = \frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{f_S}}; \quad \textbf{(108)}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{E-F} = \frac{\partial r}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S = \sqrt{f_S}; \quad \textbf{(109)}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{E-F} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_S = \frac{1}{r}; \quad \textbf{(110)}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{E-F} = \left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_S = \frac{1}{r\sin\theta}. \quad \textbf{(111)}$$

В результате преобразования (95) по сравнению с тетрадами (43) появилась дополнительная ненулевая тетрада $\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{E-F}$ **(108).**

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (107) – (111) к тетрадам в калибровке Швингера (100). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\beta}(r)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{0} = \Lambda_{\underline{1}}^{1} = \frac{1}{\sqrt{f_S}\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}; \quad \Lambda_{\underline{0}}^{1} = \Lambda_{\underline{1}}^{0} = -\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{f_S}\sqrt{1+\frac{r_0}{r}}}. \qquad (112)$$

После такого двухэтапного преобразования базовой гамильтониан (45) преобразуется к виду (102). При проведении преобразований в (107) – (111), (112) присутствует выражение $\sqrt{f_S} = \sqrt{1-\frac{r_0}{r}}$, которое в базовой метрике (42) является вещественным (см. (47)). Отсюда следует, что областью определения волновых функций гамильтониана (102), по-прежнему является

$$r \in (r_0, \infty). \qquad (113)$$

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Эддингтона–Финкельштейна (96) также приводит к области определения $r > r_0$.

Радиальная компонента тока (104) не равна нулю и, поэтому, для метрики Эддингтона–Финкельштейна не выполняется условие эрмитовости гамильтонианов (28), (54). Координатное преобразование (95), приводящее к новой временной координате T как функции $T(t, r)$, изменяет первоначальную эрмитовость гамильтониана (45). Самосопряженный гамильтониан (102) с областью определения волновых функций $r > r_0$ является неэрмитовым $\left((\Phi, H\Psi) \neq (H\Phi, \Psi)\right)$.

5.2 РЕШЕНИЕ ПЕНЛЕВИ-ГУЛЛСТРАНДА

Координаты

$$\left(T, r, \theta, \varphi\right). \qquad \textbf{(114)}$$

Координатное преобразование

$$dT = dt + \sqrt{\frac{r_0}{r}}\frac{1}{f_S}. \qquad \textbf{(115)}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f_S dT^2 - 2\sqrt{\frac{r_0}{r}}dTdr - dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right). \qquad \textbf{(116)}$$

Величины $\left(-g\right)$, g_G **и** η **равны**

$$-g = r^4 \sin^2\theta, \qquad \textbf{(117)}$$

$$g_G = 1, \qquad \textbf{(118)}$$

$$\eta = 1. \qquad \textbf{(119)}$$

Ненулевые тетрады $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ **в калибровке Швингера:**

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = 1;\ \tilde{H}^1_{\underline{0}} = -\sqrt{r_0/r};\quad \tilde{H}^1_{\underline{1}} = 1;\quad \tilde{H}^2_{\underline{2}} = 1/r;\quad \tilde{H}^3_{\underline{3}} = 1/\left(r\sin\theta\right). \qquad \textbf{(120)}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \gamma^{\underline{0}};\ \ \tilde{\gamma}^1 = -\sqrt{\frac{r_0}{r}}\gamma^{\underline{0}} + \gamma^{\underline{1}};\ \ \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r}\gamma^{\underline{2}};\ \ \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \quad \textbf{(121)}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (120) равен [28], [13]

$$H_\eta = \gamma^{\underline{0}} m - i\gamma^{\underline{0}}\left\{\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) + \gamma^{\underline{2}}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) + \gamma^{\underline{3}}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} + i\sqrt{\frac{r_0}{r}}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{3}{4}\frac{1}{r}\right). \quad \textbf{(122)}$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \psi_\eta, \quad \textbf{(123)}$$

$$j^r = \psi_\eta^+\left(-\sqrt{\frac{r_0}{r}} + \gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\right)\psi_\eta = \psi_\eta^+\left(-\sqrt{\frac{r_0}{r}}\right)\psi_\eta, \quad \textbf{(124)}$$

$$j^\theta = 0, \quad \textbf{(125)}$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\psi_\eta. \quad \textbf{(126)}$$

Получим гамильтониан (122) непосредственным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатном преобразовании (115) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{P-G} = \frac{\partial T}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_S = \frac{1}{\sqrt{f_S}}, \qquad \text{(127)}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{P-G} = \frac{\partial T}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S = \sqrt{\frac{r_0}{r}}\Big/\sqrt{f_S}, \qquad \text{(128)}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{P-G} = \frac{\partial r}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S = \sqrt{f_S}, \qquad \text{(129)}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{P-G} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_S = 1/r, \qquad \text{(130)}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{P-G} = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_S = 1/\left(r\sin\theta\right). \qquad \text{(131)}$$

В результате преобразования (115) по сравнению с тетрадами (43) появилась дополнительная ненулевая тетрада $\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{P-G}$ (128).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (127) – (131) к тетрадам в калибровке Швингера (120). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(r)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S}}; \quad \Lambda_{\underline{0}}^{\underline{1}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{0}} = -\frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}. \qquad (132)$$

После такого двухэтапного преобразовании базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (122).

При проведении преобразований в (127) – (129), (132) присутствует выражение $\sqrt{f_S} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$, которое в базовой метрике (42) является вещественным (см. (47)). Отсюда следует, что областью определения волновых функций гамильтониана (122) по-прежнему является

$$r \in (r_0, \infty). \qquad (133)$$

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Пенлеви-Гуллстранда (116) также приводит к области определения $r > r_0$.

Радиальная компонента тока (124) не равна нулю, и для метрики Пенлеви-Гуллстранда условие эрмитовости гамильтонианов (28), (54) не выполняется. Координатное преобразование (115), приводящее к новой временной координате T как функции $T(t,r)$, изменяет первоначальную эрмитовость гамильтониана (45). Самосопряженный гамильтониан (122) с областью определения волновых функций $r > r_0$ является неэрмитовым $\left((\Psi, H\Phi) \neq (H\Psi, \Phi)\right)$.

Проведенное рассмотрение дираковских гамильтонианов в гравитационных полях Эддингтона-Финкельштейна (96) и Пенлеви-Гуллстранда (116) показывает, что их области определения волновых функций одинаковы с областью определения волновых функций базового гамильтониана (45) в поле Шварцшильда

$$r \in (r_0, \infty).$$

Это является следствием выполнения как условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$, так и условия вещественности $\sqrt{f_S} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}$ при проведении прямых двухэтапных преобразований исходного гамильтониана (45) к виду самосопряженных гамильтонианов в η-представлении для решений Эддингтона-Финкельштейна и Пенлеви-Гуллстранда.

Расширение области определения до

$$r \in (0, \infty),$$

как это было сделано в работе [28], является неправомерным.

Для метрик Эддингтона-Финкельштейна (96) и Пенлеви-Гуллстранда (116) из-за неэрмитовости гамильтонианов (102), (122) отсутствует возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

6. МЕТРИКИ ЛЕМЕТРА-ФИНКЕЛЬШТЕЙНА И КРУСКАЛА

6.1 РЕШЕНИЕ ЛЕМЕТРА-ФИНКЕЛЬШТЕЙНА

Координаты

$$(T, R, \theta, \varphi). \tag{134}$$

Координатные преобразования

$$dT = dt + \frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{f_S} dr, \quad dR = dt + \frac{dr}{f_S \sqrt{\frac{r_0}{r}}}, \tag{135}$$

$$R = T + \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{r_0^{1/2}}, \quad r = \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{2/3} r_0^{1/3}. \tag{136}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = dT^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2r_0} (R - T) \right]^{2/3}} - \left[\frac{3}{2} (R - T) \right]^{4/3} r_0^{2/3} \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \tag{137}$$

Область определения T, R **в (137):**

$$R > T. \tag{138}$$

Величины $(-g)$, g_G и η равны

$$-g = \left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^2 r_0^2 \sin^2\theta, \tag{139}$$

$$g_G = \left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^2 \frac{r_0^2}{R^4}, \tag{140}$$

$$\eta = (g_G)^{1/4}\left(g^{00}\right)^{1/4} = \left(\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^2 \frac{r_0^2}{R^4}\right)^{1/4}. \tag{141}$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}_{\underline{\alpha}}^{\mu}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}_{\underline{0}}^{0} = 1;\ \tilde{H}_{\underline{1}}^{1} = \left[\frac{3}{2r_0}(R-T)\right]^{1/3};\ \tilde{H}_{\underline{2}}^{2} = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{2/3} r_0^{1/3}};\ \tilde{H}_{\underline{3}}^{3} = \frac{1}{\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{2/3} r_0^{1/3}\sin\theta}. \tag{142}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0=\underline{\gamma}^0;\ \ \tilde{\gamma}^1=\left[\frac{3}{2r_0}(R-T)\right]^{1/3}\underline{\gamma}^1;\ \ \tilde{\gamma}^2=\frac{1}{\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{2/3}r_0^{1/3}}\underline{\gamma}^2;\ \ \tilde{\gamma}^3=\frac{1}{\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{2/3}r_0^{1/3}\sin\theta}\underline{\gamma}^3. \quad \textbf{(143)}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (142) равен [13]

$$H_\eta=\underline{\gamma}^0 m-i\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^1\left[\frac{3}{2r_0}(R-T)\right]^{1/3}\left(\frac{\partial}{\partial R}+\frac{1}{R}\right)-i\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^2\frac{1}{\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{2/3}r_0^{1/3}}\times \quad \textbf{(144)}$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right)-i\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^3\frac{1}{\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{2/3}r_0^{1/3}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{i}{2}\underline{\gamma}^0\underline{\gamma}^1\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{1/3}.$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0=\psi_\eta^+\frac{R^2}{\frac{3}{2}(R-T)r_0}\psi_\eta, \quad \textbf{(145)}$$

$$j^R=j^\theta=0, \quad \textbf{(146)}$$

$$j^\varphi=\psi_\eta^+\frac{R^2}{\left[\frac{3}{2}(R-T)\right]^{5/3}r_0^{4/3}\sin\theta}\psi_\eta. \quad \textbf{(147)}$$

Получим гамильтониан (144) двухэтапным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатных преобразованиях (135), (136) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_{L-F} = \frac{\partial T}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_{S} = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \quad \textbf{(148)}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{0}}\right)_{L-F} = \frac{\partial R}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_{S} = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \quad \textbf{(149)}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_{L-F} = \frac{\partial T}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} = \frac{\sqrt{\dfrac{r_0}{r\left(R,T\right)}}}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}}, \quad \textbf{(150)}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_{L-F} = \frac{\partial R}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_{S} = \frac{1}{\sqrt{f_S\left(R,T\right)}\sqrt{\dfrac{r_0}{r\left(R,T\right)}}}, \quad \textbf{(151)}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_{L-F} = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_{S} = \frac{1}{r\left(R,T\right)}, \quad \textbf{(152)}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_{L-F} = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_{S} = \frac{1}{r\left(R,T\right)\sin\theta}. \quad \textbf{(153)}$$

В переменных R, T согласно (136)

$$f_S(R,T) = 1 - \frac{r_0}{r(R,T)} = 1 - \left(\frac{r_0}{\frac{3}{2}(R-T)}\right)^{2/3}. \quad (154)$$

По сравнению с тетрадами (43) в результате преобразований (135) появились две дополнительные ненулевые тетрады (149), (150).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (148) – (153) к тетрадам в калибровке Швингера (142). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(R,T)$ в (15), (16) будут равны

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{1}} = \frac{1}{\sqrt{f_S(R,T)}}; \quad \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{0}}^{\underline{1}} = -\sqrt{\frac{r_0}{r(R,T)}}\frac{1}{\sqrt{f_S(R,T)}}. \quad (155)$$

После проведенного двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (144).

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Леметра-Финкельштейна (137) не накладывает ограничений на область определения волновых функций гамильтониана (144). Однако, при проведении преобразований в выражениях (148) – (151), (155) присутствует выражение $\sqrt{f_S(R,T)} = \sqrt{1 - \frac{r_0}{r(R,T)}}$, которое в базовой метрике (42) является вещественным и положительным. Отсюда следует (см. (154)), что кроме условия (138) существует дополнительное ограничение области определения волновых функций гамильтониана (144)

$$R - T > \frac{2}{3} r_0. \qquad (156)$$

С учетом равенства нулю радиальной компоненты тока j^μ, (146) гамильтониан H_η (144) является эрмитовым (см. условие эрмитовости (28), (54)).

Однако, в отличие от базового гамильтониана (45), гамильтониан (144) в переменных (R,T) явно зависит от времени, и в этих переменных отсутствует возможность определения стационарных связанных состояний дираковских частиц.

6.2 РЕШЕНИЕ КРУСКАЛА

Координаты

$$(v, u, \theta, \varphi). \tag{157}$$

Координатные преобразования

$$u = \sqrt{\frac{r_0}{r}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right),$$
$$v = \sqrt{\frac{r_0}{r}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right), \tag{158}$$

$$\frac{r_0}{r}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0} = u^2 - v^2,$$
$$\frac{t}{2r_0}\operatorname{arcth}\frac{v}{u} = \frac{1}{2}\operatorname{arcth}\frac{2uv}{u^2+v^2}, \tag{159}$$

$$du = \frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dt + \frac{1}{2r_0}\frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dr,$$
$$dv = \frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r_0}{r}}\sqrt{f_S}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{ch}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dt + \frac{1}{2r_0}\frac{\sqrt{\frac{r_0}{r}}}{\sqrt{f_S}}\exp\frac{r}{2r_0}\operatorname{sh}\left(\frac{t}{2r_0}\right)dr. \tag{160}$$

Квадрат интервала

$$ds^2 = f^2 dv^2 - f^2 du^2 - \left(r(u,v)\right)^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 d\varphi^2\right),$$

$$\left(f(u,v)\right)^2 = \frac{4r_0^3}{r(u,v)} \exp\left(-\frac{r(u,v)}{r_0}\right) = \text{функция} \quad \text{от} \quad \left(u^2 - v^2\right). \qquad \textbf{(161)}$$

Величины $(-g)$, g_G и η равны

$$-g = \left(f(u,v)\right)^4 \left(r(u,v)\right)^4 \sin^2\theta, \qquad \textbf{(162)}$$

$$g_G = \frac{\left(f(u,v)\right)^4 \left(r(u,v)\right)^4}{u^4}, \qquad \textbf{(163)}$$

$$\eta = \left(g_G \cdot g^{00}\right)^{1/4} = \left(f(u,v)\right)^{1/2} \frac{r(u,v)}{u}. \qquad \textbf{(164)}$$

Ненулевые компоненты тетрадных векторов $\tilde{H}^{\mu}_{\underline{\alpha}}$ в калибровке Швингера:

$$\tilde{H}^0_{\underline{0}} = \frac{1}{f(u,v)}; \quad \tilde{H}^1_{\underline{1}} = \frac{1}{f(u,v)}; \quad \tilde{H}^2_{\underline{2}} = \frac{1}{r(u,v)}; \quad \tilde{H}^3_{\underline{3}} = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}. \qquad \textbf{(165)}$$

Матрицы $\tilde{\gamma}^{\alpha}$ равны

$$\tilde{\gamma}^0 = \frac{1}{f}\gamma^{\underline{0}}; \quad \tilde{\gamma}^1 = \frac{1}{f}\gamma^{\underline{1}}; \quad \tilde{\gamma}^2 = \frac{1}{r(u,v)}\gamma^{\underline{2}}; \quad \tilde{\gamma}^3 = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}\gamma^{\underline{3}}. \qquad \textbf{(166)}$$

Самосопряженный гамильтониан в η-представлении с тетрадами (165) равен

$$H_\eta = \gamma^{\underline{0}} f(u,v) m - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{1}}\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u}\right) - i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{2}}\frac{f(u,v)}{r(u,v)}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\theta\right) -$$

$$-i\gamma^{\underline{0}}\gamma^{\underline{3}}\frac{f(u,v)}{r(u,v)\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}. \qquad \textbf{(167)}$$

Компоненты тока (69) равны

$$j^0 = \psi_\eta^+ \frac{u^2}{\left(f(r,v)\right)^2 \left(r(u,v)\right)^2}\psi_\eta, \qquad \textbf{(168)}$$

$$j^u = j^\theta = 0, \qquad \textbf{(169)}$$

$$j^\varphi = \psi_\eta^+ \frac{u^2}{\left(f(r,v)\right)^2 \left(r(u,v)\right)^3 \sin\theta}\gamma^{\underline{3}}\psi_\eta. \qquad \textbf{(170)}$$

Получим гамильтониан (167) двухэтапным преобразованием базового гамильтониана (45) с тетрадами (43). При координатных преобразованиях (158) – (160) ненулевые преобразованные в соответствии с (41) тетрады равны

$$\left(H'^{0}_{\underline{0}}\right)_K = \frac{\partial v}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_S = \mathrm{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \quad \textbf{(171)}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{0}}\right)_K = \frac{\partial u}{\partial t}\left(H^{0}_{\underline{0}}\right)_S = \mathrm{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \quad \textbf{(172)}$$

$$\left(H'^{0}_{\underline{1}}\right)_K = \frac{\partial v}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S = \mathrm{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}, \quad \textbf{(173)}$$

$$\left(H'^{1}_{\underline{1}}\right)_K = \frac{\partial u}{\partial r}\left(H^{1}_{\underline{1}}\right)_S = \mathrm{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0} \quad \textbf{(174)}$$

$$\left(H'^{2}_{\underline{2}}\right)_K = \left(H^{2}_{\underline{2}}\right)_S = \frac{1}{r(u,v)}, \quad \textbf{(175)}$$

$$\left(H'^{3}_{\underline{3}}\right)_K = \left(H^{3}_{\underline{3}}\right)_S = \frac{1}{r(u,v)\sin\theta}. \quad \textbf{(176)}$$

По сравнению с тетрадами (43) в результате преобразований (158) – (160) появились две дополнительные ненулевые тетрады (172), (173).

Далее с помощью преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) приведем тетрады (171) – (176) к тетрадам в калибровке Швингера (165). Ненулевые величины $\Lambda_{\underline{\alpha}}^{\underline{\beta}}(u,v)$ **в (15), (16) будут равны**

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{0}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{1}} = \frac{1}{f}\operatorname{ch}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0};$$

$$\Lambda_{\underline{0}}^{\underline{1}} = \Lambda_{\underline{1}}^{\underline{0}} = -\frac{1}{f}\operatorname{sh}\left(\frac{t(u,v)}{2r_0}\right)\frac{1}{2r_0}\sqrt{\frac{r(u,v)}{r_0}}\exp\frac{r(u,v)}{2r_0}. \quad \textbf{(177)}$$

После проведенного двухэтапного преобразования базовый гамильтониан (45) преобразуется к виду (167).

Условие причинности Гильберта $g_{00} > 0$ для метрики Крускала (161) не ограничивает область определения волновых функций гамильтониана (167). Ограничений также не содержится при получении тетрад (171) – (176) в первом этапе преобразования и при проведении преобразования Лоренца во втором этапе преобразования базового гамильтониана (45). Однако, ограничение области определения волновых функций преобразованного гамильтониана содержится при введении новых переменных (u,v). В равенствах (158), (159) присутствует выражение $f_S = 1-\left(r_0/r(u,v)\right)$, которое в базовой метрике (42) является вещественным и положительным (см. (46), (47)). Отсюда следует (см. (158), (159)), что для области определения в координатах (u,v) должны выполняться условия

$$u^2 > v^2,\ u^2 \neq v^2 \neq 0. \qquad \textbf{(178)}$$

На плоскости (u,v) областью определения волновых функций гамильтониана (167) является правый квадрант $u > |v|$. Линии $u = \pm v$ и точка $u = v = 0$ не принадлежат искомой области определения.

С учетом равенства нулю радиальной компоненты тока j^{μ} **(169**
гамильтониан H_{η} **(167) является эрмитовым (см. условие эрмитовости (28)**
(54)).

В отличие от базового гамильтониана (45) гамильтониан (167) в
переменных (u, v) **явно зависит от временной координаты , и в этих**
переменных отсутствует возможность определения стационарных
связанных состояний дираковских частиц.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ квантово-механической эквивалентности метрик центрально симметричного незаряженного гравитационного поля.

Рассматривались метрики Шварцшильда в сферических [1], изотропных [2] и гармонических [3] координатах; метрики Эддингтона-Финкельштейна [8], [5] и Пенлеви-Гуллстранда [9], [10]; метрики Леметра-Финкельштейна [4], [5] и Крускала [6], [7]. Все метрики получены из решения [1] путем соответствующих координатных преобразований.

Для всех метрик получены самосопряженные гамильтонианы с плоским скалярным произведением волновых функций и с использованием тетрадных векторов в калибровке Швингера. Кроме того, эти же гамильтонианы получены прямыми двухэтапными преобразованиями базового гамильтониана (45) для поля Шварцшильда в координатах (t,r,θ,φ)**. Сначала в соответствии с координатными преобразованиями для рассматриваемых метрик преобразовывался базовый гамильтониан (45) с тетрадами (43). Затем при необходимости осуществлялись преобразования Лоренца (15), (16), (21), (22) для перехода к тетрадам в калибровке Швингера.**

Для рассматриваемых метрик и гамильтонианов анализу подвергались области определения волновых функций уравнения Дирака, эрмитовость гамильтонианов $\left((\Phi, H\Psi) = (H\Phi, \Psi)\right)$ и возможность существования стационарных связанных состояний частиц со спином ½. В результате анализа можно сделать следующие выводы:

1. **Для базовой метрики Шварцшильда в сферических координатах (t, r, θ, φ) для**

выполнения условия причинности Гильберта $g_{00} > 0$ область определения волновых функций ограничена условием

$$r > r_0. \qquad \textbf{(179)}$$

Для всех других рассматриваемых метрик условие (179) также проявляется в новых переменных:

- метрика Шварцшильда в изотропных координатах

$$R > \frac{r_0}{4}, \qquad \textbf{(180)}$$

- метрика Шварцшильда в гармонических координатах

$$R > r_0/2, \qquad \textbf{(181)}$$

- метрики Эддингтона-Финкельштейна и Пенлеви-Гуллстранда

$$r > r_0, \qquad \textbf{(182)}$$

- метрика Леметра- Финкельштейна

$$R - T > \frac{2}{3} r_0, \qquad \textbf{(183)}$$

- метрика Крускала

$$u > |v| > 0. \qquad \textbf{(184)}$$

Из неравенств (180) – (184) видно, что «горизонт событий» r_0 в базовой метрике Шварцшильда (42) проявляет себя в новых координатах во всех рассмотренных метриках. Область определения волновых функций для всех метрик, полученных координатными преобразованиями с условием (179) базовой метрики (42), не включает в себя сингулярную точку в начале координат.

2. Самосопряженные гамильтонианы (68), (86) для метрик Шварцшильда в изотропных и гармонических координатах являются эрмитовыми и для них, как и для базового гамильтониана (45), возможно существование вещественных стационарных связанных состояний частиц со спином ½.
3. Самосопряженные гамильтонианы (102), (122) для метрик Эддингтона-Финкельштейна и Пенлеви-Гуллстранда являются неэрмитовыми, и для них возможны лишь состояния с комплексными уровнями энергии, распадающимися со временем.

4. Самосопряженные гамильтонианы (144), (167) для метрик Леметра-Финкельштейна и Крускала являются эрмитовыми, но из-за явной зависимости от временной координаты для этих гамильтонианов отсутствует возможность определения стационарных связанных состояний частиц со спином ½.

Полученные результаты могут быть полезны при рассмотрении вопросов, связанных с эволюцией Вселенной и с взаимодействием коллапсаров с окружающей средой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] K. Schwarzschild. Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, 189-196 (1916).

[2] A.S. Eddington. The Mathematical Theory of Relativity (Cambridge University Press, 1924).

[3] А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука (1989).

[4] G. Lemaitre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, A53, 51 (1933).

[5] D. Finkelstein. Phys. Rev. 110, 965 (1958).

[6] M. Kruskal. Phys. Rev. 119, 1743 (1960).

[7] I.D. Novikov. A. J. 40, 772 (1963) (in Russian).

[8] A.S. Eddington. Nature 113, 192 (1924).

[9] P. Painleve. C.R.Acad. Sci. (Paris) 173, 677 (1921).

[10] A. Gullstrand. Arkiv. Mat. Astron. Fys. 16, 1 (1922).

[11] M.V. Gorbatenko, V.P. Neznamov. Phys. Rev. D 82, 104056 (2010); arxiv: 1007.4631 (gr-qc).

[12] M.V. Gorbatenko, V.P. Neznamov. Phys. Rev. D 83, 105002 (2011); arxiv: 1102.4067v1 (gr-qc).

[13] M.V. Gorbatenko, V.P. Neznamov. arxiv: 1107.0844 (gr-qc).

[14] J. Schwinger, Phys. Rev. 130, 800 (1963).

[15] C.M. Bender, D. Brody and H.F. Jones, Phys. Rev. Lett. 89, 2704041 (2002); Phys. Rev. D 70, 025001 (2004).

[16] A. Mostafazadeh, J.Math. Phys. (N.Y.) 43, 205 (2002); 43, 2814 (2002); 43, 3944 (2002).

[17] B. Bagchi, A. Fring, Phys. Lett. A 373, 4307 (2009).

[18] L. Parker. Phys. Rev. D 22, 1922 (1980).

[19] Д. Гильберт. Избранные труды, т.2, с. 379-398, Факториал, М., 1998.

[20] Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. Теория поля, Физматлит, Москва, 2006.

[21] M. Arminjon, arxiv: 1211.1855v1 (gr-qc).

[22] D.R. Brill, J.A. Wheeler. Rev. of Modern Physics, 29, 465-479 (1957).

[23] S.R. Dolan. Trinity Hall and Astrophysics Group, Cavendish Laboratory. Dissertation, 2006.

[24] M.V. Gorbatenko, V.P.Neznamov. arxiv: 1205.4348 (gr-qc).

[25] M.V. Gorbatenko, N.S. Kolesnikov, V.P. Neznamov, E.V. Popov, I.I. Safronov, M.V. Vronsky. arxiv: 1301.7595 (gr-qc).

[26] И.Д. Новиков. Сообщения ГАИШ, №120, 342 (1962).

[27] Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уиллер. Гравитация, том3, «Мир». Москва, 1977.

[28] A. Lasenby, C. Doran, J. Pritchard, A. Caceres and S. Dolan. Phys. Rev. D 72, 105014 (2005).

ДОПОЛНЕНИЕ №1

Одномерное уравнение Шредингера с эффективным потенциалом $U_{eff}(r)$

(Е.Ю.Попов, препринт РФЯЦ-ВНИИЭФ)

1. Уравнение Дирака для кулоновского потенциала $U = -\dfrac{Z\alpha}{r}$ **;**

$$\begin{aligned} &F' + \frac{1+\kappa}{r}F - (E+m-U)G = 0 \\ &G' + \frac{1-\kappa}{r}G + (E-m-U)F = 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \psi''(r) + 2\left(E - U_{eff}(r)\right)\psi(r) = 0;$$

$$U_{eff}^{acимпт.}(r) = -\frac{(Z\alpha)^2 - \frac{3}{4} + \left(1-\kappa^2\right)}{2r^2}, \quad r \rightarrow 0;$$

Для $S_{1/2}$ **и** $P_{1/2}$ **- состояний** $\kappa^2 = 1$

$$U_{eff}^{acимпт.}(r) = -\frac{(Z\alpha)^2 - \frac{3}{4}}{2r^2};$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Для} \quad (Z) < 118 \qquad U_{eff}^{acимпт.} > 0; \\ &\text{Для} \quad (Z) > 119 \qquad U_{eff}^{acимпт.} < 0; \\ &\text{Для} \quad (Z) = 137 \qquad U_{eff}^{acимпт.} = -\frac{1/8}{r^2}. \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{выход: учет конечных размеров ядер}$$

2. поле Шварцшильда:

$$U_{eff}^{асимпт.}(\rho) = -\frac{1/8 + 2\alpha_G^2\varepsilon^2}{(\rho - 2\alpha_G)^2} \quad - \quad \text{всюду} \ < 0;$$

3. изотропные координаты:

$$U_{eff}^{асимпт.}(\rho) = -\frac{1/4 + 16\alpha_G^2\varepsilon^2}{\left(\rho - \frac{\alpha_G}{2}\right)^2} \quad - \quad \text{всюду} \ < 0;$$

4. поле Пенлеви-Гуллстранда:

$$U_{eff}^{асимпт.}(\rho) = -\frac{\left(3/16 + 4\alpha_G^2\varepsilon^2\right) + i\alpha_G\varepsilon}{(r - 2\alpha_G)^2} \quad - \quad \text{комплексный и всюду действительная часть} < 0;$$

ДОПОЛНЕНИЕ №2

1. **Отсутствие «испарения» по Хокингу!!!**

Спасибо за внимание