

П.А. Сапонов

# Алгебра уравнения отражений

## Структура. Теория представлений. Приложения.

### Список публикаций.

1. D. Gurevich, P. Saponov, *Quantum line bundles via Cayley-Hamilton identity*, Journal of physics A: Mathematical and General, **34** no. 21 (2001) 4553 – 4569
2. D. Gurevich, R. Leclercq, P. Saponov, *Traces in braided categories*, Journal of Geometry and Physics, **44** (2002) 251–278.
3. D. Gurevich, P. Saponov, *Quantum line bundles on a noncommutative sphere*, Journal of physics A: Mathematical and General, **35** no. 45 (2002) 9629–9643.
4. Д. Гуревич, П. Сапонов, *Неодномерные представления алгебры уравнения отражений*, Теоретическая и математическая физика, **139**, no. 1, (2004.) 45–61.
5. P.Saponov, *Weyl approach to representation theory of reflection equation algebra*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **37** no. 18 (2004) 5021–5046.
6. Д.И. Гуревич, П.Н. Пятов, П.А. Сапонов, *Теорема Кэли-Гамильтона для квантовых матричных супералгебр  $GL(m|n)$  типа*, Алгебра и Анализ, **17**, вып. 1 (2005) 157–179.
7. Д.И. Гуревич, П.Н. Пятов, П.А. Сапонов, *”Квантовые матричные алгебры  $GL(m|n)$  типа II: структура характеристической подалгебры и ее спектральная параметризация*, Теоретическая и Математическая физика, **147**, no. 1, (2006) 14–46.
8. D. Gurevich, P. Saponov, *Geometry of non-commutative orbits related to Hecke symmetries*, Contemporary Mathematics, **433**, (2007) 209-250.
9. D.I. Gurevich, P.N. Pyatov, P.A. Saponov, *Representation theory of (modified) reflection equation algebra of  $GL(m|n)$  type*, Алгебра и Анализ, **20**, no. 2 (2008), 70–133.

10. Д. Гуревич, П. Пятов, П. Сапонов, *Спектральная параметризация для степенных сумм квантовых суперматриц*, Теор. Мат. Физ., **159**, вып. 2 (2009) 206–218.
11. D. Gurevich, P. Saponov, *Braided affine geometry and  $q$ -analogs of wave operators*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, **42** (2009) 313001.
12. D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, *Bilinear identities on Schur symmetric functions*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, **17**, Supplementary Issue 1 (2010) 31–48.
13. D.I. Gurevich, P.A. Saponov, *Generic super-orbits in  $gl(m|n)^*$  and their braided counterparts*, Journal of Geometry and Physics, **60**, no.10 (2010) 1411-1423.
14. D.I. Gurevich, P.A. Saponov, *Quantization of pencils with a  $gl$ -type Poisson center and braided geometry*, Algebra, Geometry and Mathematical Physics, Banach Center Publications, **93** (2011) 145–162.
15. D. Gurevich, P. Pyatov, P. Saponov, *Braided Differential Operators on Quantum Algebra*, Journal of Geometry and Physics, **61**, Issue 8, (2011) 1485-1501.
16. D. Gurevich, P.Saponov, *Braided algebras and their applications to Noncommutative Geometry*, Advances in Applied Mathematics **51** (2013) 228–253.

## Структура алгебры

1. Перестановочные соотношения.  $R$ -матрицы  $GL(m|n)$  типа.
2. Характеристическая подалгебра.
3. Тождество Гамильтона-Кэли.
4. Билинейные соотношения на симметрические функции Шура.
5. Спектр квантовой матрицы и спектральная параметризация характеристической подалгебры.

## Теория конечномерных представлений

1. Структура биалгебры: твистованное коумножение.
2. Квазитензорная категория конечномерных модулей.
  - (a) Объекты и морфизмы. Морфизм перестановки.
  - (b) Эквивариантные представления.
  - (c) Фундаментальное векторное и “присоединенное” представления
3. Характеры центральных элементов.

## Квантовые многообразия и некоммутативная дифференциальная геометрия

1. Квантование орбит коприсоединенного действия линейной группы.
2. Квантование векторных полей. Инвариантные векторные поля
3. Квантовые дифференциальные операторы.

# Алгебра уравнения отражений

Порождается  $N^2$  генераторами  $l_j^i$  ( $N = m + n$ ) с перестановочными соотношениями:

$$R(L \otimes I)R(L \otimes I) = (L \otimes I)R(L \otimes I)R$$

В компактных матричных обозначениях:

$$R_{12}L_1R_{12}L_1 = L_1R_{12}L_1R_{12}$$

где  $N^2 \times N^2$  матрица “структурных констант”  $R$  относится к  $GL(m|n)$  типу.

Это означает:

•

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}$$

•

$$(q - R)(q^{-1} + R) = 0,$$

число  $q$  не является корнем из единицы.

•

$$\rho_R((n + 1)^{m+1}) = 0.$$

**Важное следствие.** Если построить  $q$ -кососимметрическую алгебру пространства  $V$ ,  $\dim V = N$

$$\Lambda_-(V) := T(V) / \langle\langle \text{Im}(q^{-1} + R) \rangle\rangle,$$

то ее ряд Гильберта-Пуанкаре

$$P_-(t) := \sum_{k \geq 0} t^k \dim \Lambda_-^k(V),$$

есть рациональная функция

$$P_-(t) = \frac{N(t)}{D(t)} = \frac{1 + a_1 t + \dots + a_m t^m}{1 - b_1 t + \dots + (-1)^n b_n t^n} = \frac{\prod_{i=1}^m (1 + x_i t)}{\prod_{j=1}^n (1 - y_j t)}$$

## Характеристическая подалгебра

- Порождается  $R$ -следами степеней матрицы генераторов

$$p_k(L) = \text{Tr}_R(L^k)$$

- Линейный базис образуют квантовые функции Шура

$$\lambda \vdash k \Rightarrow s_\lambda(L) = \text{Tr}_R(L_1 \dots L_k \rho_R(\lambda))$$

Правило умножения — классическое правило Литтлвуда-Ричардсона

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^{\nu} s_{\nu}$$

### Факторизованное тождество Гамильтона-Кэли

$$\left( \sum_{k=0}^m (-q)^k L^{(m-k)} s_{[m|n]^k}(L) \right) \left( \sum_{r=0}^n q^{-r} L^{(n-r)} s_{[m|n]_r}(L) \right) \equiv 0$$

## Элементы теории представлений

- Фундаментальное представление в пространстве  $V$

$$\rho_V(l_i^j) \triangleright x_k = B_k^j x_i.$$

- Дуальное представление в пространстве  $V^*$

$$\rho_V^*(l_i^j) \triangleright x^k = -x^r R_{ri}^{kj}$$

- “Присоединенное” представление

$$\rho_{V \otimes V^*}(L_{\bar{1}}) \triangleright L_{\bar{2}} = L_1 R_{12} - R_{12} L_1$$