Бигравитация, тетрады и материя

В.О. Соловьев

Семинар ОТФ, 25.11.2014

Публикации

1. Соловьев В.О. Бигравитация в гамильтоновом формализме. Тетрадный подход (принято в ТМФ).
2. Soloviev V.O. Bigravity in tetrad Hamiltonian formalism and matter couplings, arXiv:1410.0048.

Общая теория относительности

1. Лагранжиан

$$\mathcal{L}^{(g)} = \frac{1}{16\pi G^{(g)}}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}R^{(g)}_{\mu\nu} + \mathcal{L}^{(g)}_M(\phi^A, g_{\mu\nu}),$$

2. Теория не проверена на больших расстояниях.
3. Проблема космологической постоянной или темная энергия.
4. Проблема темной материи.

Модификация: бигравитация

- Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(f)} + \mathcal{L}^{(g)} - \sqrt{-g}\, U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

- Пророки: Salam, Strathdee, Wess, Zumino, Ян Коган, Damour ...
- Скептики – Stanley Deser et al:

"*...направление оставалось мертвым до недавнего (независимого) переоткрытия (де Рам, Габададзе, Толи, 2011) результатов Весса и Зумино 1970 года. Эксгумация породила, что неудивительно, огромную индустрию. Мы намерены снова похоронить его, по крайней мере, одну из моделей.*"

Stanley Deser (уроженец г. Ровно, 1931 г.р.)

Потенциал de Rham, Gabadadze, Toley

Потенциал взаимодействия строится из симметричных полиномов матрицы $X^\mu_\nu = \left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^\mu_\nu$:

$$U = \sum_{n=0}^{4} \beta_n e_n(X), \quad \text{сравни} \quad \sum_{n=0}^{4} (-\lambda)^{4-n} e_n(X) = \det|X - \lambda I|,$$

выражающиеся через собственные значения матрицы X:

$$\begin{aligned}
e_0 &= 1, \\
e_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, \\
e_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4, \\
e_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4, \\
e_4 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4,
\end{aligned}$$

Выражение через следы

или через следы матриц $X,\ldots,X^n$:

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \mathrm{Tr}X,\\
e_2 &= \frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr}X)^2 - \mathrm{Tr}X^2\right),\\
e_3 &= \frac{1}{6}\left((\mathrm{Tr}X)^3 - 3\mathrm{Tr}X\mathrm{Tr}X^2 + 2\mathrm{Tr}X^3\right),\\
e_4 &= \frac{1}{24}\left((\mathrm{Tr}X)^4 - 6(\mathrm{Tr}X)^2\mathrm{Tr}X^2 + 3(\mathrm{Tr}X^2)^2 + \right.\\
&+ \left. 8\mathrm{Tr}X\mathrm{Tr}X^3 - 6\mathrm{Tr}X^4\right) = \det X.
\end{aligned}
$$

Извлечение корня из матрицы

Тетрадное представление

$$g_{\mu\nu} = E^A_\mu E^B_\nu h_{AB}, \qquad g^{\mu\nu} = E^\mu_A E^\nu_B h^{AB},$$

$$f_{\mu\nu} = F^A_\mu F^B_\nu h_{AB}, \qquad f^{\mu\nu} = F^\mu_A F^\nu_B h^{AB},$$

при наложении дополнительного условия (условия симметричности)

$$E^\mu_A F^B_\mu - E^{\mu B} F_{\mu A} = 0,$$

позволяет избавиться от корня:

$$X^\mu_\nu = \left(\sqrt{g^{-1} f}\right)^\mu_\nu = E^{\mu A} F_{\nu A}.$$

Выбор канонических переменных

- Вариант метрического формализма: две индуцированные метрики

$$\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^j}, \qquad \eta_{ij} = f_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^i} \frac{\partial X^\nu}{\partial x^j},$$

и сопряженные им импульсы

$$\pi^{ij}, \qquad \Pi^{ij}.$$

- Вариант тетрадного формализма: две триады

$$\gamma_{ij} = e_i^a e_j^b \delta_{ab}, \qquad \eta_{ij} = f_i^a f_j^b \delta_{ab},$$

и сопряженные им импульсы

$$\pi^i_a, \qquad \Pi^i_a.$$

Тетрады оптимальные и общие

Оптимальный выбор для E^μ_A (триада + единичная нормаль):

$$E^\mu_0 = \bar{n}^\mu, \qquad E^\mu_a = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^i} e^i_a,$$

и общий случай (буст оптимальной тетрады $\mathcal{F}^B_\mu$) для F^A_μ:

$$F^A_\mu = \Lambda^A{}_B \mathcal{F}^B_\mu$$

здесь преобразование буста

$$\Lambda^A{}_B = \begin{pmatrix} \varepsilon & p_b \\ p^a & \delta^a{}_b + \frac{1}{\varepsilon+1} p^a p_b \end{pmatrix},$$

задается с произвольным параметром p_a:

$$p^a = \delta^{ab} p_b, \qquad p^2 = p_a p^a, \qquad \varepsilon = \sqrt{1+p^2}.$$

Потенциал в тетрадных переменных

Прстранственная плотность минимального ($\beta_i = 0$ при $i \neq 1$) потенциала имеет вид:

$$\tilde{U} = \beta_1 e U_1 \equiv \beta_1 e \left[\sqrt{1+p^2} + u \left(f_{ia} e^{ia} + \frac{p_a f_i^a e_b^i p^b}{\sqrt{1+p^2}+1} \right) - u^i f_i^a p_a \right]$$

в общем случае ($\beta_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$)

$$\tilde{U}(f_{ia}, e_{ia}, u, u^i, p_a) = u\tilde{V} + u^i \tilde{V}_i + \tilde{W}.$$

Потенциал линеен по вспомогательным переменным u, u^i, по e (или f) и f_i^a, он нелинейно зависит от вспомогательной переменной p_a и от комбинации триад $x_{ab} \equiv f_{ia} e_b^i$.

$$
\begin{aligned}
\tilde{V} &= e\Big[\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \frac{1}{2}\left(x^2 - \mathrm{Tr} x^2\right) + \\
&+ \beta_3 \frac{1}{6}\left(x^3 - 3x\mathrm{Tr} x^2 + 2\mathrm{Tr} x^3\right) + \frac{1}{\varepsilon + 1}\Big((px^3p)\beta_3 - \\
&- (px^2p)(\beta_2 + \beta_3 x) + (pxp)\Big(\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 \frac{1}{2}(x^2 - \mathrm{Tr} x^2)\Big)\Big)\Big] \\
\tilde{V}_i &= -ep^a f_i^b \Big[\delta_{ab}\Big(\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 \frac{1}{2}\left(x^2 - \mathrm{Tr} x^2\right)\Big) - \\
&- x_{ab}(\beta_2 + \beta_3 x) + \beta_3 x_{ac} x_{cb}\Big], \\
\tilde{W} &= \beta_4 f + e\Big[\varepsilon\left(\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 \frac{1}{2}(x^2 - \mathrm{Tr} x^2)\right) + \\
&+ \frac{1}{\varepsilon + 1}\left((px^2p)\beta_3 - (pxp)(\beta_2 + \beta_3 x)\right)\Big].
\end{aligned}
$$

Связи "тетрадные"

Связями в узком смысле здесь называются уравнения, содержащие только канонические переменные.
Связями в широком смысле можно называть уравнения, содержащие, кроме того, вспомогательные переменные (здесь u, u^i, p_a).

$$
\begin{aligned}
L^{+}_{ab} &= f_{ia}\Pi^i_b - f_{ib}\Pi^i_a + e_{ia}\pi^i_b - e_{ib}\pi^i_a = 0,\\
L^{-}_{ab} &= f_{ia}\Pi^i_b - f_{ib}\Pi^i_a - e_{ia}\pi^i_b + e_{ib}\pi^i_a = 0,\\
G_a &= p_a + u p_b f_i^b e^i_a - u^j f_j^b \left(\delta_{ab} + \frac{p_a p_b}{\sqrt{1+p^2}+1}\right) = 0,\\
G_{ab} &= f_{ia}e^i_b - f_{ib}e^i_a + \frac{p_c}{\sqrt{1+p^2}+1}\left(p_a f_i^c e^i_b - p_b f_i^c e^i_a\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Деформация связей ОТО

f-ОТО:

$$\mathcal{H} = 0, \qquad \mathcal{H}_i = 0,$$

g-ОТО:

$$\bar{\mathcal{H}} = 0, \qquad \bar{\mathcal{H}}_i = 0,$$

Бигравитация:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} &\equiv \bar{\mathcal{H}} + \tilde{V}(x_{ab}, p_a) = 0, \\
\mathcal{S}_i &\equiv \bar{\mathcal{H}} + \tilde{V}_i(x_{ab}, p_a) = 0, \\
\mathcal{R} &\equiv \mathcal{H} + \tilde{W}(x_{ab}, p_a) \qquad\qquad \left(+u\mathcal{S} + u^i\mathcal{S}_i\right) = 0, \\
\mathcal{R}_i &\equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0.
\end{aligned}$$

Вспомогательные переменные и связи

ОТО: N, N^i. ОТО (тетрады): N, N^i, λ_{ab}.
Бигравитация: N, N^i, u, u^i.
Бигравитация (тетрады): N, N^i, u, u^i, λ^+_{ab}, λ^-_{ab}, Λ^a, Λ^{ab}, p_a.

п-я	связь	$\to$	рез.1	$\to$	рез.2	$\to$	рез.3
N	$\mathcal{R} \approx 0$						
N^i	$\mathcal{R}_i \approx 0$						
λ^+_{ab}	$L^+_{ab} \approx 0$						
u	$\mathcal{S} = 0$	$\to$	$\Omega = 0$	$\to$	$\{\mathcal{S}, \Omega\} \neq 0$	$\to$	u
u^i	$\mathcal{S}_i = 0$	$\to$	p_a				
Λ^a	$G_a = 0$	$\to$	u^i				
λ^-_{ab}	$L^-_{ab} = 0$	$\to$	$\{L^-_{ab}, G_{cd}\} \neq 0$	$\to$	$\Lambda_{cd} = 0$		
Λ^{ab}	$G_{ab} = 0$	$\to$	$\{G_{ab}, L^-_{cd}\} \neq 0$	$\to$	$\lambda^-_{cd} = 0$		

Степени свободы

$$\mathrm{DOF} = \frac{1}{2}\left(n - 2n_{f.c.} - n_{s.c.}\right).$$

	БиГ	БиГ (dRGT)	БиГ(тетрады)
(q,p) n	$(\gamma_{ij},\pi^{ij}),(\eta_{ij},\Pi^{ij})$ 24	$(\gamma_{ij},\pi^{ij}),(\eta_{ij},\Pi^{ij})$ 24	$(e_{ia},\pi^{ia}),(f_{ia},\Pi^{ia})$ 36
1 род $n_{f.c.}$	$\mathcal{R},\mathcal{R}_i$ 4	$\mathcal{R},\mathcal{R}_i$ 4	$\mathcal{R},\mathcal{R}_i,L^{+}_{ab}$ 7
2 род $n_{s.c.}$	— 0	$\mathcal{S},\Omega$ 2	$\mathcal{S},\Omega,L^{-}_{ab},G_{ab}$ 8
DoF	8	7	7

Особенности тетрадного гамильтонова формализма

- Линейность гамильтониана по $N, N^i, \lambda^+_{ab}, \lambda^-_{ab}, \Lambda^a, \Lambda^{ab}$.
- Линейность потенциала (и гамильтониана) по u, u^i.
- Нелинейная зависимость потенциала от p_a.
- Линейная зависимость связи $\mathcal{S}_i = 0$ от p_a. Решение:

$$p_a = \frac{1}{\beta_1 e} f^i_a \bar{\mathcal{H}}_i, \qquad \text{или в общем случае} \qquad p_a = \frac{1}{e} \bar{\mathcal{H}}_i f^{ib} C^{-1}_{ba}.$$

- Линейная зависимость связи $G_a = 0$ от u^i. Решение:

$$u^i = p_a f^{ib} \left[\frac{\delta_{ab}}{\sqrt{1+p^2}} + u \left(f_{ja} e^j_b - \delta_{ab} \frac{f_{jc} p^c e^{jd} p_d}{\sqrt{1+p^2}(\sqrt{1+p^2}+1)} \right) \right]$$

Взаимодействие с материей

- две материи (f-материя и g-материя):

$$\left[\mathcal{L}^{(f)} + \mathcal{L}_M^{(f)}(\psi^A, f_{\mu\nu})\right] + \left[\mathcal{L}^{(g)} + \mathcal{L}_M^{(g)}(\phi^A, g_{\mu\nu})\right] - \sqrt{-g}\, U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$$

- одна материя и одно взаимодействие:

$$\mathcal{L}^{(f)} + \mathcal{L}^{(g)} + \mathcal{L}_M^{(G)}(\phi^A, G_{\mu\nu}) - \sqrt{-g}\, U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}),$$

где $G_{\mu\nu}$ – эффективная метрика

$$G_{\mu\nu} = a^2 f_{\mu\nu} + b^2 g_{\mu\nu} + 2ab g_{\mu\alpha} \left(\sqrt{g^{(-1)} f}\right)^{\alpha}_{\nu},$$

а G^A_μ – эффективная тетрада

$$G^A_\mu = aF^A_\mu + bE^A_\mu, \qquad G_{\mu\nu} = G^A_\mu G_{\nu A}.$$

Пример: безмассовое скалярное поле

$$\mathcal{L}^{(m)} = -\frac{1}{2}\sqrt{-G}\, G^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi = \pi\dot{\phi} - \hat{N}\hat{\mathcal{H}}^{(m)} - \hat{N}^i\hat{\mathcal{H}}_i^{(m)},$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}^{(m)} = \frac{\pi^2}{2\sqrt{\psi}} + \frac{\sqrt{\psi}}{2}\psi^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi, \qquad \hat{\mathcal{H}}_i^{(m)} = \pi\partial_i\phi.$$

$$\hat{N} = \frac{N}{\sqrt{-G^{\perp\perp}}}, \qquad \hat{N}^i = N^i - N\frac{G^{\perp i}}{G^{\perp\perp}}.$$

Здесь $\psi_{ij} = G_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^i}\frac{\partial X^\nu}{\partial x^j}$ – индуцированная метрика, $G^{\perp\perp}$, $G^{\perp i}$ – проекции тензора $G^{\mu\nu}$.

Пример: продолжение

Или

$$\mathcal{L}^{(m)} = \pi\dot{\phi} - N\mathcal{H}^{(m)} - N^i\mathcal{H}_i^{(m)},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(m)} &= \frac{\sqrt{-G_{\perp\perp}}}{2}\left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\psi}} + \sqrt{\psi}\psi^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi\right) + \\
&+ \left(u^i - b^2 u^k \eta_{kj}\psi^{ij} - 2abu(f_j p)\psi^{ij}\right)\pi\partial_i\phi, \\
\mathcal{H}_i^{(m)} &= \pi\partial_i\phi.
\end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{\perp\perp} &= a^2\left(-u^2 + \gamma_{ij}u^i u^j\right) + 2ab\left(-\varepsilon u + u^i e_{ia}p^a\right) - b^2, \\
\psi_{ij} &= a^2\gamma_{ij} + 2abf_i^a e_j^b\left(\delta_{ab} + \frac{p_a p_b}{\varepsilon + 1}\right) + b^2\eta_{ij}.
\end{aligned}$$

Проблема духа Boulware-Deser

Без нового взаимодействия выполняется равенство

$$\frac{D(\mathcal{S},\mathcal{S}_i)}{D(u,u^j)} \equiv \det\left|\frac{\partial^2 U}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}\right| = 0,$$

означающее функциональную зависимость уравнений $\mathcal{S}=0$, $\mathcal{S}_i=0$, т.е невозможность разрешить их относительно вспомогательных переменных u, u^i. Тогда $\mathcal{S}=0$ становится связью в узком смысле, и дух B-D исключается.

С новым взаимодействием в тетрадном подходе требуется обращение в ноль расширенного якобиана:

$$\frac{D(\mathcal{S},\mathcal{S}_i,G_a)}{D(u,u^j,p_a)} = 0$$

.

Якобиан

$$J=\frac{D(\mathcal{S},\mathcal{S}_i,G_a)}{D(u,u^j,p_b)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial u} & \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial u^i} & \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial p_a}\\ \frac{\partial\mathcal{S}_j}{\partial u} & \frac{\partial\mathcal{S}_j}{\partial u^i} & \frac{\partial\mathcal{S}_j}{\partial p_a}\\ \frac{\partial G_b}{\partial u} & \frac{\partial G_b}{\partial u^i} & \frac{\partial G_b}{\partial p_a}\end{pmatrix}.$$

Производные:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial u} &= \frac{\partial^2(\tilde{U}+\mathcal{H}^{(m)})}{\partial u^2}\neq 0,\\ \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial u^i} &= \frac{\partial^2(\tilde{U}+\mathcal{H}^{(m)})}{\partial u\partial u^i}=\frac{\partial\mathcal{S}_i}{\partial u}\neq 0,\\ \frac{\partial\mathcal{S}_j}{\partial u^i} &= \frac{\partial^2(\tilde{U}+\mathcal{H}^{(m)})}{\partial u^i\partial u^j}\neq 0.\end{aligned}$$

Заключение

- Тетрады позволяют записать потенциал dRGT как функцию (при наложении дополнительных условий симметричности).
- Потенциал и условия симметричности линейны по вспомогательным переменным u, u^i.
- По вспомогательной переменной p_a действие не варьируется, эта переменная определяется из условий симметричности тетрад, т.е. уравнения связи (в широком смысле).
- Два вида материи, минимально и раздельно взаимодействующие с двумя метриками, позволяют избежать духа B-D.
- Минимальное взаимодействие материи с эффективной метрикой воскрешает дух B-D.

Взаимодействие с материей

- C. de Rham, L. Heisenberg and R.H. Ribeiro. On coupling to matter in massive (bi-)gravity; arXiv:1408.1678.
- Johannes Noller, Scott Melville The coupling to matter in Massive, Bi- and Multi-Gravity; arXiv:1408.5131.
- S.F. Hassan, Mikica Kocic, Angnis Schmidt-May. Absence of ghost in a new bimetric-matter coupling; arXiv:1409.1909v1.
- C. de Rham, L. Heisenberg and R.H. Ribeiro. Ghosts & Matter Couplings in Massive (bi-& multi-)Gravity; arXiv:1409.3834.

Потенциал dRGT и его свойства

- C. de Rham, G. Gabadadze, A. J. Tolley. Resummation of Massive Gravity. *Phys. Rev. Lett.* **106** 231101 (2011); arXiv:1011.1232; Ghost free Massive Gravity in the Stuckelberg language. *Phys. Lett. B* **711** 190-195 (2012); arXiv:1107.3820.
- S. F. Hassan, Rachel A. Rosen. Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity. *JHEP* **1202** 126 (2012), arXiv:1109.3515.
- S. F. Hassan, Rachel A. Rosen. Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity. *JHEP* **1204** 123 (2012), arXiv:1111.2070.

Тетрады и бигравитация

- K. Hinterbichler, R.A. Rosen. Interacting Spin-2 Fields. *JHEP* **07** (2012) 047; arXiv:1203.5783.
- S. Alexandrov, K. Krasnov, and S. Speziale. Chiral description of ghost-free massive gravity; arXiv:1212.3614.
- S. Alexandrov. Canonical structure of Tetrad Bimetric Gravity; arXiv:1308.6586.
- J. Kluson. Hamiltonian Formalism of Bimetric Gravity In Vierbein Formulation; arXiv:1307.1974.

Пророки

C. J. Isham, A. Salam and J. Strathdee, *Phys. Lett. B* **31** 300-302 (1970); *Phys. Rev.* **D3** 867-873 (1971).

B. Zumino, "Effective Lagrangians and broken symmetries," in Brandeis Univ. Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory (MIT Press Cambridge, Mass.), Vol. 2, 1970, 437.

T. Damour and I.I. Kogan, *Phys.Rev.* **D 66** 104024 (2002).

Скептики

- D.G. Boulware and S. Deser. Can gravitation have a finite range? *Phys.Rev.* **D6** 3368-3382 (1972).
- S. Deser, A. Waldron. Acausality of massive gravity; arXiv:1212.5835.
- S. Deser, M. Sandora, A. Waldron. No consistent bimetric gravity? arXiv:1306.0647.
- S. Deser, K. Izumi, Y. C. Ong, A. Waldron. Superluminal Propagation and Acausality of Nonlinear Massive Gravity; arXiv:1312.1115.
- S. Deser, K. Izumi, Y. C. Ong, A. Waldron. Problems of Massive Gravities; arXiv:1410.2289.