Гипергравитация в 3D

Ю. М. Зиновьев

ОТФ, ИФВЭ

02.12.2014

План

1. Историческое введение
2. (Супер)гравитация в 3D как теория Черна-Саймонса
3. Гипергравитация в 3D

Суперсимметрии

- Простая суперсиметрия

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} \sim (\gamma^0\gamma^a)_{\alpha\beta}P^a$$

- $N = 2$ суперсимметрия (гиперсимметрия!?)

$$\{Q^i, Q^j\} \sim \delta^{ij}P, \qquad i, j = 1, 2$$

Гирермультиплет ⇔ $N = 2$ супермультиплет, содержащий спины 1/2 и 0.

- Расширенные суперсимметрии

$$\{Q^i, Q^j\} \sim \delta^{ij}P, \qquad i, j = 1, 2, \ldots$$

Супергравитация

- Переход от глобальной суперсимметрии к локальной
  - Каждому генератору соответствует калибровочное поле $\Rightarrow \Psi_\mu$, ${h_\mu}^a$, ${\omega_\mu}^{ab}$.
  - Взаимодействие не сводится просто к замене производных на ковариантные.
  - Супералгебра существенно модифицируется:

$$\{Q, Q\} \sim \gamma^\mu [P_\mu + {\omega_\mu}^{ab} M^{ab} + \Psi_\mu Q]$$

- Взаимодействие спина 3/2 с гравитацией:

$$\delta \Psi_\mu = D_\mu \eta \quad \Rightarrow \quad \delta {e_\mu}^a \sim (\Psi_\mu \gamma^a \eta)$$

Супергравитация

- Переход от глобальной суперсимметрии к локальной
  - Каждому генератору соответствует калибровочное поле $\Rightarrow \Psi_\mu,\ h_\mu{}^a,\ \omega_\mu{}^{ab}$.
  - Взаимодействие не сводится просто к замене производных на ковариантные.
  - Суперaлгебра существенно модифицируется:

$$\{Q,Q\} \sim \gamma^\mu [P_\mu + \omega_\mu{}^{ab} M^{ab} + \Psi_\mu Q]$$

- Взаимодействие спина 3/2 с гравитацией:

$$\delta\Psi_\mu = D_\mu \eta \quad \Rightarrow \quad \delta e_\mu{}^a \sim (\Psi_\mu \gamma^a \eta)$$

Спин 5/2 — гипергравитация

- Возможные обобщения супералгебры

$$\{Q_\mu, Q_\nu\} \sim ????$$

- Взаимодействие спина 5/2 с гравитацией

$$[D_\mu, D_\nu]\xi_\alpha = R_{\mu\nu,\alpha}{}^{\beta}\xi_\beta + \dots$$

- "No-go"теорема:
  Минимальное гравитационное взаимодействие безмассового поля со спином $\geq 5/2$ в плоском пространстве Минковского размерности $d \geq 4$ невозможно.
- Арагон, Дезер (1984) — гравитационное взаимодействие безмассового спина 5/2 в трехмерном пространстве Минковского.

Спин 5/2 — гипергравитация

- Возможные обобщения супералгебры

$$\{Q_\mu, Q_\nu\} \sim ????$$

- Взаимодействие спина 5/2 с гравитацией

$$[D_\mu, D_\nu]\xi_\alpha = R_{\mu\nu,\alpha}{}^{\beta}\xi_\beta + \dots$$

- "No-go"теорема:
  Минимальное гравитационное взаимодействие безмассового поля со спином $\geq 5/2$ в плоском пространстве Минковского размерности $d \geq 4$ невозможно.
- Арагон, Дезер (1984) — гравитационное взаимодействие безмассового спина 5/2 в трехмерном пространстве Минковского.

Спин 5/2 — гипергравитация

- Возможные обобщения супералгебры

$$\{Q_\mu, Q_\nu\} \sim ????$$

- Взаимодействие спина 5/2 с гравитацией

$$[D_\mu, D_\nu]\xi_\alpha = R_{\mu\nu,\alpha}{}^{\beta}\xi_\beta + \dots$$

- "No-go"теорема:
  Минимальное гравитационное взаимодействие безмассового поля со спином $\geq 5/2$ в плоском пространстве Минковского размерности $d \geq 4$ невозможно.
- Арагон, Дезер (1984) — гравитационное взаимодействие безмассового спина 5/2 в трехмерном пространстве Минковского.

Спин 5/2 — гиперагравитация

- Возможные обобщения супералгебры

$$\{Q_\mu, Q_\nu\} \sim ????$$

- Взаимодействие спина 5/2 с гравитацией

$$[D_\mu, D_\nu]\xi_\alpha = R_{\mu\nu,\alpha}{}^{\beta}\xi_\beta + \dots$$

- "No-go"теорема:
  Минимальное гравитационное взаимодействие безмассового поля со спином $\geq 5/2$ в плоском пространстве Минковского размерности $d \geq 4$ невозможно.
- Арагон, Дезер (1984) — гравитационное взаимодействие безмассового спина 5/2 в трехмерном пространстве Минковского.

Обозначения и соглашения

- Фоновые репер и лоренцевская связность AdS_3:
  ${e_\mu}^a$, ${\omega_{0,\mu}}^a = \varepsilon^{abc} {\omega_{0,\mu}}^{bc}$.
- Мультиспинорный формализм:

$$ {e_\mu}^a, \quad {\omega_\mu}^a \quad \Rightarrow \quad {e_\mu}^{(\alpha\beta)}, \quad {\omega_\mu}^{(\alpha\beta)}, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \qquad \psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta $$

- Лагранжиан — три-форма

$$ \omega_{\alpha\beta} \wedge D \wedge h^{\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho} \omega_{\mu,\alpha\beta} D_\nu {h_\rho}^{\alpha\beta} $$

- AdS_3 ковариантная производная:

$$ D \wedge D\xi_\alpha = \lambda^2 e^\alpha \wedge e^\beta \xi_\beta, \qquad \lambda^2 = -\Lambda $$

Гравитация в AdS_3

- Динамические поля: один-формы $h^{\alpha\beta}$, $\omega^{\alpha\beta}$
- Лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \omega_{\alpha\beta} e^{\alpha}{}_{\gamma} \omega^{\beta\gamma} + \omega_{\alpha\beta} D h^{\alpha\beta} + \frac{\lambda^2}{4} h_{\alpha\beta} e^{\alpha}{}_{\gamma} h^{\beta\gamma} \\ &\quad + a_0 h_{\alpha}{}^{\beta} \omega_{\beta}{}^{\gamma} \omega_{\gamma}{}^{\alpha} + \frac{a_0 \lambda^2}{12} h_{\alpha}{}^{\beta} h_{\beta}{}^{\gamma} h_{\gamma}{}^{\alpha}\end{aligned}$$

- Калибровочные преобразования

$$\begin{aligned}\delta\omega^{\alpha\beta} &= D\eta^{\alpha\beta} + \frac{\lambda^2}{4} e^{(\alpha}{}_{\gamma} \xi^{\beta)\gamma} + a_0 \omega^{(\alpha}{}_{\gamma} \eta^{\beta)\gamma} + \frac{a_0 \lambda^2}{4} h^{(\alpha}{}_{\gamma} \xi^{\beta)\gamma} \\ \delta h^{\alpha\beta} &= D\xi^{\alpha\beta} + e^{(\alpha}{}_{\gamma} \eta^{\beta)\gamma} + a_0 \omega^{(\alpha}{}_{\gamma} \xi^{\beta)\gamma} + a_0 h^{(\alpha}{}_{\gamma} \eta^{\beta)\gamma}\end{aligned}$$

Новые переменные

- Разделение переменных

$$\hat{\omega}^{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta} + \frac{\lambda}{2} h^{\alpha\beta}, \qquad \hat{h}^{\alpha\beta} = \omega^{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2} h^{\alpha\beta}$$

- При этом:

$$\mathcal{L} \sim \mathcal{L}(\hat{\omega}) - \mathcal{L}(\hat{h})$$

  Замечание:
  $O(2,2) \sim O(2,1) \otimes O(2,1) \sim Sp(2) \otimes Sp(2) \sim SL(2) \otimes SL(2)$.

- Лагранжиан и калибровочные преобразования

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\hat{\omega}_{\alpha\beta} D\hat{\omega}^{\alpha\beta} + \frac{\lambda}{2}\hat{\omega}_{\alpha\beta} e^{\alpha}{}_{\gamma}\hat{\omega}^{\beta\gamma} + \frac{a_0}{3}\hat{\omega}_{\alpha}{}^{\beta}\hat{\omega}_{\beta}{}^{\gamma}\hat{\omega}_{\gamma}{}^{\alpha}$$

$$\delta\hat{\omega}^{\alpha\beta} = D\hat{\eta}^{\alpha\beta} + \frac{\lambda}{2} e^{(\alpha}{}_{\gamma}\hat{\eta}^{\beta)\gamma} + a_0\hat{\omega}^{(\alpha}{}_{\gamma}\hat{\eta}^{\beta)\gamma}$$

Теория Черна-Саймонса с алгеброй $Sp(2)$

- Введем комбинацию

$$\hat{\omega}_0{}^{\alpha\beta} = \omega_0{}^{\alpha\beta} + \frac{\lambda}{2} e^{\alpha\beta} \quad \Leftrightarrow \quad d\hat{\omega}_0{}^{\alpha\beta} + \hat{\omega}_0{}^{\alpha}{}_{\gamma}\hat{\omega}_0{}^{\beta\gamma} = 0$$

- и новую переменную

$$\Omega^{\alpha\beta} = \frac{1}{a_0}\hat{\omega}_0{}^{\alpha\beta} + \hat{\omega}^{\alpha\beta}$$

- Результат — теория Черна-Саймонса с алгеброй $Sp(2) \sim SO(2,1)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta} d\Omega^{\alpha\beta} + \frac{a_0}{3}\Omega_{\alpha}{}^{\beta}\Omega_{\beta}{}^{\gamma}\Omega_{\gamma}{}^{\alpha}$$

$$\delta\Omega^{\alpha\beta} = d\hat{\eta}^{\alpha\beta} + a_0\Omega^{(\alpha}{}_{\gamma}\hat{\eta}^{\beta)\gamma}$$

$$d\Omega^{\alpha\beta} + a_0\Omega^{\alpha}{}_{\gamma}\Omega^{\beta\gamma} = 0$$

$OSp(1,2)$ супергравитация

- Минимальная супергравитация: $\Omega^{\alpha\beta}$, Ψ^α
- Лагранжиан и калибровочные преобразования:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\Omega_{\alpha\beta}d\Omega^{\alpha\beta} + \frac{i}{2}\Psi_\alpha d\Psi^\alpha + \frac{a_0}{3}\Omega_\alpha{}^\beta\Omega_\beta{}^\gamma\Omega_\gamma{}^\alpha - \frac{ia_0}{2}\Psi_\alpha\Omega^{\alpha\beta}\Psi_\beta \\
\delta\Omega^{\alpha\beta} &= d\eta^{\alpha\beta} + a_0\Omega^{(\alpha}{}_\gamma\eta^{\beta)\gamma} + \frac{ia_0}{2}\Psi^{(\alpha}\xi^{\beta)} \\
\delta\Psi^\alpha &= d\xi^\alpha + a_0\eta^{\alpha\beta}\Psi_\beta - a_0\Omega^{\alpha\beta}\xi_\beta
\end{aligned}$$

- Уравнения:

$$\begin{aligned}
& d\Omega^{\alpha\beta} + a_0\Omega^\alpha{}_\gamma\Omega^{\beta\gamma} + \frac{ia_0}{2}\Psi^\alpha\Psi^\beta = 0 \\
& d\Psi^\alpha + a_0\Omega^\alpha{}_\beta\Psi^\beta = 0
\end{aligned}$$

- Пространство AdS_3: $\Omega^{\alpha\beta} = \Omega_0{}^{\alpha\beta}$, $\Psi^\alpha = 0$ является решением

Модели с конечным числом высших спинов

- Модель Черна-Саймонса с алгеброй $SL(N)$. При каноническом вложении $SL(2) \subset SL(N)$ описывает безмассовые поля со спинами $2, 3, \ldots, N$.
- При четном $N = 2n$ возможно сужение на алгебру $Sp(2n) \subset SL(2n)$, описывающее только четные спины $2, 4, \ldots, 2n$.
- Простейший пример — $Sp(4)$ со спинами 2 и 4.
- Супералгебра $OSp(1,4)$:

$$\Omega^{(ab)}, \quad \Psi^{a}, \quad \Omega^{[ab]}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4$$

$$\Omega^{(\alpha\beta)}, \quad \Psi^{\alpha}, \quad \varepsilon^{[\alpha\beta]}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Модели с конечным числом высших спинов

- Модель Черна-Саймонса с алгеброй $SL(N)$. При каноническом вложении $SL(2) \subset SL(N)$ описывает безмассовые поля со спинами $2, 3, \ldots, N$.
- При четном $N = 2n$ возможно сужение на алгебру $Sp(2n) \subset SL(2n)$, описывающее только четные спины $2, 4, \ldots, 2n$.
- Простейший пример — $Sp(4)$ со спинами 2 и 4.
- Супералгебра $OSp(1, 4)$:

$$\Omega^{(ab)}, \quad \Psi^a, \quad \Omega^{[ab]}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4$$

$$\Omega^{(\alpha\beta)}, \quad \Psi^\alpha, \quad \varepsilon^{[\alpha\beta]}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Модели с конечным числом высших спинов

- Модель Черна-Саймонса с алгеброй $SL(N)$. При каноническом вложении $SL(2) \subset SL(N)$ описывает безмассовые поля со спинами $2, 3, \ldots, N$.
- При четном $N = 2n$ возможно сужение на алгебру $Sp(2n) \subset SL(2n)$, описывающее только четные спины $2, 4, \ldots, 2n$.
- Простейший пример — $Sp(4)$ со спинами 2 и 4.
- Супералгебра $OSp(1, 4)$:

$$\Omega^{(ab)}, \quad \Psi^a, \quad \Omega^{[ab]}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4$$

$$\Omega^{(\alpha\beta)}, \quad \Psi^\alpha, \quad \varepsilon^{[\alpha\beta]}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Модели с конечным числом высших спинов

- Модель Черна-Саймонса с алгеброй $SL(N)$. При каноническом вложении $SL(2) \subset SL(N)$ описывает безмассовые поля со спинами $2, 3, \ldots, N$.
- При четном $N = 2n$ возможно сужение на алгебру $Sp(2n) \subset SL(2n)$, описывающее только четные спины $2, 4, \ldots, 2n$.
- Простейший пример — $Sp(4)$ со спинами 2 и 4.
- Супералгебра $OSp(1, 4)$:

$$\Omega^{(ab)}, \quad \Psi^a, \quad \Omega^{[ab]}, \quad a, b = 1, 2, 3, 4$$

$$\Omega^{(\alpha\beta)}, \quad \Psi^\alpha, \quad \varepsilon^{[\alpha\beta]}, \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

Гипергравитация

- $OSp(1,4)$ теория $(a = 1,2,3,4)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Omega_{ab}d\Omega^{ab} + \frac{i}{2}\Psi_a d\Psi^a + \frac{\tilde{a}_0}{3}\Omega_a{}^b\Omega_b{}^c\Omega_c{}^a - \frac{i\tilde{a}_0}{2}\Psi_a\Omega^{ab}\Psi_b$$

$$\begin{aligned} \delta\Omega^{ab} &= d\eta^{ab} + \tilde{a}_0\Omega^{(a}{}_c\eta^{b)c} + \frac{i\tilde{a}_0}{2}\Psi^{(a}\xi^{b)} \\ \delta\Psi^a &= d\xi^a + \tilde{a}_0\eta^{ab}\Psi_b - \tilde{a}_0\Omega^{ab}\xi_b \end{aligned}$$

- Связь между индексами $a \Rightarrow (\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \alpha(3)$:

$$\Omega^{ab} \Rightarrow \Omega^{(\alpha(3),\beta(3))} = \Sigma^{\alpha(3)\beta(3)} + \frac{1}{6\sqrt{10}}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}, \quad \Psi^a \Rightarrow \Psi^{\alpha(3)}$$

- Возможные обощения: теории с алгебрами $OSp(1,2n)$, содержат все четные целые спины $2,4,\ldots 2n$ и один фермион со спином $n+\frac{1}{2}$.

Гипергравитация

- $OSp(1,4)$ теория $(a = 1,2,3,4)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Omega_{ab}d\Omega^{ab} + \frac{i}{2}\Psi_a d\Psi^a + \frac{\tilde{a}_0}{3}\Omega_a{}^b\Omega_b{}^c\Omega_c{}^a - \frac{i\tilde{a}_0}{2}\Psi_a\Omega^{ab}\Psi_b$$

$$\begin{aligned} \delta\Omega^{ab} &= d\eta^{ab} + \tilde{a}_0\Omega^{(a}{}_c\eta^{b)c} + \frac{i\tilde{a}_0}{2}\Psi^{(a}\xi^{b)} \\ \delta\Psi^a &= d\xi^a + \tilde{a}_0\eta^{ab}\Psi_b - \tilde{a}_0\Omega^{ab}\xi_b \end{aligned}$$

- Связь между индексами $a \Rightarrow (\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \alpha(3)$:

$$\Omega^{ab} \Rightarrow \Omega^{(\alpha(3),\beta(3))} = \Sigma^{\alpha(3)\beta(3)} + \frac{1}{6\sqrt{10}}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}, \quad \Psi^a \Rightarrow \Psi^{\alpha(3)}$$

- Возможные обощения: теории с алгебрами $OSp(1,2n)$, содержат все четные целые спины $2,4,\ldots 2n$ и один фермион со спином $n+\frac{1}{2}$.

Гипергравитация

- $OSp(1,4)$ теория $(a = 1,2,3,4)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Omega_{ab}d\Omega^{ab} + \frac{i}{2}\Psi_a d\Psi^a + \frac{\tilde{a}_0}{3}\Omega_a{}^b\Omega_b{}^c\Omega_c{}^a - \frac{i\tilde{a}_0}{2}\Psi_a\Omega^{ab}\Psi_b$$

$$\begin{aligned} \delta\Omega^{ab} &= d\eta^{ab} + \tilde{a}_0\Omega^{(a}{}_c\eta^{b)c} + \frac{i\tilde{a}_0}{2}\Psi^{(a}\xi^{b)} \\ \delta\Psi^a &= d\xi^a + \tilde{a}_0\eta^{ab}\Psi_b - \tilde{a}_0\Omega^{ab}\xi_b \end{aligned}$$

- Связь между индексами $a \Rightarrow (\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = \alpha(3)$:

$$\Omega^{ab} \Rightarrow \Omega^{(\alpha(3),\beta(3))} = \Sigma^{\alpha(3)\beta(3)} + \frac{1}{6\sqrt{10}}\varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\Omega^{\alpha\beta}, \quad \Psi^a \Rightarrow \Psi^{\alpha(3)}$$

- Возможные обощения: теории с алгебрами $OSp(1,2n)$, содержат все четные целые спины $2,4,\ldots 2n$ и один фермион со спином $n+\frac{1}{2}$.

Электромагнитные взаимодействия спина 3/2

- Минимальное взаимодействие для безмассовой частицы невозможно

$$[D_\mu, D_\nu] \sim eF_{\mu\nu}$$

- Требуется либо ненулевой космологический член, либо ненулевая масса
- В любом случае фотон преобразуется нетривиально:

$$\delta\Psi_\mu = D_\mu\eta \quad \Rightarrow \quad \delta A_\mu \sim (\bar{\Psi}_\mu\eta)$$

- Коммутатор таких преобразований дает трансляцию

$$[\delta_1, \delta_2]A_\mu \sim (\bar{\eta}_2\gamma^\nu\eta_1)\partial_\nu A_\mu + \ldots$$

⇒ супергравитация.

Электромагнитные взаимодействия спина 3/2

- Минимальное взаимодействие для безмассовой частицы невозможно

$$[D_\mu, D_\nu] \sim eF_{\mu\nu}$$

- Требуется либо ненулевой космологический член, либо ненулевая масса
- В любом случае фотон преобразуется нетривиально:

$$\delta\Psi_\mu = D_\mu\eta \quad \Rightarrow \quad \delta A_\mu \sim (\bar{\Psi}_\mu\eta)$$

- Коммутатор таких преобразований дает трансляцию

$$[\delta_1, \delta_2]A_\mu \sim (\bar{\eta}_2\gamma^\nu\eta_1)\partial_\nu A_\mu + \ldots$$

⇒ супергравитация.

Электромагнитные взаимодействия спина 3/2

- Минимальное взаимодействие для безмассовой частицы невозможно

$$[D_\mu, D_\nu] \sim eF_{\mu\nu}$$

- Требуется либо ненулевой космологический член, либо ненулевая масса
- В любом случае фотон преобразуется нетривиально:

$$\delta\Psi_\mu = D_\mu\eta \quad \Rightarrow \quad \delta A_\mu \sim (\bar{\Psi}_\mu\eta)$$

- Коммутатор таких преобразований дает трансляцию

$$[\delta_1, \delta_2]A_\mu \sim (\bar{\eta}_2\gamma^\nu\eta_1)\partial_\nu A_\mu + \dots$$

⇒ супергравитация.

Электромагнитные взаимодействия спина 3/2

- Минимальное взаимодействие для безмассовой частицы невозможно

$$[D_\mu, D_\nu] \sim eF_{\mu\nu}$$

- Требуется либо ненулевой космологический член, либо ненулевая масса
- В любом случае фотон преобразуется нетривиально:

$$\delta\Psi_\mu = D_\mu\eta \quad \Rightarrow \quad \delta A_\mu \sim (\bar{\Psi}_\mu\eta)$$

- Коммутатор таких преобразований дает трансляцию

$$[\delta_1, \delta_2]A_\mu \sim (\bar{\eta}_2\gamma^\nu\eta_1)\partial_\nu A_\mu + \dots$$

⇒ супергравитация.