Теория поля с неэрмитовым лагранжианом

В. Е. Рочев

01.12. 2015 г.

Содержание

Введение. Неэрмитова квантовая теория

Новый класс моделей в квантовой механике и квантовой теории поля: неэрмитовы PT-симметричные модели.

Carl M. Bender: Repts. Prog. Phys. 70, 947 (2007);
J.Phys: Conf. Ser. 631, 012002, 205401 (2015)

Введение. Неэрмитова квантовая теория

Семейство PT-симметричных гамильтонианов:

$$H = p^2 + x^2(ix)^\varepsilon$$

$$H = H^{PT}$$

$$P: \; x \to -x, \; p \to -p$$

$$T: \; x \to x, \; p \to -p, \; i \to -i$$

При $\varepsilon > 0$:
а) Собственные значения гамильтониана действительны;
б) Энергетический спектр ограничен снизу $\Longrightarrow$ существует стабильное основное состояние;
в) Построено пространство состояний с положительной нормой $\Longrightarrow$ временная эволюция системы описывается унитарным оператором (сохранение вероятности).

Введение. Неэрмитова квантовая теория

Приложения PT-симметричных неэрмитовых систем:
– оптические системы;
– сверхпроводимость;
– микрорезонаторы;
– лазеры;
– диффузия атомов;
– электронные схемы;
– хаос и шум;
– механические системы;
– графен;
– метаматериалы.

Введение. Неэрмитова квантовая теория

При $\varepsilon = 1$

$$H = p^2 + ix^3$$

Полевой аналог (эвклид):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{ig}{6}\phi^3$$

Если ϕ – псевдоскаляр, то лагранжиан PT-симметричен.

Введение. Неэрмитова квантовая теория

C.M. Bender, V. Branchina and E. Messina: PR D85, 085001 (2012)

1) Исследование стабильности.
Эрмитова теория с лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{g}{6}\phi^3$$

не имеет стабильного основного состояния, поскольку в диаграммном разложении энергии основного состояния (сумма вакуумных петель) $E_0(g) = \Sigma A_{2n} g^{2n}$ все вклады одного знака $\Longrightarrow$ ряд расходится и не является рядом Стильтьеса $\Longrightarrow$ сумма по Борелю имеет разрез по действительной оси $\Longrightarrow$ энергия основного состояния комплексна.
Неэрмитова теория ($g \to ig$):
Ряд знакопеременный, т.е. является рядом Стильтьеса (как в ϕ^4 – теории) $\Longrightarrow$ сумма по Борелю является действительной $\Longrightarrow$ основное состояние (вероятно) стабильно.

Введение. Неэрмитова квантовая теория

2) Ренормгрупповой анализ.
Эрмитова теория при $d = 6$ асимптотически свободна:

$$\bar{g}^2(\mu) = \frac{g^2}{1 + \frac{3g^2}{128\pi^3} \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$

Macfarlane A.J. and Woo, G : Nucl.Phys. B77 (1974) 91;
Collins J.C.: “Renormalization“, Cambridge Univ. Press, 1984

Неэрмитова теория не является асимптотически свободной:

$$\bar{g}^2(\mu) = \frac{g^2}{1 - \frac{3g^2}{128\pi^3} \log \frac{\mu}{\mu_0}}$$

и по своим свойствам подобна теории ϕ^4_4.

Скалярная модель Юкавы

Лагранжиан ($x \in E_d$)

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\chi^2 + g\phi^*\phi\chi$$

ϕ – фион, χ – хион.
Вакуумный функционал (статсумма):

$$e^{Z(g)} = \int D(\phi, \phi^*, \chi) \exp\left\{ \int dx\, \mathcal{L}(x) \right\}.$$

Стабильность при $d = 0$

При $d = 0$:

$$e^{Z(g)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\phi d\phi^* d\chi \exp\left\{ -\phi^*\phi - \frac{1}{2}\chi^2 + g\phi^*\phi\chi \right\} =$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\phi d\phi^* \exp\left\{ -\phi^*\phi + \frac{g^2}{2}(\phi^*\phi)^2 \right\}.$$

Интеграл сходится при $g^2 < 0$ и расходится при $g^2 > 0$.

Теория возмущений и ренормгруппа

Перенормированные 1ЧН функции:
Пропагаторы фиона

$$\Delta^{-1}(p) = m^2 + p^2 - g^2 L(p^2, \mu^2, m^2) + \delta m^2 + p^2 \delta z_1 + O(g^4)$$

и хиона

$$D^{-1}(k) = \mu^2 + k^2 - g^2 L(k^2, m^2, m^2) + \delta\mu^2 + k^2 \delta z_2 + O(g^4).$$

Вершинная функция:

$$\Gamma(p_x, p_y) = g + g^3 \Lambda(p_x, p_y) + \delta g + O(g^5)$$

Здесь m, μ – перенормированные массы фиона и хиона, g –перенормированная константа связи, $\delta m^2, \delta z_1, \delta\mu^2, \delta z_2$ – контрчлены перенормировки массы и полей фиона и хиона соответственно, δg – контрчлен перенормировки константы связи (заряда).

Петлевые интегралы и контрчлены

$$L(p^2,\mu^2,m^2)=\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{\mu^2+(p-q)^2}\,\frac{1}{m^2+q^2},$$

$$\Lambda(p_x,p_y)=\int\frac{d^dq}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{\mu^2+q^2}\,\frac{1}{m^2+(p_x+q)^2}\,\frac{1}{m^2+(p_y-q)^2},$$

Контр-члены в схеме MB (размерная регуляризация $d=6-\epsilon$):

$$\delta m^2=-\frac{g^2(\mu^2+m^2)}{64\pi^3\epsilon},\ \delta\mu^2=-\frac{g^2m^2}{32\pi^3\epsilon},$$

$$\delta z_1=\delta z_2=-\frac{g^2}{192\pi^3\epsilon},\ \delta g=-\frac{g^3\kappa^{\epsilon/2}}{64\pi^3\epsilon}.$$

Здесь κ – размерный параметр 'т Хоофта, g – безразмерная константа связи ($g\to\kappa^{\epsilon/2}g$).

Ренормгруппа. Эрмитова теория

Уравнение ренормгруппы

$$\left(\kappa\frac{\partial}{\partial\kappa}+\beta\frac{\partial}{\partial g}-m^2\gamma_m\frac{\partial}{\partial m^2}-\mu^2\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial\mu^2}-\frac{n}{2}\gamma_1-\frac{l}{2}\gamma_2\right)\Gamma^{nl}=0.$$

Здесь Γ^{nl} – 1ЧН функция с n фионными и l хионными хвостами.
Ренормгрупповые коэффициенты:

$$\beta=\kappa\frac{dg}{d\kappa}=-\frac{\epsilon}{2}g-\frac{g^3}{256\pi^3}+O(g^5)$$

$$m^2\gamma_m=-\kappa\frac{dm^2}{d\kappa}=\frac{g^2}{192\pi^3}\left(2m^2+3\mu^2\right)+O(g^4),$$

$$\mu^2\gamma_\mu=-\kappa\frac{d\mu^2}{d\kappa}=\frac{g^2}{192\pi^3}\left(6m^2-\mu^2\right)+O(g^4),$$

$$\gamma_1=\kappa\frac{d\ln z_1}{d\kappa}=\gamma_2=\kappa\frac{d\ln z_2}{d\kappa}=\frac{g^2}{192\pi^3}+O(g^4).$$

Ренормгруппа. Эрмитова теория

Бегущая константа (инвариантный заряд) $\bar{g}(t,g)$ при $d=6$ есть решение уравнения

$$\frac{d\bar{g}}{dt} = \beta(\bar{g}) = -\frac{\bar{g}^3}{256\pi^3}$$

с граничным условием $\bar{g}(t=0,g)=g$. Здесь $t=\ln\frac{p^2}{p_0^2}$.
Решение этого уравнения есть

$$\bar{g}^2 = \frac{g^2}{1+\frac{g^2}{128\pi^3}\,t},$$

т.е. теория обладает типичным асимптотически свободным поведением при больших импульсах со всеми вытекающими следствиями.

Ренормгруппа. Неэрмитова теория

Для неэрмитовой PT-четной теории во всех формулах предыдущего раздела нужно сделать замену $g \to ig$, $\delta g \to i\delta g$. Так, выражение для β-функции примет вид

$$\beta = \kappa \frac{dg}{d\kappa} = -\frac{\epsilon}{2} g + \frac{g^3}{256\pi^3} + O(g^5)$$

и т.д.

β- функция в этой теории обращается в ноль, кроме гауссовой точки $g_* = 0$ еще в фиксированной точке типа Вильсона-Фишера:

$$g_*^2 = 128\pi^3\epsilon$$

Вблизи гауссовой точки поведение величин определяется их каноническими размерностями. Вблизи негауссовой фиксированной точки типа Вильсона-Фишера масштабное поведение модифицируется в соответствии с линеаризованными уравнениями ренормгруппы. При $d = 6$ фиксированные точки сливаются в одну гауссову точку.

Ренормгруппа. Неэрмитова теория

Инвариантный заряд в этом случае есть

$$\bar{g}^2 = \frac{g^2}{1 - \frac{g^2}{128\pi^3}\, t},$$

т. е. теория при больших импульсах обладает поведением тривиального типа и теория возмущений в этой асимптотической области заведомо неприменима.

Уравнения Швингера-Дайсона

Производящий функционал

$$e^{Z(\eta,j)} = \int D(\phi,\phi^*,\chi)\exp\left\{\int dx\,\mathcal{L}(x) - \phi^*(y)\cdot\eta(y,x)\cdot\phi(x) + j(x)\cdot\chi(x)\right\}.$$

Уравнения Швингера-Дайсона (УШД):

$$g\left[\frac{\delta^2 Z}{\delta\eta\delta j} + \frac{\delta Z}{\delta j}\frac{\delta Z}{\delta\eta}\right] = (m^2 - \partial^2)\frac{\delta Z}{\delta\eta} + \eta\cdot\frac{\delta Z}{\delta\eta} + \delta,$$

$$\frac{\delta Z}{\delta j} = D_c\cdot j - gD_c\cdot\frac{\delta Z}{\delta\eta}$$

Здесь $D_c = (\mu^2 - \partial^2)^{-1}$ и

$$A\cdot B \equiv \int dx_1\, A(x_1)B(x_1)$$

Уравнения Швингера-Дайсона

УШД для $\delta Z/\delta j$ позволяет выразить все хионные функции Грина через функции, содержащие только фионы.

Трехточечная хион-фионная функция:

$$V \equiv -\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta j \delta \eta}\right|_{\eta=j=0} = g D_c \cdot \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta^2}$$

Пропагатор хиона:

$$D \equiv \left.\frac{\delta^2 Z}{\delta j^2}\right|_{\eta=j=0} = D_c + g^2 D_c \cdot \frac{\delta^2 Z}{\delta \eta^2} \cdot D_c$$

и т.д.

Таким образом, для полного описания модели достаточно знать фионные функции Грина $\delta^n Z/\delta^n \eta$.

Исключая дифференцирование по j, мы получаем уравнение

$$g^2 D_c \cdot \left[\frac{\delta^2 Z}{\delta \eta^2} + \frac{\delta Z}{\delta \eta}\frac{\delta Z}{\delta \eta}\right] + (m^2 - \partial^2)\frac{\delta Z}{\delta \eta} + \eta \cdot \frac{\delta Z}{\delta \eta} + \delta = 0,$$

содержащее производные только по источнику η.

Преобразование Лежандра

Соотношение

$$\frac{\delta Z}{\delta \eta(y,x)} = -\Delta(x,y|\eta),$$

определяющее пропагатор фиона, можно рассматривать как уравнение, определяющее в неявном виде источник η как функционал от Δ : $\eta = \eta[\Delta]$. Переходя к новой функциональной переменной Δ, определим производящий функционал преобразования Лежандра

$$\Gamma[\Delta] = Z + \int dxdy\, \Delta(x,y)\, \eta(y,x).$$

Преобразование Лежандра

Из определения $\Gamma[\Delta]$ следует, что

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Delta(y,x)} = \eta(x,y|\Delta),$$

и уравнение Швингера-Дайсона принимает вид

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Delta} = \Delta^{-1} - (m^2 - \partial^2)\delta + g^2 D_c \Delta + g^2 D_c \cdot \frac{\delta^2 Z}{\delta\eta^2} \cdot \Delta^{-1}.$$

В этом уравнении предполагается, что $\delta^2 Z/\delta\eta^2$ является функционалом от новой функциональной переменной Δ, что можно сделать, используя условие связи

$$\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\Delta(y,x)\delta\Delta(y_1,x_1)} \cdot \frac{\delta^2 Z}{\delta\eta(y',x')\delta\eta(x_1,y_1)} = -\delta(x-y')\delta(x'-y),$$

которое следует из соотношения

$$\frac{\delta\eta(x,y)}{\delta\eta(y',x')} = \delta(x-y')\delta(x'-y).$$

Лестничное разложение

УШД для $\Gamma[\Delta]$ подсказывает непертурбативное разложение производящего функционала $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \cdots$, основанное на главном приближении

$$\frac{\delta\Gamma_0}{\delta\Delta(y,x)} = \Delta^{-1}(x,y) - (m^2 - \partial^2)\delta(x-y) + g^2 D_c(x-y)\Delta(x,y).$$

Уравнение следующего порядка есть

$$\frac{\delta\Gamma_1}{\delta\Delta(y,x)} = \int dx_1 dy_1 g^2 D_c(x-x_1)\,\frac{\delta^2 Z_0}{\delta\eta(x_1,x)\delta\eta(y_1,x_1)}\,\Delta^{-1}(y_1,y).$$

где $\delta Z_0/\delta\eta^2$ есть функционал от Δ, определяемый условием связи.

Уравнение для пропагатора фиона

При выключенном источнике уравнение главного приближения есть уравнение для пропагатора фиона:

$$\Delta_0^{-1}(x-y) = (m^2 - \partial_x^2)\delta(x-y) - g^2 D_c(x-y)\Delta_0(x-y).$$

Нормировка перенормированного пропагатора $\Delta(p^2)$ при нулевом импульсе:

$$\Delta^{-1}(p^2=0) = m_r^2,\ \left.\frac{d\Delta^{-1}}{dp^2}\right|_{p^2=0} = 1$$

(m_r – перенормированная масса)
Перенормированное уравнение в импульсном пространстве:

$$\Delta^{-1}(p^2) = m_r^2 + p^2 + \Sigma_r(p^2),$$

где $\Sigma_r(p^2) = \Sigma(p^2) - \Sigma(0) - p^2\Sigma'(0)$ и

$$\Sigma(p^2) = -g^2 \int \frac{d^6q}{(2\pi)^6}\, D_c(p-q)\Delta(p).$$

Безмассовый хион

$$D_c = 1/k^2$$

Безмассовое интегрирование в шестимерном пространстве:

$$\int \frac{d^6q}{(2\pi)^6}\,\frac{\Phi(q^2)}{(p-q)^2} =$$

$$= \frac{1}{128\pi^3}\Bigg[\int_0^{p^2} q^2\Phi(q^2)dq^2\left(\frac{q^2}{p^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{q^2}{p^2}\right)^2\right)+$$

$$+\int_{p^2}^{\infty} q^2\Phi(q^2)dq^2\left(1-\frac{1}{3}\,\frac{p^2}{q^2}\right)\Bigg]$$

Интегральное уравнение

Массовый оператор

$$\Sigma_r = -\frac{g^2 p^2}{384\pi^3} \int_0^{p^2} dq^2 \Delta(q^2) \left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)^3 .$$

Вводя безразмерную функцию $u(t) = \frac{1}{m_r^2} \Delta^{-1}$, где $t = \frac{p^2}{m_r^2}$, получаем для u одномерное интегральное уравнение

$$u(t) = 1 + t - \frac{g^2}{384\pi^3 t^2} \int_0^t \frac{dt'}{u(t')} (t - t')^3 .$$

Дифференциальное уравнение и асимптотика

$$(t^2 u)'''' = -\frac{g^2}{64\pi^3 u}.$$

Асимптотика при больших t:

$$u(t) \simeq At\sqrt{\log t},$$

где

$$A^2 = -\frac{g^2}{192\pi^3}.$$

Упрощенная модель

Аппроксимация массового оператора в области больших импульсов:

$$\Sigma_r = -\frac{g^2}{384\pi^3 p^2} \int^{p^2} dq^2 \Delta(q^2) \left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right)^3 \approx -\frac{g^2 p^2}{384\pi^3} \int^{p^2} dq^2 \Delta(q^2).$$

Уравнение для u:

$$u(t) = t - \frac{g^2 t}{384\pi^3} \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{u(t')}.$$

Точное решение:

$$u(t) = t \sqrt{1 - \frac{g^2}{192\pi^3} \log \frac{t}{t_0}}.$$

Вывод: пропагатор фиона в лестничном приближении в эрмитовой теории ($g^2 > 0$) обладает нефизической сингулярностью в эвклидовой области. В неэрмитовой теории ($g^2 < 0$) сингулярности в эвклиде нет, т.е. неэрмитова теория выглядит предпочтительнее.

Заключение

Неэрмитова скалярная модель Юкавы обладает по сравнению с эрмитовой версией той же модели рядом более привлекательных качеств как в пертурбативной области, так и за ее рамками.