Деформированные модели суперсимметричной квантовой механики

Сидоров Степан Сергеевич (ЛТФ ОИЯИ, Дубна)

По материалам кандидатской диссертации

Протвино 2015

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Иванов Евгений Алексеевич.

Содержание

Введение

- В последнее время возрос интерес к теориям с жёсткой (rigid) суперсимметрией (T. Dumitrescu, G. Festuccia, N. Seiberg, 2011, 2012) на основе искривлённых аналогов супергруппы Пуанкаре в различных измерениях.

- Предложен и исследован новый тип моделей $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперсимметричной механики. Эти модели обладают мировой $SU(2|1)$ суперсимметрией, которая представляет собой деформацию стандартной $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперсимметрии параметром m размерности массы.

- Суперсимметричная квантовая механика (E. Witten, 1981, 1982) – это простейшая $d=1$ суперсимметричная теория, которая отображает существенные особенности многомерных суперсимметричных теорий с помощью размерной редукции.

- В недавней работе «The Casimir Energy in Curved Space and its Supersymmetric Counterpart» (B. Assel, D. Cassani, L. Di Pietro, Z. Komargodski, J. Lorenzen, D. Martelli, 2015) была проведена размерная редукция $d=4$, $\mathcal{N}=1$ суперсимметричных моделей на $S^3 \times \mathbb{R}$, которая приводит к $SU(2|1)$ суперсимметричной механике.

Супералгебра $su(2|1)$

- Супералгебра $su(2|1)$ в стандартной форме записывается как

$$\{Q^i, \bar{Q}_j\} = 2mI^i_j + 2\delta^i_j \tilde{H}, \qquad \left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,,$$
$$\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\delta^i_j \bar{Q}_l - \delta^i_l \bar{Q}_j\,, \qquad \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\delta^i_j Q^k,$$
$$\left[\tilde{H}, \bar{Q}_l\right] = \frac{m}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[\tilde{H}, Q^k\right] = -\frac{m}{2}\,Q^k.$$

- Параметр m является параметром деформации с размерностью массы. В пределе $m = 0$, супералгебра $su(2|1)$ переходит в супералгебру Пуанкаре $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$.

- Безразмерные генераторы I^i_j соответствуют симметрии $SU(2)_{\text{int}}$, в то время как генератор $\tilde{H}$ с размерностью массы является внутренним генератором симметрии $U(1)_{\text{int}}$.

Центрально-расширенная супералгебра $\widehat{su}(2|1)$

- Супералгебру можно расширить внешним $U(1)_{\rm ext}$ генератором автоморфизмов F , который вращает суперзаряды как

$$\left[F,\bar{Q}_{l}\right]=-\frac{1}{2}\,\bar{Q}_{l}\,,\qquad \left[F,Q^{k}\right]=\frac{1}{2}\,Q^{k}.$$

- Массовый параметр m позволяет разделить внутренний генератор $\tilde{H}$ как $\tilde{H}\equiv H-mF$. Это приводит супералгебру $su(2|1)\oplus u(1)_{\rm ext}$ к центрально-расширенной супералгебре $\widehat{su}(2|1)$:

$$\{Q^{i},\bar{Q}_{j}\}=2m\left(I^{i}_{j}-\delta^{i}_{j}F\right)+2\delta^{i}_{j}H\,,\qquad \left[I^{i}_{j},I^{k}_{l}\right]=\delta^{k}_{j}I^{i}_{l}-\delta^{i}_{l}I^{k}_{j}\,,$$
$$\left[I^{i}_{j},\bar{Q}_{l}\right]=\frac{1}{2}\delta^{i}_{j}\bar{Q}_{l}-\delta^{i}_{l}\bar{Q}_{j}\,,\qquad \left[I^{i}_{j},Q^{k}\right]=\delta^{k}_{j}Q^{i}-\frac{1}{2}\delta^{i}_{j}Q^{k},$$
$$\left[F,\bar{Q}_{l}\right]=-\frac{1}{2}\,\bar{Q}_{l}\,,\qquad \left[F,Q^{k}\right]=\frac{1}{2}\,Q^{k}.$$

Определение суперпространства

- Суперпространство определяется как фактор-пространство:

$$\frac{\widehat{SU}(2|1)}{SU(2)_{\text{int}} \times U(1)_{\text{int}}} \sim \frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, H, I^i_j, F\}}{\{I^i_j, F\}}\,.$$

- Координаты суперпространства $\{t, \theta_i, \bar{\theta}^j\}$ сопоставлены с параметрами относящимся к генераторам фактор-пространства $\{H, Q^i, \bar{Q}_j\}$. Элемент фактор-пространства записывается как

$$g = \exp\left\{\left(1 - \frac{2m}{3}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\theta_i Q^i + \bar{\theta}^j\bar{Q}_j\right)\right\}\exp\{itH\}, \qquad \overline{(\theta_i)} = \bar{\theta}^i.$$

- Супергруппу $SU(2|1)$ можно реализовать левыми сдвигами на заданном выше фактор-пространстве. Для реализации $SU(2|1)$ на координатах суперпространства следует вычислить лево-ковариантные формы Картана. Они определяются с помощью стандартного соотношения

$$g^{-1}dg = \Delta\theta_i\, Q^i + \Delta\bar{\theta}^j\, \bar{Q}_j + i\,\Delta h^j_i\, I^i_j + i\,\Delta\hat{h}\, F + i\,\Delta t\, H\,.$$

Трансформационные свойства

- Трансформационные свойства суперпространства под действием левых сдвигов, с инфинитезимальными параметрами ϵ_i и $\bar{\epsilon}^i = \overline{(\epsilon_i)}$, можно найти по общей формуле

$$\left(1 + \epsilon_i Q^i + \bar{\epsilon}^i \bar{Q}_i\right) g = g' h \,. \qquad h = 1 + \left(i\delta h_i^j I_j^i + i\delta\hat{h} F\right).$$

- Преобразования координат суперпространства:

$$\delta\theta_i = \epsilon_i + 2m\,\bar{\epsilon}^k \theta_k \theta_i\,, \quad \delta\bar{\theta}^j = \bar{\epsilon}^i - 2m\,\epsilon_k \bar{\theta}^k \bar{\theta}^i, \quad \delta t = i\left(\epsilon_k \bar{\theta}^k + \bar{\epsilon}^k \theta_k\right).$$

- Инвариантная мера:

$$d\zeta := dt\, d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\left(1 + 2m\,\bar{\theta}^k \theta_k\right).$$

- Матричные генераторы $\tilde{I}_j^i$ и $\tilde{F}$ действуют на суперполе Φ^A с внешним индексом A некоторого $U(2)_{\rm int}$ представления, генерируя следующие пассивные нечётные преобразования суперполей:

$$\delta\Phi^A = \left(i\delta\hat{h}\tilde{F} + i\delta h_i^j \tilde{I}_j^i\right)\Phi^A.$$

Ковариантные производные

- Ковариантные производные можно найти из общего выражения для ковариантного дифференциала, действующего на суперполе $\Phi^A\left(t,\theta_i,\bar\theta^j\right)$:

$$\mathcal{D}\Phi^A := d\Phi^A + \left[i\,\Delta h_i^j\,\tilde{I}_j^i + i\,\Delta\hat{h}\,\tilde{F}\right]_A^{\;B}\Phi_B \equiv \left[\Delta\theta_i\mathcal{D}^i - \Delta\bar\theta^j\bar{\mathcal{D}}_j + \Delta t\,\mathcal{D}_{(t)}\right]\Phi^A\,.$$

- Ковариантные производные $\mathcal{D}^i$, $\bar{\mathcal{D}}_j$, $\mathcal{D}_{(t)}$ вычисляются из этого определения в виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i &= \left[1 + m\,\bar\theta^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\,\left(\bar\theta\,\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\theta_i} - m\,\bar\theta^i\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\theta_j} - i\bar\theta^i\partial_t \\
&\quad + m\,\bar\theta^i\tilde{F} - m\,\bar\theta^j\left(1 - m\,\bar\theta^k\theta_k\right)\tilde{I}_j^i\,, \\
\bar{\mathcal{D}}_j &= -\left[1 + m\,\bar\theta^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\,\left(\bar\theta\,\right)^2\right]\frac{\partial}{\partial\bar\theta^j} + m\,\bar\theta^k\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\bar\theta^k} + i\theta_j\partial_t \\
&\quad - m\,\theta_j\tilde{F} + m\,\theta_k\left(1 - m\,\bar\theta^l\theta_l\right)\tilde{I}_j^k\,, \\
\mathcal{D}_{(t)} &= \partial_t\,.
\end{aligned}$$

(Анти)коммутационные соотношения между ковариантными производными и матричными генераторами подобны центрально-расширенной суперsuccessалгебре $\widehat{su}(2|1)$:

$$\{\mathcal{D}^i, \bar{\mathcal{D}}_j\} = 2m\left(\tilde{I}^i_j - \delta^i_j \tilde{F}\right) + 2i\delta^i_j \mathcal{D}_{(t)}\,, \qquad \left[\tilde{I}^i_j, \tilde{I}^k_l\right] = \delta^k_j \tilde{I}^i_l - \delta^i_l \tilde{I}^k_j\,,$$

$$\tilde{I}^i_j \bar{\mathcal{D}}_l = \delta^i_l \bar{\mathcal{D}}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j \bar{\mathcal{D}}_l\,, \qquad \tilde{I}^i_j \mathcal{D}^k = \frac{1}{2}\,\delta^i_j \mathcal{D}^k - \delta^k_j \mathcal{D}^i,$$

$$\tilde{F}\bar{\mathcal{D}}_l = \frac{1}{2}\,\bar{\mathcal{D}}_l\,, \qquad \tilde{F}\mathcal{D}^k = -\,\frac{1}{2}\,\mathcal{D}^k.$$

Важной особенностью суперполевого $SU(2|1)$ формализма является наличие дополнительных матричных $U(2)_{\rm int}$ генераторов с нетривиальным действием на спинорные ковариантные производные.

Мультиплет $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$

Реальное и нейтральное суперполе X удовлетворяет $SU(2|1)$ ковариантизованным условиям стандартного мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$,

$$\varepsilon^{lj}\bar{\mathcal{D}}_l\,\bar{\mathcal{D}}_j\,X=\varepsilon_{lj}\mathcal{D}^l\,\mathcal{D}^j\,X=0\,,\qquad \left[\mathcal{D}^i,\bar{\mathcal{D}}_i\right]X=4m\,X-4c\,.$$

Здесь c – произвольное действительное число. Условия дают решение

$$\begin{aligned} X \quad = \quad & \left[1-m\,\bar{\theta}^k\theta_k+m^2\,(\theta)^2\,(\bar{\theta}\,)^2\right]x+\frac{\ddot{x}}{4}\,(\theta)^2\,(\bar{\theta}\,)^2+\bar{\theta}^j\theta_i\,B^i_j \\ & -i\,\bar{\theta}^k\theta_k\left(\theta_i\,\dot{\psi}^i+\bar{\theta}^j\,\dot{\bar{\psi}}_j\right)+\left(1-2m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\left(\theta_i\,\psi^i-\bar{\theta}^j\,\bar{\psi}_j\right) \\ & +c\,\bar{\theta}^j\theta_j\left(1-2m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right),\qquad B^k_k=0\,. \end{aligned}$$

Закон преобразования компонентных полей:

$$\begin{aligned} & \delta x=\bar{\epsilon}^k\bar{\psi}_k-\epsilon_k\psi^k,\qquad \delta\psi^i=i\bar{\epsilon}^i\dot{x}-m\,\bar{\epsilon}^i x+c\,\bar{\epsilon}^i+\bar{\epsilon}^k B^i_k\,, \\ & \delta B^i_j=-\,2i\left[\epsilon_j\dot{\psi}^i+\bar{\epsilon}^i\dot{\bar{\psi}}_j-\frac{1}{2}\,\delta^i_j\left(\epsilon_k\dot{\psi}^k+\bar{\epsilon}^k\dot{\bar{\psi}}_k\right)\right] \\ & \qquad +2m\left[\bar{\epsilon}^i\bar{\psi}_j-\epsilon_j\psi^i-\frac{1}{2}\,\delta^i_j\left(\bar{\epsilon}^k\bar{\psi}_k-\epsilon_k\psi^k\right)\right]. \end{aligned}$$

Суперполевой лагранжиан

- Суперполевой лагранжиан строится следующим образом:

$$\mathcal{L} = -\int d^2\theta\, d^2\bar\theta \left(1 + 2m\,\bar\theta^k\theta_k\right) f(X)\,.$$

- Решая интеграл Березина, получаем компонентный лагранжиан вне массовой оболочки (off-shell)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\;& \dot{x}^2 g(x) + i\left(\bar\psi_i\dot\psi^i - \dot{\bar\psi}_i\psi^i\right) g(x) - B^i_j\left(\frac{1}{2}\,\delta^j_i\bar\psi_k\psi^k - \bar\psi_i\psi^j\right) g'(x)\\ &+ \frac{1}{2}\,B^i_j B^j_i g(x) - \frac{1}{2}\left(\bar\psi_i\psi^i\right)^2 g''(x) + 2m\,\bar\psi_i\psi^i g(x) + mx\,\bar\psi_i\psi^i g'(x)\\ &- m^2x^2 g(x) - c\,g'(x)\,\bar\psi_i\psi^i + 2cm\,xg(x) - c^2 g(x)\,,\end{aligned}$$

где $f' = \partial_x f$ и $g := f''$.

- В частном случае $c = 0$, лагранжиан на массовой оболочке (on-shell) переходит в лагранжиан модели со слабой суперсимметрией, введённой в (A. Smilga, 2004).

Модель гармонического осциллятора

- Рассмотрим простейший лагранжиан соответствующий выбору $f(X) = X^2/4$, $c = 0$:

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{m^2 x^2}{2} + \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_i \dot{\psi}^i - \dot{\bar{\psi}}_i \psi^i\right) + m\,\bar{\psi}_i \psi^i,$$

- Этот лагранжиан инвариантен относительно (on-shell) преобразований

$$\delta x = \bar{\epsilon}^k \bar{\psi}_k - \epsilon_k \psi^k, \qquad \delta\psi^i = i\bar{\epsilon}^i \dot{x} - m\,\bar{\epsilon}^i x\,.$$

- Канонический гамильтониан:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{m^2 x^2}{2} + m\,\psi^i \bar{\psi}_i\,.$$

- Скобки Пуассона и Дирака вводятся как

$$\{x, p\} = 1\,, \qquad \{\psi^i, \bar{\psi}_j\} = -i\delta^i_j\,.$$

Квантование

- Скобки квантуются стандартным способом

$$[x, p] = i\,, \quad \{\psi^i, \bar{\psi}_j\} = \delta^i_j\,, \quad p = -i\partial_x\,,\ \bar{\psi}_j = \partial/\partial\psi^j\,.$$

- Квантовый гамильтониан представлен в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\,(p + imx)\,(p - imx) + m\,\psi^i\bar{\psi}_i\,,$$

где мы используем соотношение

$$[(p - imx)\,, (p + imx)] = 2m\,.$$

- Квантовые генераторы $SU(2|1)$:

$$\hat{Q}^i = \psi^i\,(p - imx)\,, \qquad \hat{\bar{Q}}_i = \bar{\psi}_i\,(p + imx)\,,$$
$$\hat{F} = \frac{1}{2}\,\psi^k\bar{\psi}_k\,, \qquad \hat{I}^i_j = \psi^i\bar{\psi}_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\psi^k\bar{\psi}_k\,.$$

Волновые функции

Общая супер волновая функция $\Omega^{(\ell)}$ на уровне энергии ℓ выявляет четырехкратное вырождение из-за разложения по ψ

$$\Omega^{(\ell)} = a^{(\ell)}\,|\ell\rangle + b_i^{(\ell)}\psi^i\,|\ell-1\rangle + \frac{1}{2}\,c^{(\ell)}\,\varepsilon_{ij}\psi^i\psi^j\,|\ell-2\rangle, \qquad \ell \geqslant 2\,,$$

где $|\ell\rangle$, $|\ell-1\rangle$, $|\ell-2\rangle$ являются функциями гармонического осциллятора на соответствующих уровнях. $a^{(\ell)}, b^{(\ell)}, c^{(\ell)}$ – некоторые численные коэффициенты. Мы рассматриваем операторы $p \pm imx$ в качестве операторов рождения и уничтожения и налагаем стандартные физические условия

$$\bar{\psi}_k\,|\ell\rangle = 0\,, \qquad (p-imx)\,|0\rangle = 0\,, \qquad (p+imx)\,|\ell\rangle = |\ell+1\rangle.$$

Заметим, что основное состояние ($\ell = 0$) и первое возбужденное состояние ($\ell = 1$) являются специальными, в том смысле, что они охватывают неравное число бозонов и фермионов:

$$\Omega^{(0)} = a^{(0)}\,|0\rangle\,, \qquad \Omega^{(1)} = a^{(1)}\,|1\rangle + b_i^{(1)}\psi^i\,|0\rangle\,.$$

- Спектр гамильтониана:

$$\hat{H}\,\Omega^{(\ell)} = m\,\ell\,\Omega^{(\ell)}, \qquad m > 0\,, \quad \ell \geqslant 0\,.$$

- Операторы Казимира супергруппы $SU(2|1)$ сводятся к виду

$$m^2 C_2 = \hat{H}\left(\hat{H} - m\right), \qquad m^3 C_3 = \hat{H}\left(\hat{H} - m\right)\left(\hat{H} - \frac{m}{2}\right).$$

- Основное состояние является синглетом $SU(2|1)$, в то время как волновые функции для $\ell = 1$ образуют фундаментальное представление $SU(2|1)$. Волновые функции для $\ell \geqslant 2$ образуют типические $(2|2)$ представления.

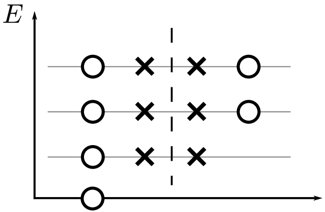

Рис. 1 : Вырождение уровней Ландау. Круги и кресты обозначают бозонные и фермионные состояния.

Мультиплет (2, 4, 2)

- Супергруппа $SU(2|1)$ допускает наличие двух взаимно сопряжённых комплексных фактор-пространства, которые могут быть идентифицированы с левым и правым киральными подпространствами:

$$(t_L, \theta_i)\,, \qquad \left(t_R, \bar{\theta}^i\right).$$

- Соответствующие комплексные бозонные координаты связаны с координатой времени t через

$$t_L = t + i\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{i}{2}\,m\,(\theta)^2\,(\bar{\theta}\,)^2\,.$$

- Преобразования $SU(2|1)$ на координатах (t_L, θ_i), $\left(t_R, \bar{\theta}^i\right)$ замкнуты и реализованы как

$$\delta\theta_i = \epsilon_i + 2m\,\bar{\epsilon}^k\theta_k\theta_i\,, \qquad \delta t_L = 2i\,\bar{\epsilon}^k\theta_k\,, \quad \text{и к.с..}$$

Киральное суперполе

- Мультиплет $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ описывается киральным суперполем $\Phi\left(t,\theta,\bar{\theta}\right)$, который подчиняется условиям киральности и обладает фиксированным внешним зарядом относительно группы $U(1)_{\rm int}$:

$$\bar{\mathcal{D}}_j\Phi = 0, \qquad \tilde{I}^i_j\Phi = 0, \qquad \tilde{F}\Phi = 2\kappa\Phi\,.$$

- Условие киральности даёт решение

$$\Phi\left(t,\theta,\bar{\theta}\right) = \left(1 + 2m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)^{-\kappa}\Phi_L\left(t_L,\theta\right),$$
$$\Phi_L\left(t_L,\theta\right) = z + \sqrt{2}\,\theta_i\xi^i + \varepsilon^{ij}\theta_i\theta_j B\,.$$

- Киральное суперполе с $\tilde{F}$ зарядом 2κ преобразуется как

$$\delta\Phi = 2\kappa m\left(\epsilon_i\bar{\theta}^i + \bar{\epsilon}^j\theta_j\right)\Phi\,, \qquad \delta\Phi_L = 4\kappa m\,\bar{\epsilon}^k\theta_k\,\Phi_L\,.$$

- Законы преобразования суперполей индуцируют следующие преобразования для компонентных полей:

$$\delta z = -\sqrt{2}\,\epsilon_i\xi^i, \qquad \delta\xi^i = \sqrt{2}\,\bar{\epsilon}^i\left(i\dot{z} - 2\kappa m z\right) - \sqrt{2}\,\epsilon^i B,$$
$$\delta B = -\sqrt{2}\,\bar{\epsilon}_i\left[i\dot{\xi}^i - m\left(2\kappa - 1\right)\xi^i\right].$$

Инвариантный лагранжиан

- Общий суперполевой лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{kin.}} = \frac{1}{4}\int d^2\theta\, d^2\bar{\theta}\left(1 + 2m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right) f\left(\Phi, \Phi^\dagger\right).$$

  где функция f – потенциал Кэлера. Если $\kappa \neq 0$, то он должен удовлетворять условию $f\left(\Phi, \Phi^\dagger\right) = \tilde{f}\left(\Phi\Phi^\dagger\right)$.

- Бозонный лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{\text{kin.}}\,\big|_{\text{bosonic}} = g\dot{\bar{z}}\dot{z} + 2i\kappa m\left(\dot{\bar{z}}z - \dot{z}\bar{z}\right) g - \frac{im}{2}\left(\dot{\bar{z}}f_{\bar{z}} - \dot{z}f_z\right) - m^2 V\,,\\
&V = \kappa\left(\bar{z}\partial_{\bar{z}} + z\partial_z\right) f - \kappa^2\left(\bar{z}\partial_{\bar{z}} + z\partial_z\right)^2 f\,,\\
&g = \partial_z\partial_{\bar{z}} f\,.
\end{aligned}$$

- Таким образом, стандартный $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ кинетический лагранжиан деформирован членом типа WZ (Весса-Зумино) и потенциальным членом. Потенциальный член $\sim m^2$ исчезает при $\kappa = 0$, но WZ член исчезает только в пределе $m = 0$.

Обобщённое условие киральности

- Суперпространство $SU(2|1)$ можно определить таким образом, что в новом фактор-пространстве гамильтониан $\tilde{H}$ является полным внутренним $U(1)_{\rm int}$ генератором:

$$\frac{SU(2|1)}{SU(2)_{\rm int}} \sim \frac{\{Q^i, \bar{Q}_j, \tilde{H}, I^i_j\}}{\{I^i_j\}}\,.$$

- Ковариантные производные:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i &= e^{-\frac{imt}{2}}\left\{\left[1 + m\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\,(\bar{\theta}\,)^2\right]\frac{\partial}{\partial\theta_i} - m\,\bar{\theta}^i\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right.\\
&\qquad \left. - i\bar{\theta}^i\partial_t - m\,\bar{\theta}^j\left(1 - m\,\bar{\theta}^k\theta_k\right)\tilde{I}^i_j\right\},\\
\bar{\mathcal{D}}_j &= e^{\frac{imt}{2}}\left\{-\left[1 + m\,\bar{\theta}^k\theta_k - \frac{3m^2}{8}\,(\theta)^2\,(\bar{\theta}\,)^2\right]\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} + m\,\bar{\theta}^k\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^k}\right.\\
&\qquad \left. + i\theta_j\partial_t + m\,\theta_k\left(1 - m\,\bar{\theta}^l\theta_l\right)\tilde{I}^k_j\right\}.
\end{aligned}$$

- Стандартная форма киральных и антикиральных условий записывается в виде

$$\bar{\mathcal{D}}_i \Phi = 0\,, \qquad \mathcal{D}^i \bar{\Phi} = 0\,.$$

- В рамках предыдущего суперпротранства, эти условия были однозначно заданы ковариантностью по отношению к подгруппе стабильности $U(2)_{int} = SU(2)_{int} \times U(1)_{int}$.

- В данном случае, подгруппа стабильности меняется на группу $SU(2)_{int}$. Тогда киральное условие может быть обобщено как

$$\big(\cos\lambda\,\bar{\mathcal{D}}_i - \sin\lambda\,\mathcal{D}_i\big)\,\varphi = 0\,.$$

- Зависимость от λ не может быть удалена из этих условий переопределением грассмановых переменных θ_i , $\bar{\theta}^k$. Это возможно только в пределе $m = 0$, когда такие повороты становятся поворотами группы автоморфизмов супералгебры $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$.

Киральное подпространство

Киральное подпространство $\left(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\right)$ определено как

$$\hat{t}_L = t + i\,\bar{\hat{\theta}}^k\hat{\theta}_k\,, \qquad \hat{\theta}_i = \left(\cos\lambda\,\theta_i e^{\frac{i}{2}mt} + \sin\lambda\,\bar{\theta}_i e^{-\frac{i}{2}mt}\right)\left(1 - \frac{m}{2}\,\bar{\theta}^k\theta_k\right).$$

В базисе $\{\hat{t}_L, \hat{\theta}_i, \bar{\hat{\theta}}^k\}$ киральное условие сводится к грассмановым условиям Коши-Римана

$$\partial_{\bar{\hat{\theta}}^k}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi\left(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\right).$$

Как и должно быть, координаты замкнуты относительно $SU(2|1)$ преобразований

$$\begin{aligned}
\delta\hat{t}_L &= 2i\cos\lambda\,\bar{\epsilon}^k\hat{\theta}_k\,e^{-\frac{i}{2}m\hat{t}_L} - 2i\sin\lambda\,\epsilon^k\hat{\theta}_k\,e^{\frac{i}{2}m\hat{t}_L},\\
\delta\hat{\theta}_i &= \cos\lambda\left(\epsilon_i\,e^{\frac{i}{2}m\hat{t}_L} + m\,\bar{\epsilon}^k\hat{\theta}_k\hat{\theta}_i\,e^{-\frac{i}{2}m\hat{t}_L}\right)\\
&\quad + \sin\lambda\left(\bar{\epsilon}_i\,e^{-\frac{i}{2}m\hat{t}_L} + m\,\epsilon^k\hat{\theta}_k\hat{\theta}_i\,e^{\frac{i}{2}m\hat{t}_L}\right).
\end{aligned}$$

Киральное суперполе

Новые ковариантные производные удовлетворяют соотношению

$$\{\tilde{\bar{\mathcal{D}}}_k, \tilde{\bar{\mathcal{D}}}_j\} = -\,2m \sin 2\lambda\, \tilde{I}_{ij} \qquad \text{and} \;\; \text{c.c.},$$

которое означает, что киральное суперполе φ не может нести какой-либо внешний $SU(2)_{\text{int}}$ индекс, т.е оно является синглетом по $SU(2)_{\text{int}}$. Левое киральное суперполе $\varphi(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i)$ задаётся стандартным разложением

$$\varphi\left(\hat{t}_L, \hat{\theta}_i\right) = z + \sqrt{2}\,\hat{\theta}_k \xi^k + (\hat{\theta})^2 B, \qquad \overline{(\xi^i)} = \bar{\xi}_i\,.$$

Преобразования полей явно зависят от времени:

$$\begin{aligned}
\delta z &= -\sqrt{2}\cos\lambda\,\epsilon_k \xi^k\, e^{\frac{i}{2}mt} - \sqrt{2}\sin\lambda\,\bar{\epsilon}_k \xi^k\, e^{-\frac{i}{2}mt},\\
\delta\xi^i &= \sqrt{2}\,\bar{\epsilon}^i\,(i\cos\lambda\,\dot{z} - \sin\lambda\, B)\, e^{-\frac{i}{2}mt} - \sqrt{2}\,\epsilon^i\,(i\sin\lambda\,\dot{z} + \cos\lambda\, B)\, e^{\frac{i}{2}mt},\\
\delta B &= -\sqrt{2}\,\bar{\epsilon}_k \cos\lambda\left(i\,\dot{\xi}^k + \frac{m}{2}\,\xi^k\right) e^{-\frac{i}{2}mt} + \sqrt{2}\,\epsilon_i \sin\lambda\left(i\,\dot{\xi}^i - \frac{m}{2}\,\xi^i\right) e^{\frac{i}{2}mt}.
\end{aligned}$$

Лагранжиан

- Инвариантное действие обобщенных киральных суперполей $\varphi(t_L, \hat{\theta})$ определяется потенциалом Кэлера $f(\varphi, \bar{\varphi})$:

$$S_{\text{kin.}} = \frac{1}{4}\int d\hat{\zeta}\, f(\varphi, \bar{\varphi}) := \int dt\, \mathcal{L}_{\text{kin.}}\,.$$

- Устранение вспомогательные поля, мы получим лагранжиан

$$\mathcal{L}^{\text{on}}_{\text{kin.}}\big|_{\text{bosonic}} = g\dot{\bar{z}}\dot{z} - \frac{i}{2}\, m\cos 2\lambda\left(\dot{\bar{z}} f_{\bar{z}} - \dot{z} f_z\right) - \frac{m^2}{4} g^{-1}\sin^2 2\lambda\, f_z f_{\bar{z}}.$$

- Соответствующий суперсимметричный гамильтониан совпадает с гамильтонианом суперсимметричного осциллятора Кэлера (S. Bellucci, A. Nersessian, 2004).

- Суперзаряды явно зависят от времени, $Q^i \sim e^{\frac{i}{2}mt}$, $\bar{Q}_j \sim e^{-\frac{i}{2}mt}$, и эта зависимость такова, что они удовлетворяют обобщённым законам сохранения:

$$\frac{d}{dt}\, Q^i = \partial_t Q^i + \{Q^i, \tilde{H}\} = 0\,, \qquad \frac{d}{dt}\, \bar{Q}_j = \partial_t \bar{Q}_j + \{\bar{Q}_j, \tilde{H}\} = 0\,.$$

Гармоническое суперпространство SU(2|1)

Первым этапом построения гармонического суперпространства $SU(2|1)$ является переход к новому базису в соответствующей центрально-расширенной супералгебре $\widehat{su}(2|1)$, в котором все генераторы характеризуются их $U(1)$ зарядами. Используя обозначения

$$
\begin{aligned}
&Q^1 \equiv Q^+, \quad Q^2 \equiv Q^-, \quad \bar{Q}_1 \equiv \bar{Q}^-, \quad \bar{Q}_2 \equiv -\bar{Q}^+,\\
&I^{++} \equiv I^1_2\,, \quad I^{--} \equiv I^2_1\,, \quad I^0 \equiv I^1_1 - I^2_2 = 2I^1_1\,,
\end{aligned}
$$

мы можем переписать супералгебру в виде

$$
\begin{aligned}
&\{Q^-, \bar{Q}^+\} = mI^0 - 2H + 2mF, \qquad \{Q^+, \bar{Q}^-\} = mI^0 + 2H - 2mF,\\
&\{Q^\pm, \bar{Q}^\pm\} = \mp\, 2mI^{\pm\pm}, \qquad [I^0, I^{\pm\pm}] = \pm\, 2I^{\pm\pm}, \quad [I^{++}, I^{--}] = I^0,\\
&[I^0, \bar{Q}^\pm] = \pm\, \bar{Q}^\pm, \qquad [I^{++}, \bar{Q}^-] = \bar{Q}^+, \qquad [I^{--}, \bar{Q}^+] = \bar{Q}^-,\\
&[I^0, Q^\pm] = \pm\, Q^\pm, \qquad [I^{++}, Q^-] = Q^+, \qquad [I^{--}, Q^+] = Q^-,\\
&[F, \bar{Q}^\pm] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}^\pm\,, \qquad [F, Q^\pm] = \frac{1}{2}\,Q^\pm.
\end{aligned}
$$

- Мы можем расширить эту супералгебру генераторами $\{T^0, T^{++}, T^{--}\}$ группы автоморфизмов $SU(2)_{\text{ext}}$, которые вращают суперзаряды как внутренние $SU(2)_{\text{int}}$ генераторы $\{I^0, I^{++}, I^{--}\}$. Для согласованности, $SU(2)_{\text{ext}}$ генераторы должны вращать таким же образом индексы генераторов I^i_j , т. е. эти группы $SU(2)$ образуют полу-прямое произведение

$$[T, I] \propto I.$$

- Гармоническое суперпространство $SU(2|1)$ можно определить как фактор-пространство

$$\frac{\{H, Q^{\pm}, \bar{Q}^{\pm}, F, I^{\pm\pm}, I^0, T^{\pm\pm}, T^0\}}{\{F, I^{++}, I^0, I^{--} - T^{--}, T^0\}} \sim \left(t_{(A)}, \theta^{\pm}, \bar{\theta}^{\pm}, w_i^{\pm}\right) =: \zeta_H \,.$$

Это суперпространство – деформация стандартного плоского $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ гармонического суперпространства (E. Ivanov, O. Lechtenfeld, 2003).

- Суперпространство $SU(2|1)$ в центральном базисе составляет набор координат $\zeta = \left(t, \theta_i, \bar\theta^j\right)$. Расширяя этот базис гармоническими координатами $w_i^{\pm}$,

$$w^{+i} w_i^- = 1\,,$$

мы получаем центральный базис гармонического суперпространства $SU(2|1)$:

$$\zeta_C = \left(t, \theta_i, \bar\theta^j, w_i^{\pm}\right).$$

- Аналитический базис ζ_H связан с центральным базисом ζ_C следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\theta^i w_i^- = \theta^-, \qquad && \theta^i w_i^+ = \theta^+ \left(1 + m\,\bar\theta^+\theta^- - m\,\bar\theta^-\theta^+\right),\\
&\bar\theta^k w_k^- = \bar\theta^-, \qquad && \bar\theta^k w_k^+ = \bar\theta^+ \left(1 + m\,\bar\theta^+\theta^- - m\,\bar\theta^-\theta^+\right),\\
&t = t_{(A)} + i\left(\bar\theta^-\theta^+ + \bar\theta^+\theta^-\right).
\end{aligned}$$

- $SU(2|1)$ инвариантная мера $d\zeta$ расширяется до меры $d\zeta_H = dw\, d\zeta$, которая в аналитическом базисе записана в виде

$$d\zeta_H := dw\, dt_{(A)}\, d\bar\theta^- d\theta^- d\bar\theta^+ d\theta^+ \left(1 + m\,\bar\theta^+\theta^- - m\,\bar\theta^-\theta^+\right).$$

- Суперсимметричные $SU(2|1)$ преобразования:

$$\begin{aligned}
&\delta\theta^+ = \epsilon^+ + m\,\bar\theta^+\theta^+\epsilon^- , && \delta\bar\theta^+ = \bar\epsilon^+ - m\,\bar\theta^+\theta^+\bar\epsilon^- ,\\
&\delta\theta^- = \epsilon^- + 2m\,\bar\epsilon^-\theta^-\theta^+ , && \delta\bar\theta^- = \bar\epsilon^- + 2m\,\epsilon^-\bar\theta^-\bar\theta^+ ,\\
&\delta w_i^+ = -\,m\left(\bar\theta^+\epsilon^+ + \theta^+\bar\epsilon^+\right) w_i^- , && \delta w_i^- = 0 ,\\
&\delta t_{(A)} = 2i\left(\epsilon^-\bar\theta^+ + \theta^+\bar\epsilon^-\right) ,
\end{aligned}$$

  где

$$\epsilon^\pm := \epsilon^i w_i^\pm , \qquad \bar\epsilon^\pm := \bar\epsilon^k w_k^\pm .$$

- Из этих преобразований следует, что $SU(2|1)$ гармоническое суперпространство ζ_H содержит замкнутое аналитическое гармоническое подпространство, параметризованное сокращённым набором координат

$$\frac{\{H, Q^\pm, \bar Q^\pm, F, I^{\pm\pm}, I^0, T^{\pm\pm}, T^0\}}{\{Q^+, \bar Q^+, F, I^{++}, I^0, I^{--} - T^{--}, T^0\}} \sim \left(t_{(A)}, \bar\theta^+, \theta^+, w_i^\pm\right) \sim \zeta_{(A)} .$$

  Мера интегрирования аналитического подпространства:

$$d\zeta^{--}_{(A)} := dw\, dt_{(A)}\, d\bar\theta^+ d\theta^+ .$$

Ковариантные производные

Мы используем стандартные обозначения для частных гармонических производных:

$$\partial^{\pm\pm} := w_i^{\pm}\frac{\partial}{\partial w_i^{\mp}}\,, \qquad \partial^{0} := w_i^{+}\frac{\partial}{\partial w_i^{+}} - w_i^{-}\frac{\partial}{\partial w_i^{-}}\,,$$
$$[\partial^{++},\partial^{--}] = \partial^{0}\,, \quad [\partial^{0},\partial^{\pm\pm}] = \pm\,2\partial^{\pm\pm}\,.$$

Деформированные ковариантные гармонические производные:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{++} &= \left(1 + m\,\bar\theta^{+}\theta^{-} - m\,\bar\theta^{-}\theta^{+}\right)^{-1}\partial^{++} + 2i\,\theta^{+}\bar\theta^{+}\partial_{(A)} - 2m\,\theta^{+}\bar\theta^{+}\tilde F \\
&\quad + \theta^{+}\frac{\partial}{\partial\theta^{-}} + \bar\theta^{+}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{-}}\,, \\
\mathcal{D}^{--} &= \left(1 + m\,\bar\theta^{+}\theta^{-} - m\,\bar\theta^{-}\theta^{+}\right)\partial^{--} + 2i\,\theta^{-}\bar\theta^{-}\partial_{(A)} - 2m\,\theta^{-}\bar\theta^{-}\tilde F \\
&\quad + \theta^{-}\frac{\partial}{\partial\theta^{+}} + \bar\theta^{-}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{+}}\,, \\
\mathcal{D}^{0} &= \partial^{0} + \left(\theta^{+}\frac{\partial}{\partial\theta^{+}} + \bar\theta^{+}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{+}}\right) - \left(\theta^{-}\frac{\partial}{\partial\theta^{-}} + \bar\theta^{-}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{-}}\right), \\
\mathcal{D}_{(A)} &= \partial_{(A)}\,, \qquad \partial_{(A)} = \frac{\partial}{\partial t_{(A)}}\,.
\end{aligned}$$

Деформированные ковариантные спинорные производные:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{-} &= -\frac{\partial}{\partial\theta^{+}} - 2i\,\bar{\theta}^{-}\partial_{(A)} + 2m\,\bar{\theta}^{-}\tilde{F} - m\,\bar{\theta}^{-}\left(\theta^{+}\frac{\partial}{\partial\theta^{+}} + \bar{\theta}^{+}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{+}}\right) \\
&\quad - m\,\bar{\theta}^{-}\partial^{0} + m\,\bar{\theta}^{+}\partial^{--}, \\
\bar{\mathcal{D}}^{-} &= \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{+}} - 2i\,\theta^{-}\partial_{(A)} + 2m\,\theta^{-}\tilde{F} + m\,\theta^{-}\left(\theta^{+}\frac{\partial}{\partial\theta^{+}} + \bar{\theta}^{+}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{+}}\right) \\
&\quad + m\,\theta^{-}\partial^{0} - m\,\theta^{+}\partial^{--}, \\
\mathcal{D}^{+} &= \frac{\partial}{\partial\theta^{-}} + m\,\bar{\theta}^{-}\left(1 + m\,\theta^{-}\bar{\theta}^{+}\right)\partial^{++} + 2im\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\partial_{(A)} - 2m^{2}\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\tilde{F} \\
&\quad + m\,\bar{\theta}^{-}\theta^{+}\frac{\partial}{\partial\theta^{-}} + m\,\bar{\theta}^{-}\bar{\theta}^{+}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{-}}, \\
\bar{\mathcal{D}}^{+} &= -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{-}} - m\,\theta^{-}\left(1 - m\,\theta^{+}\bar{\theta}^{-}\right)\partial^{++} - 2im\,\theta^{-}\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\partial_{(A)} + 2m^{2}\,\theta^{-}\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\tilde{F} \\
&\quad - m\,\theta^{-}\theta^{+}\frac{\partial}{\partial\theta^{-}} - m\,\theta^{-}\bar{\theta}^{+}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{-}}\,.
\end{aligned}$$

Здесь, матричный генератор $\tilde{F}$ соответствует внутренней $U(1)_{\text{int}}$ симметрии.

(Анти)коммутационные соотношения между ними подобны супералгебре $\widehat{su}(2|1)$:

$$
\begin{aligned}
&\{\bar{\mathcal{D}}^{+}, \mathcal{D}^{-}\} = m\mathcal{D}^{0} - 2m\tilde{F} + 2i\mathcal{D}_{(A)}\,, \qquad \{\bar{\mathcal{D}}^{-}, \mathcal{D}^{+}\} = m\mathcal{D}^{0} + 2m\tilde{F} - 2i\mathcal{D}_{(A)}\,, \\
&\{\mathcal{D}^{\pm}, \bar{\mathcal{D}}^{\pm}\} = \mp\, 2m\mathcal{D}^{\pm\pm}, \qquad \left[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{--}\right] = \mathcal{D}^{0}, \qquad \left[\mathcal{D}^{0}, \mathcal{D}^{\pm\pm}\right] = \pm\, 2\mathcal{D}^{\pm\pm}, \\
&\left[\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{-}\right] = \mathcal{D}^{+}, \qquad \left[\mathcal{D}^{--}, \mathcal{D}^{+}\right] = \mathcal{D}^{-}, \qquad \left[\mathcal{D}^{0}, \mathcal{D}^{\pm}\right] = \pm\, \mathcal{D}^{\pm}, \\
&\left[\mathcal{D}^{++}, \bar{\mathcal{D}}^{-}\right] = \bar{\mathcal{D}}^{+}, \qquad \left[\mathcal{D}^{--}, \bar{\mathcal{D}}^{+}\right] = \bar{\mathcal{D}}^{-}, \qquad \left[\mathcal{D}^{0}, \bar{\mathcal{D}}^{\pm}\right] = \pm\, \bar{\mathcal{D}}^{\pm}, \\
&\tilde{F}\,\mathcal{D}^{\pm} = -\frac{1}{2}\,\mathcal{D}^{\pm}, \qquad \tilde{F}\,\bar{\mathcal{D}}^{\pm} = \frac{1}{2}\,\bar{\mathcal{D}}^{\pm}.
\end{aligned}
$$

Условие аналитичности

Мы можем наложить на гармонические суперполя грассмановы условия аналитичности

$$\mathcal{D}^{+}\phi = \bar{\mathcal{D}}^{+}\phi = 0\,.$$

Нестандартной особенностью рассматриваемого случая является то, что ковариантная гармоническая производная $\mathcal{D}^{++}$ появляется в антикоммутаторе спинорных производных

$$\{\mathcal{D}^{+}, \bar{\mathcal{D}}^{+}\} = -\,2m\mathcal{D}^{++}.$$

Таким образом, грассмановы условия аналитичности предполагают также гармоническое условие аналитичности

$$\mathcal{D}^{++}\phi = 0\,.$$

В этом состоит принципиальное отличие от плоских $\mathcal{N}=4$, $d=1$ гармонических аналитических суперполей, для которых грассмановы условия аналитичности не обязательно подразумевают гармоническое условие.

Производные $\mathcal{D}^+$, $\bar{\mathcal{D}}^+$ удобно представить в виде

$$\mathcal{D}^+ = \frac{\partial}{\partial\theta^-} + m\,\bar{\theta}^-\mathcal{D}^{++}, \qquad \bar{\mathcal{D}}^+ = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^-} - m\,\theta^-\mathcal{D}^{++}.$$

С учётом гармонического условия $\mathcal{D}^{++}\phi = 0$, производные $\mathcal{D}^+$ и $\bar{\mathcal{D}}^+$ становятся короткими на аналитических суперполях,

$$\left(\mathcal{D}^+\,,\;\bar{\mathcal{D}}^+\right)\phi \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\partial}{\partial\theta^-}\,,\;-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^-}\right)\phi\,.$$

В результате условия аналитичности означают, что суперполе ϕ определено на аналитическом подпространстве $\zeta_{(A)}$:

$$\phi = \phi(\zeta_{(A)})\,.$$

Мультиплет (4, 4, 0)

- $SU(2|1)$ аналог мультиплета $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ описывается суперполем q^{+a}, удовлетворяющим условиям

$$\bar{\mathcal{D}}^{+}q^{+a}=\mathcal{D}^{+}q^{+a}=\mathcal{D}^{++}q^{+a}=0\,,\qquad \tilde{F}q^{+a}=0\,,$$

  которые дают решение

$$q^{+a}\left(\zeta_{(A)}\right)=x^{ia}w_i^{+}+\theta^{+}\psi^{a}+\bar{\theta}^{+}\bar{\psi}^{a}-2i\,\theta^{+}\bar{\theta}^{+}\dot{x}^{ia}w_i^{-}\,.$$

- Суперсимметричные преобразования q^{+a}:

$$\delta q^{+a}=-\,m\left(\bar{\theta}^{+}\epsilon^{-}+\theta^{+}\bar{\epsilon}^{-}\right)q^{+a}.$$

- Преобразования полей:

$$\begin{aligned}&\delta x^{ia}=-\,\epsilon^{i}\psi^{a}-\bar{\epsilon}^{i}\bar{\psi}^{a},\\ &\delta\bar{\psi}_a=2i\epsilon_k\dot{x}^k_a-m\,\epsilon_k x^k_a\,,\quad \delta\psi^a=2i\bar{\epsilon}^k\dot{x}^a_k+m\,\bar{\epsilon}^k x^a_k\,.\end{aligned}$$

Инвариантный лагранжиан

- Инвариантный кинетический лагранжиан пишется в виде

$$\mathcal{L}_{\text{kin.}} = -\int dw\, d\zeta_H\, L\left(q^2\right), \qquad q^2 = q^{+a} q^{-}_{a}\,.$$

- Лагранжиан пишется через конформно плоскую метрику с конформным фактором $G \equiv G\left(x^2\right)$, $x^2 = x^{ia} x_{ia}$:

$$\mathcal{L}_{\text{kin.}}\big|_{\text{bosonic}} = G\left(x^2\right)\left(\dot{x}^{ia}\dot{x}_{ia} - \frac{m^2 x^2}{4}\right), \qquad G\left(x^2\right) = \Delta_x L\left(x^2\right).$$

- Наиболее общее действие типа WZ задаётся интегралом по аналитическому подпространству

$$S_{\text{WZ}}(q^{+a}) = -\frac{i}{2}\int d\zeta_A^{--}\, L^{++}\left(q^{+a}, w_i^{\pm}\right).$$

- В случае $SU(2|1)$ суперсимметрии, лагранжиан не инвариантен при любом выборе L^{++}, что означает отсутствие независимого WZ действия.

Зеркальный мультиплет (4, 4, 0)

- В плоском случае, полной группой автоморфизмов плоской супералгебры является группа $SU(2)\times SU'(2)$. В $SU(2|1)$ деформированном случае, первая группа $SU(2)$ становится внутренней группой $SU(2)_{\rm int}$, в то время только $U(1)$ генератор F из $SU'(2)$ остаётся в супералгебре $SU(2|1)$. Таким образом, можно ожидать существенную разницу между $SU(2|1)$ мультиплетами и их возможными зеркальными партнёрами.
- Суперполя $\left(Y^A\right)^{\dagger}=\bar{Y}_A$, $A=1,2,$ удовлетворяют условиям

$$\bar{\mathcal{D}}^+Y^A=\mathcal{D}^+\bar{Y}^A=\mathcal{D}^{++}Y^A=\mathcal{D}^{++}\bar{Y}^A=0\,,\quad \mathcal{D}^+Y^A=-\bar{\mathcal{D}}^+\bar{Y}^A.$$

- С учетом действия генератора $\tilde{F}$ на спинорные производные

$$\tilde{F}\mathcal{D}^{\pm}=-\frac{1}{2}\,\mathcal{D}^{\pm},\qquad \tilde{F}\bar{\mathcal{D}}^{\pm}=\frac{1}{2}\,\bar{\mathcal{D}}^{\pm},$$

данные условия однозначно закрепляют $\tilde{F}$ заряд суперполей как

$$m\tilde{F}\,\bar{Y}^A=-\,\frac{m}{2}\,\bar{Y}^A,\qquad m\tilde{F}\,Y^A=\frac{m}{2}\,Y^A.$$

- Решение условий даёт следующее явное выражение для суперполей:

$$\begin{aligned}
Y^A(\zeta_H) &= y^A - \theta^+\psi^{iA}w_i^- + \theta^-\psi^{iA}w_i^+ - 2i\,\theta^-\bar\theta^+\dot y^A + 2i\,\theta^-\theta^+\dot{\bar y}^A \\
&\quad - 2i\,\theta^-\theta^+\bar\theta^+\dot\psi^{iA}w_i^- + m\,\theta^-\bar\theta^+y^A + m\,\theta^-\theta^+\bar y^A, \\
\bar Y^A(\zeta_H) &= \bar y^A - \bar\theta^+\psi^{iA}w_i^- + \bar\theta^-\psi^{iA}w_i^+ - 2i\,\theta^+\bar\theta^-\dot{\bar y}^A + 2i\,\bar\theta^+\bar\theta^-\dot y^A \\
&\quad - 2i\,\bar\theta^-\theta^+\bar\theta^+\dot\psi^{iA}w_i^- - m\,\theta^+\bar\theta^-\bar y^A - m\,\bar\theta^+\bar\theta^-y^A.
\end{aligned}$$

- Суперполя Y^A, $\bar Y^A$ имеют преобразования

$$\delta Y^A = -\,m\left(\bar\theta^+\epsilon^- - \theta^+\bar\epsilon^-\right)Y^A, \qquad \delta\bar Y^A = m\left(\bar\theta^+\epsilon^- - \theta^+\bar\epsilon^-\right)\bar Y^A.$$

- Соответствующие компонентные поля имеют преобразования

$$\begin{aligned}
&\delta y^A = -\,\epsilon_i\psi^{iA}, \qquad \delta\bar y^A = -\,\bar\epsilon_i\psi^{iA}, \\
&\delta\psi^{iA} = \bar\epsilon^i\left(2i\dot y^A - my^A\right) - \epsilon^i\left(2i\dot{\bar y}^A + m\bar y^A\right).
\end{aligned}$$

Инвариантный лагранжиан

Можно написать общее действие через функцию $\tilde{L}$ как

$$\tilde{S}\left(Y,\bar{Y}\right)=\int dt\,\tilde{\mathcal{L}}=\int d\zeta_{H}\,\tilde{L}\left(Y,\bar{Y}\right).$$

Инвариантность может быть проверена только при соблюдении условия

$$m\tilde{F}\tilde{L}\left(Y,\bar{Y}\right)=0\qquad\Rightarrow\qquad m\left(y^{B}\partial_{B}-\bar{y}^{B}\bar{\partial}_{B}\right)\tilde{L}\left(y,\bar{y}\right)=0\,.$$

Бозонный лагранжиан теперь зависит не только от конформного фактора $\tilde{G}:=\Delta_{y}\tilde{L}$, но и от функции $\tilde{L}$:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}}_{\text{kin.}}\big|_{\text{bosonic}} \;=\;& 2\tilde{G}\,\dot{y}^{A}\dot{\bar{y}}_{A}-im\left(\dot{y}^{A}\bar{y}_{A}-y^{A}\dot{\bar{y}}_{A}\right)\tilde{G}+2im\left(\dot{y}^{A}\partial_{A}\tilde{L}-\dot{\bar{y}}^{A}\bar{\partial}_{A}\tilde{L}\right)\\ &+\frac{m^{2}}{2}\,y^{A}\bar{y}_{A}\,\tilde{G}-m^{2}\left(y^{A}\partial_{A}\tilde{L}+\bar{y}^{A}\bar{\partial}_{A}\tilde{L}\right).\end{aligned}$$

Этот лагранжиан содержит внутренний член типа Весса-Зумино и потенциальный член $\sim m^{2}$.

Действие Весса-Зумино

Инвариантное действие Весса-Зумино пишется как интеграл по аналитическому подпространству

$$\tilde{S}_{\mathrm{WZ}}\left(Y,\bar{Y}\right) = -\,\gamma\int d\zeta^{--}_{(A)}\;\left(\bar{\theta}^{+}\bar{\mathcal{D}}^{+} + \theta^{+}\mathcal{D}^{+}\right)W\left(Y,\bar{Y}\right).$$

Требование аналитичности для подынтегрального выражения в суперполевом действии ограничивает функцию W:

$$\bar{\mathcal{D}}^{+}\mathcal{D}^{+}W\left(Y,\bar{Y}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_{y}W = 0\,.$$

Кроме того, требование $SU(2|1)$ инвариантности приводит к новому ограничению на W при $m \neq 0$:

$$m\tilde{F}W\left(Y,\bar{Y}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m\left(y^{B}\partial_{B} - \bar{y}^{B}\bar{\partial}_{B}\right)W\left(y,\bar{y}\right) = 0\,.$$

Компонентный лагранжиан $\tilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{WZ}}$ имеет вид

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\mathrm{WZ}} = \gamma\left\{2i\left(\dot{y}^{A}\,\partial_{A}W - \dot{\bar{y}}^{A}\,\bar{\partial}_{A}W\right) - m\left(y^{A}\,\partial_{A}W + \bar{y}^{A}\bar{\partial}_{A}W\right) - \psi^{iA}\psi^{B}_{i}\,\partial_{A}\bar{\partial}_{B}W\right\}.$$

Суперконформные модели

- Конформная механика может быть разделена на три класса, характеризуемых *параболическими*, *тригонометрическими* и *гиперболическими* реализациями $d = 1$ конформной группы $SO(2,1) \sim SL(2,\mathbb{R})$ (G. Papadopoulos, 2012).

- Ранее были в основном изучены суперсимметричные расширения конформной механики, соответствующие только параболическим преобразованиям.

- Как оказалось, $SU(2|1)$ суперполевой формализм описывает модели суперконформной механики тригонометрического типа (N.L. Holanda, F. Toppan, 2014).

- Тригонометрическая форма конформных генераторов $\{\mathcal{H}, T, \bar{T}\}$,

  $$\mathcal{H} = i\partial_t\,, \qquad T = ie^{-i\mu t}\partial_t\,, \qquad \bar{T} = ie^{i\mu t}\partial_t\,.$$

  соответствует следующей алгебре $so(2,1)$:

  $$[T, \bar{T}] = -\,2\mu\,\mathcal{H}\,, \qquad [\mathcal{H}, T] = \mu\,T\,, \qquad [\mathcal{H}\,, \bar{T}] = -\,\mu\,\bar{T}\,.$$

Стандартные $so(2,1)$ генераторы $\hat{K}$, $\hat{H}$ и $\hat{D}$ удовлетворяют обычным отношениям $d=1$ конформной алгебры:

$$\left[\hat{D},\hat{H}\right] = -\,i\hat{H}\,, \qquad \left[\hat{D},\hat{K}\right] = i\hat{K}\,, \qquad \left[\hat{H},\hat{K}\right] = 2i\hat{D}\,,$$

и выражаются, соответственно,

$$\begin{aligned}
\hat{K} &= \frac{2}{\mu^2}\left[\mathcal{H} - \frac{1}{2}\left(T+\bar{T}\right)\right] = \frac{2i}{\mu^2}\left(1-\cos\mu t\,\right)\partial_t\,,\\
\hat{H} &= \frac{1}{2}\left[\mathcal{H} + \frac{1}{2}\left(T+\bar{T}\right)\right] = \frac{i}{2}\left(1+\cos\mu t\,\right)\partial_t\,,\\
\hat{D} &= \frac{i}{2\mu}\left(T-\bar{T}\right) = \frac{i}{\mu}\sin\mu t\,\partial_t\,.
\end{aligned}$$

В пределе $\mu=0$, они приобретают параболический вид

$$\hat{K} = it^2\partial_t\,, \qquad \hat{H} = i\partial_t\,, \qquad \hat{D} = it\partial_t\,.$$

Вложение $su(2|1)$ в $D\,(2,1;\alpha)$

Наиболее общая $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперконформная алгебра есть $D\,(2,1;\alpha)$. Эта супералгебра содержит 8 суперзарядов и 9 бозонных генераторов со следующими ненулевыми (анти)коммутаторами:

$$\begin{aligned}
&\{Q_{\alpha i i'}, Q_{\beta j j'}\} = 2\left[\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}T_{\alpha\beta} + \alpha\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{i'j'}J_{ij} - (1{+}\alpha)\,\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ij}L_{i'j'}\right],\\
&[T_{\alpha\beta}, Q_{\gamma i i'}] = -i\,\epsilon_{\gamma(\alpha}Q_{\beta)ii'}\,, \qquad [T_{\alpha\beta}, T_{\gamma\delta}] = i\,(\epsilon_{\alpha\gamma}T_{\beta\delta} + \epsilon_{\beta\delta}T_{\alpha\gamma})\,,\\
&[J_{ij}, Q_{\alpha k i'}] = -i\,\epsilon_{k(i}Q_{\alpha j)i'}\,, \qquad [J_{ij}, J_{kl}] = i\,(\epsilon_{ik}J_{jl} + \epsilon_{jl}J_{ik})\,,\\
&[L_{i'j'}, Q_{\alpha i k'}] = -i\,\epsilon_{k'(i'}Q_{\alpha i j')}\,, \qquad [L_{i'j'}, L_{k'l'}] = i\,(\epsilon_{i'k'}L_{j'l'} + \epsilon_{j'l'}L_{i'k'})\,.
\end{aligned}$$

Бозонная подалгебра есть сумма взаимно коммутирующих алгебр $su(2)\oplus su'(2)\oplus so(2,1)$ с генераторами J_{ik} , $L_{i'k'}$ и $T_{\alpha\beta}$, соответственно. Перестановка α как $\alpha\leftrightarrow -(1+\alpha)$ означает перестановку $SU(2)$ генераторов как $J_{ik}\leftrightarrow L_{i'k'}$. $\mathcal{N}=4$, $d=1$ супералгебра Пуанкаре определяется как подалгебра $D\,(2,1;\alpha)$:

$$\{Q_{1ii'}, Q_{1jj'}\} = 2\epsilon_{ij}\epsilon_{i'j'}\hat{H}.$$

Бозонный генератор $\hat{H}$ является одним из генераторов стандартной конформной алгебры $so(2,1)$, которые определены как

$$\hat{H} := T_{11}\,, \qquad \hat{K} := T_{22}\,, \qquad \hat{D} := T_{12}\,.$$

Мы будем рассматривать самое общее вложение супералгебры $su(2|1)$ в $D\,(2,1;\alpha)$. Для этого мы перейдём к новому базису в $D\,(2,1;\alpha)$ с помощью следующих линейных преобразований:

$$\varepsilon^{ik}Q_{1k1'} =: -\frac{1}{2}\left(S^i + Q^i\right), \qquad Q_{1j2'} =: -\frac{1}{2}\left(\bar{S}_j + \bar{Q}_j\right),$$
$$\varepsilon^{ik}Q_{2k1'} =: \frac{i}{\mu}\left(Q^i - S^i\right), \qquad Q_{2j2'} =: -\frac{i}{\mu}\left(\bar{Q}_j - \bar{S}_j\right),$$
$$T_{22} =: \frac{2}{\mu^2}\left[\mathcal{H} - \frac{1}{2}\left(T + \bar{T}\right)\right], \qquad T_{11} =: \frac{1}{2}\left[\mathcal{H} + \frac{1}{2}\left(T + \bar{T}\right)\right],$$
$$T_{12} = T_{21} =: \frac{i}{2\mu}\left(T - \bar{T}\right), \qquad \mu \neq 0\,,$$
$$L_{1'1'} =: -iC, \quad L_{2'2'} =: i\bar{C}, \quad L_{1'2'} = L_{2'1'} =: -iF, \qquad J^i_j =: -iI^i_j\,.$$

Параметр μ является действительным параметром размерности массы. Бозонный сектор, состоящий из трёх взаимно коммутирующих алгебр, задаётся следующим набором генераторов:

$$su(2) \oplus su'(2) \oplus so(2,1) \equiv \{I^i_k\} \oplus \{F, C, \bar{C}\} \oplus \{\mathcal{H}, T, \bar{T}\}\,.$$

В новом базисе, (анти)коммутаторы суперконформной алгебры принимают вид

$$\{Q^i, \bar{Q}_j\} = -\,2\alpha\mu\, I^i_j + 2\delta^i_j\,[\mathcal{H} + (1+\alpha)\,\mu\, F]\,,$$

$$\{S^i, \bar{S}_j\} = 2\alpha\mu\, I^i_j + 2\delta^i_j\,[\mathcal{H} - (1+\alpha)\,\mu\, F]\,,$$

$$\{S^i, \bar{Q}_j\} = 2\delta^i_j T, \qquad \{Q^i, \bar{S}_j\} = 2\delta^i_j \bar{T},$$

$$\{Q^i, S^k\} = -2\,(1+\alpha)\,\mu\,\varepsilon^{ik} C\,, \qquad \{\bar{Q}_j, \bar{S}_k\} = 2\,(1+\alpha)\,\mu\,\varepsilon_{jk}\bar{C}\,,$$

$$\left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,,$$

$$\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\,\delta^i_j \bar{Q}_l - \delta^i_l \bar{Q}_j\,, \qquad \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j Q^k,$$

$$\left[I^i_j, \bar{S}_l\right] = \frac{1}{2}\,\delta^i_j \bar{S}_l - \delta^i_l \bar{S}_j\,, \qquad \left[I^i_j, S^k\right] = \delta^k_j S^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j S^k,$$

$$[C, \bar{C}] = 2F, \qquad [F, C] = C, \qquad [F, \bar{C}] = -\bar{C},$$

$$[C, \bar{Q}_j] = -S_j\,, \quad [C, \bar{S}_j] = -Q_j\,, \quad \left[\bar{C}, Q^i\right] = -\bar{S}^i, \qquad \left[\bar{C}, S^i\right] = -\bar{Q}^k,$$

$$[F, \bar{Q}_l] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l, \quad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k, \quad [F, \bar{S}_l] = -\frac{1}{2}\,\bar{S}_l\,, \quad \left[F, S^k\right] = \frac{1}{2}\,S^k,$$

$$\left[T, Q^i\right] = -\mu\, S^i, \quad [T, \bar{S}_j] = -\mu\,\bar{Q}_j\,, \quad [\bar{T}, \bar{Q}_j] = \mu\,\bar{S}_j\,, \quad \left[\bar{T}, S^i\right] = \mu\, Q^i\,,$$

$$[\mathcal{H}, \bar{S}_l] = -\frac{\mu}{2}\,\bar{S}_l\,, \quad \left[\mathcal{H}, S^k\right] = \frac{\mu}{2}\,S^k, \quad [\mathcal{H}, \bar{Q}_l] = \frac{\mu}{2}\,\bar{Q}_l\,, \quad \left[\mathcal{H}, Q^k\right] = -\frac{\mu}{2}\,Q^k,$$

$$[T, \bar{T}] = -2\mu\,\mathcal{H}, \qquad [\mathcal{H}, T] = \mu\, T, \qquad [\mathcal{H}, \bar{T}] = -\mu\,\bar{T}.$$

Суперконформная алгебра $D\,(2,1;\alpha)$ включает в себя в качестве подалгебры следующую супералгебру $su(2|1)\oplus u(1)_{\rm ext}$:

$$\begin{aligned}
&\{Q^i,\bar{Q}_j\} = -2\alpha\mu\, I^i_j + 2\delta^i_j\left[\mathcal{H} + (1+\alpha)\,\mu\, F\right],\\
&\left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,,\\
&\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\delta^i_j\bar{Q}_l - \delta^i_l\bar{Q}_j\,, \qquad \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\delta^i_j Q^k,\\
&\left[\mathcal{H}, \bar{Q}_l\right] = \frac{\mu}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[\mathcal{H}, Q^k\right] = -\frac{\mu}{2}\,Q^k,\\
&\left[F, \bar{Q}_l\right] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l\,, \qquad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k.
\end{aligned}$$

Супералгебра может быть получена переопределением

$$m = -\alpha\mu\,, \qquad \tilde{H} = \mathcal{H} + (1+\alpha)\,\mu\,F\,.$$

Суперконформные суперзаряды S^i, $\bar{S}_j$ образуют такую же супералгебру, но с $\mu \to -\mu\,.$

В новом базисе, (анти)коммутаторы суперконформной алгебры принимают вид

$$\{Q^i, \bar{Q}_j\} = -\,2\alpha\mu\, I^i_j + 2\delta^i_j\,[\mathcal{H} + (1+\alpha)\,\mu\, F]\,,$$

$$\{S^i, \bar{S}_j\} = 2\alpha\mu\, I^i_j + 2\delta^i_j\,[\mathcal{H} - (1+\alpha)\,\mu\, F]\,,$$

$$\{S^i, \bar{Q}_j\} = 2\delta^i_j T, \qquad \{Q^i, \bar{S}_j\} = 2\delta^i_j \bar{T},$$

$$\{Q^i, S^k\} = -2\,(1+\alpha)\,\mu\,\varepsilon^{ik} C\,, \qquad \{\bar{Q}_j, \bar{S}_k\} = 2\,(1+\alpha)\,\mu\,\varepsilon_{jk}\bar{C}\,,$$

$$\left[I^i_j, I^k_l\right] = \delta^k_j I^i_l - \delta^i_l I^k_j\,,$$

$$\left[I^i_j, \bar{Q}_l\right] = \frac{1}{2}\,\delta^i_j \bar{Q}_l - \delta^i_l \bar{Q}_j\,, \qquad \left[I^i_j, Q^k\right] = \delta^k_j Q^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j Q^k,$$

$$\left[I^i_j, \bar{S}_l\right] = \frac{1}{2}\,\delta^i_j \bar{S}_l - \delta^i_l \bar{S}_j\,, \qquad \left[I^i_j, S^k\right] = \delta^k_j S^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j S^k,$$

$$[C, \bar{C}] = 2F, \qquad [F, C] = C, \qquad [F, \bar{C}] = -\bar{C},$$

$$[C, \bar{Q}_j] = -S_j\,, \quad [C, \bar{S}_j] = -Q_j\,, \quad \left[\bar{C}, Q^i\right] = -\bar{S}^i, \qquad \left[\bar{C}, S^i\right] = -\bar{Q}^k,$$

$$[F, \bar{Q}_l] = -\frac{1}{2}\,\bar{Q}_l, \quad \left[F, Q^k\right] = \frac{1}{2}\,Q^k, \quad [F, \bar{S}_l] = -\frac{1}{2}\,\bar{S}_l\,, \quad \left[F, S^k\right] = \frac{1}{2}\,S^k,$$

$$\left[T, Q^i\right] = -\mu\, S^i, \quad [T, \bar{S}_j] = -\mu\,\bar{Q}_j\,, \quad [\bar{T}, \bar{Q}_j] = \mu\,\bar{S}_j\,, \quad \left[\bar{T}, S^i\right] = \mu\, Q^i,$$

$$[\mathcal{H}, \bar{S}_l] = -\frac{\mu}{2}\,\bar{S}_l\,, \quad \left[\mathcal{H}, S^k\right] = \frac{\mu}{2}\,S^k, \quad [\mathcal{H}, \bar{Q}_l] = \frac{\mu}{2}\,\bar{Q}_l\,, \quad \left[\mathcal{H}, Q^k\right] = -\frac{\mu}{2}\,Q^k,$$

$$[T, \bar{T}] = -2\mu\,\mathcal{H}, \qquad [\mathcal{H}, T] = \mu\, T, \qquad [\mathcal{H}, \bar{T}] = -\mu\,\bar{T}.$$

- Теперь мы можем рассмотреть ещё один тип суперпространства:

$$\frac{SU(2|1)\rtimes U(1)_{\text{ext}}}{SU(2)_{\text{int}}\times U(1)_{\text{int}}}\sim\frac{\{Q^i,\bar Q_j,\mathcal{H},F,I^i_j\}}{\{I^i_j,F\}}\,.$$

- Суперконформные генераторы могут быть реализованы на суперпространстве $SU(2|1)$. Элемент этого суперпространства определяется как

$$g_1=\exp\left\{\left(1+\frac{2\alpha\mu}{3}\,\bar\theta^k\theta_k\right)\left(\theta_iQ^i+\bar\theta^j\bar Q_j\right)\right\}\exp\{it\mathcal{H}\},$$

где координаты $\{t,\theta_i,\bar\theta^k\}$ совпадают с координатами предыдущих суперпространств. Из определения $\mathcal{H}$, элемент g_1 можно выразить через элемент g:

$$g_1=g\exp\{-i\mu tF\}\,.$$

- Можно вычислить соответствующие ковариантные производные

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^i\ &=\ e^{-\frac{i}{2}\mu t}\Big\{\Big[1-\alpha\mu\,\bar\theta^k\theta_k-\frac{3}{8}\,\alpha^2\mu^2\,(\theta)^2\,(\bar\theta\,)^2\Big]\frac{\partial}{\partial\theta_i}+\alpha\mu\,\bar\theta^i\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\theta_j}-i\bar\theta^i\partial_t\\ &\quad-\,(1+\alpha)\,\mu\,\bar\theta^i\tilde F+\alpha\mu\,\bar\theta^j\left(1+\alpha\mu\,\bar\theta^k\theta_k\right)\tilde I^i_j\Big\},\\ \bar{\mathcal{D}}_j\ &=\ e^{\frac{i}{2}\mu t}\Big\{-\Big[1-\alpha\mu\,\bar\theta^k\theta_k-\frac{3}{8}\,\alpha^2\mu^2\,(\theta)^2\,(\bar\theta\,)^2\Big]\frac{\partial}{\partial\bar\theta^j}-\alpha\mu\,\bar\theta^k\theta_j\,\frac{\partial}{\partial\bar\theta^k}+i\theta_j\partial_t\\ &\quad+\,(1+\alpha)\,\mu\,\theta_j\tilde F-\alpha\mu\,\theta_k\left(1+\alpha\mu\,\bar\theta^k\theta_k\right)\tilde I^k_j\Big\}.\end{aligned}$$

Суперконформные модели мультиплета $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$

Переписывания $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ ограничения $(c=0)$ через новые производные

$$\varepsilon^{lj}\bar{\mathcal{D}}_l\,\bar{\mathcal{D}}_j\,X=\varepsilon_{lj}\mathcal{D}^l\,\mathcal{D}^j\,X=0\,,\qquad\left[\mathcal{D}^i,\bar{\mathcal{D}}_i\right]X=-4\alpha\mu\,X\,,$$

мы получаем

$$\begin{aligned} X \;&=\; x\left[1+\alpha\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k+\alpha^2\mu^2\,(\theta)^2\,(\bar{\theta}\,)^2\right]+\frac{\ddot{x}}{4}\,(\theta)^2\,(\bar{\theta}\,)^2 \\ &\quad -i\bar{\theta}^k\theta_k\left(\theta_i\,\dot{\psi}^i\,e^{\frac{i}{2}\mu t}+\bar{\theta}^j\,\dot{\bar{\psi}}_j\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right) \\ &\quad +\left[1+\frac{1}{2}\,(1+4\alpha)\,\mu\,\bar{\theta}^k\theta_k\right]\left(\theta_i\,\psi^i\,e^{\frac{i}{2}\mu t}-\bar{\theta}^j\,\bar{\psi}_j\,e^{-\frac{i}{2}\mu t}\right)+\bar{\theta}^j\theta_i\,B^i_j\,, \end{aligned}$$

где мы переопределили

$$\psi^i\to\psi^i e^{\frac{i}{2}\mu t},\qquad\bar{\psi}_j\to\bar{\psi}_j e^{-\frac{i}{2}\mu t}.$$

Это переопределение полей гарантирует, что $\mathcal{H}$ реализован на полях как чистый сдвиг по времени $i\partial_t$ без каких либо $U(1)$ поворотов.

Суперконформное $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ действие можно записать в суперполевой формулировке как

$$S^{(\alpha)}_{\rm sc}(X) = -\int d\zeta\, f^{(\alpha)}_{\rm sc}(X)\,,$$

где соответствующая суперполевая функция $f(X)$ дана формулой

$$f^{(\alpha)}_{\rm sc}(X) = \begin{cases} \frac{1}{8(\alpha+1)}\,X^{-\frac{1}{\alpha}} & \text{for } \alpha \neq -1, 0\,, \\ \frac{1}{8}\,X\ln X & \text{for } \alpha = -1\,. \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = \frac{x^{-\frac{1}{\alpha}-2}}{8\alpha^2}\,.$$

Мы вычисляем суперконформный лагранжиан как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(\alpha)}_{\rm sc} \;=\;& \dot{x}^2 g(x) + i\left(\bar\psi_i\dot\psi^i - \dot{\bar\psi}_i\psi^i\right)g(x) - \frac{1}{4}\,(\psi)^2\,(\bar\psi\,)^2\,g''(x) + \frac{1}{2}\,B^i_j B^j_i\,g(x) \\ & - B^i_j\left(\frac{1}{2}\,\delta^j_i\,\bar\psi_k\psi^k - \bar\psi_i\psi^j\right)g'(x) - \alpha^2\mu^2x^2g(x)\,. \end{aligned}$$

Заметим, что лагранжиан зависит только от μ^2, не от μ.

- Лагранжиан инвариантен относительно $SU(2|1)$ преобразований

$$\begin{aligned}
\delta x &= \bar{\epsilon}^k \bar{\psi}_k \, e^{-\frac{i}{2}\mu t} - \epsilon_k \psi^k \, e^{\frac{i}{2}\mu t}, \quad \delta\psi^i = e^{-\frac{i}{2}\mu t}\left(i\bar{\epsilon}^i \dot{x} + \alpha\mu\,\bar{\epsilon}^i x + \bar{\epsilon}^k B^i_k\right), \\
\delta B^{ij} &= -\,\epsilon^{(j}\left(2i\dot{\psi}^{i)} - (1+2\alpha)\,\mu\,\psi^{i)}\right) e^{\frac{i}{2}\mu t} \\
&\quad -\,\bar{\epsilon}^{(j}\left(2i\dot{\bar{\psi}}^{i)} + (1+2\alpha)\,\mu\,\bar{\psi}^{i)}\right) e^{-\frac{i}{2}\mu t}.
\end{aligned}$$

- Из свойства чётности лагранжиана $\mathcal{L}^{(\alpha)}_{\text{sc}}$ по отношению к отражению $\mu \to -\mu$, лагранжиан должен быть инвариантен относительно $SU(2|1)$ преобразований с $-\mu$.

- Суперсимметричные $SU(2|1)$ преобразования с параметрами деформации μ и $-\mu$ замыкаются на суперконформную алгебру $D(2,1;\alpha)$.

- Лагранжианы для остальных мультиплетов тоже деформированы осцилляторными потенциалами $\sim \alpha^2\mu^2$. Инвариантность относительно преобразований $\mu \to -\mu$ является общим свойством тригонометрического типа суперконформной механики.

Заключение

- Исследован новый тип моделей $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперсимметричной механики с мировой $SU(2|1)$ суперсимметрией. В пределе $m=0$, эти модели переходят в модели стандартной $\mathcal{N}=4$, $d=1$ суперсимметричной механики.
- С использованием суперполей, определённых на фактор-пространствах супергруппы $SU(2|1)$, построены классические и квантовые модели для супермультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$, $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$ и $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$.
- Показано, что ранее известные модели «Weak Supersymmetry» и «Super Kähler Oscillator» естественно воспроизводятся из $SU(2|1)$ суперполевого описания.
- Построен гармонический аналог суперпространства $SU(2|1)$. Показана неэквивалентность супермультиплетов $(\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{0})$ (прямого и его зеркального аналога).
- Продемонстрировано построение суперконформных моделей. В $SU(2|1)$ суперпространстве естественным образом реализован тригонометрический тип суперконформной симметрии $D(2,1;\alpha)$.

Список публикаций по теме диссертации

- M. Goykhman, E. Ivanov, S. Sidorov, *Super Landau Models on Odd Cosets*, Phys. Rev. **D87** (2013) 025026, `arXiv:1208.3418 [hep-th]`.
- E. Ivanov, S. Sidorov, *Deformed Supersymmetric Mechanics*, Class. Quant. Grav. **31** (2014) 075013, `arXiv:1307.7690 [hep-th]`.
- E. Ivanov, S. Sidorov, *Super Kähler oscillator from $SU(2|1)$ superspace*, J. Phys. **A47** (2014) 292002, `arXiv:1312.6821 [hep-th]`.
- S. Sidorov, *Deformed $\mathcal{N} = 4$, $d = 1$ supersymmetry*, Phys. Part. Nucl. Lett. **11** (2014) 971–973.
- E. Ivanov, S. Sidorov, *New Type of $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Mechanics*, Springer Proc. Math. Stat. **111** (2014) 51–66.
- E. Ivanov, S. Sidorov, *New type of $\mathcal{N} = 4$ supersymmetric quantum mechanics*, AIP Conf. Proc. **1606** (2014) 374–385.
- E. Ivanov, S. Sidorov, F. Toppan, *Superconformal mechanics in $SU(2|1)$ superspace*, Phys. Rev. **D91** (2015) 085032, `arXiv:1501.05622 [hep-th]`.
- E. Ivanov, S. Sidorov, *$SU(2|1)$ mechanics and harmonic superspace*, направлена в журнал Classical and Quantum Gravity, `arXiv:1507.00987 [hep-th]`.

Спасибо за внимание!