

# МЕТОДЫ ПОИСКА ТОЧНЫХ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИЯХ ГРАВИТАЦИИ СО СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

С.Ю. Вернов

Научно–Исследовательский Институт Ядерной Физики  
Московского Государственного Университета

Доклад основан на материалах докторской диссертации

*Протвино, 1 сентября 2015*

Наблюдаемая часть Вселенной имеет радиус порядка 3000 мегапарсек ( $1Mpc = 3.08 \times 10^{24}cm$ ). Наблюдения показывают, что Вселенная однородна и изотропна на масштабе  $100Mpc$  и более крупных масштабах.

Пространственно плоская метрика  
Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = - dt^2 + a^2(t) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

активно используется для описания космологических решений.

Наблюдаемая часть Вселенной имеет радиус порядка 3000 мегапарсек ( $1Mpc = 3.08 \times 10^{24}cm$ ). Наблюдения показывают, что Вселенная однородна и изотропна на масштабе  $100Mpc$  и более крупных масштабах.

Пространственно плоская метрика  
Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = - dt^2 + a^2(t) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

активно используется для описания космологических решений.  
Модели со скалярными полями.

# АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Наблюдаемая часть Вселенной имеет радиус порядка 3000 мегапарсек ( $1Mpc = 3.08 \times 10^{24}cm$ ). Наблюдения показывают, что Вселенная однородна и изотропна на масштабе  $100Mpc$  и более крупных масштабах.

Пространственно плоская метрика  
Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = - dt^2 + a^2(t) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

активно используется для описания космологических решений.

Модели со скалярными полями.

Скалярно-тензорная формулировка модифицированной гравитации.

Наблюдаемая часть Вселенной имеет радиус порядка 3000 мегапарсек ( $1 Mpc = 3.08 \times 10^{24} cm$ ). Наблюдения показывают, что Вселенная однородна и изотропна на масштабе  $100 Mpc$  и более крупных масштабах.

Пространственно плоская метрика  
Фридмана–Леметра–Робертсона–Уокера

$$ds^2 = - dt^2 + a^2(t) (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

активно используется для описания космологических решений.

Модели со скалярными полями.

Скалярно-тензорная формулировка модифицированной гравитации. Идея описать инфляцию с помощью бозона Хиггса, предсказанного Стандартной моделью элементарных частиц (F.L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *Phys. Lett. B* **659** (2008) 703–706, arXiv:0710.3755).

Одной из особенностей инфляционных моделей с полем Хиггса в качестве инфлатона является неминимальное взаимодействие с гравитацией.

Различные типы космической жидкости различают с помощью уравнения состояния

$$p = w\rho.$$

Если  $w > 0$  — **Атомы (4%)**. Радиации соответствует  $w = 1/3$ .

$w = 0$  — **Тёмная материя (27%)**

$w < 0$  — **Тёмная энергия (69%)**

Из существующих наблюдательных оценок и предположения о постоянстве  $w_{DE}$  с вероятностью 95% следует

$$w_{DE} = -1.13^{+0.23}_{-0.25}.$$

В метрике ФЛРУ

$$w(t) = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (1)$$

где  $H = \dot{a}/a$  — параметр Хаббла.

- $w_{DE} > -1$  — модели квинтэссенции.
- $w_{DE} = -1$  — космологическая константа.
- $w_{DE} < -1$  — фантомное скалярное поле.

Степенные решения с  $H = n/t$  соответствуют модели с идеальной космической жидкостью с  $w = -1 + 2/(3n)$ .

- 1 Гравитационные модели с нелокальными скалярными полями
- 2 Нелокальные гравитационные модели
- 3 Модели с обратным оператором Даламбера
- 4 Космологические модели с минимально связанными скалярными полями. Метод реконструкции потенциала
- 5 Космологические модели с неминимально связанными скалярными полями
- 6 Построение эллиптических решений неинтегрируемых систем
- 7 Заключение

# ГРАВИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ СКАЛЯРНЫМИ ПОЛЯМИ

Рассматривается класс гравитационных моделей с нелокальным скалярным полем: Рассмотрим класс гравитационных моделей с нелокальным скалярным полем, которые описываются следующим действием

$$S_f = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{\text{P}}^2}{2} R + \frac{v_6 M_s^4}{g_o} \left( \frac{M_s}{M_c} \right)^6 \left( \frac{1}{2} \phi \mathcal{F}(\alpha' \square) \phi - V(\phi) - \Lambda \right) \right], \quad (2)$$

где  $M_s = 1/\sqrt{\alpha'}$ ,  $M_c$  характерный масштаб компактификации, численный параметр  $v_6$  получается в результате размерной редукции и интегрирования по шести дополнительным пространственным измерениям,  $g_o$  — безразмерный параметр, определяющий взаимодействие открытых струн.

Скалярное поле  $\phi$ , которое ассоциируют с тахионом открытой струны, является безразмерным. Размерность  $[\alpha'] = \text{length}^2$ .



Удобно ввести безразмерные координаты  $\bar{x}_\mu = x_\mu / \sqrt{\alpha'}$ , безразмерную массу Планка  $\bar{M}_P = M_P \sqrt{\alpha'}$ ,  $\bar{M}_s = M_s \sqrt{\alpha'} = 1$  и  $\bar{M}_c = M_c \sqrt{\alpha'}$ . В новых переменных действие (2) будет:

$$S_f = \int d^4 \bar{x} \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{\bar{M}_P}{2} R + \frac{v_6}{\bar{g}_o \bar{M}_c^6} \left( \frac{1}{2} \phi \mathcal{F}(\bar{\square}) \phi - V(\phi) - \bar{\Lambda} \right) \right], \quad (3)$$

где  $\bar{\Lambda} = \Lambda \alpha'^2$  — безразмерная космологическая константа и  $\bar{R}$  — скаляр кривизны в безразмерных координатах  $\bar{x}_\mu$ .

Умножим действие на безразмерную константу  $\frac{\bar{g}_o}{v_6} \bar{M}_c^6$  и введём

$$m_p^2 = \frac{\bar{g}_o}{v_6} \bar{M}_c^6 \bar{M}_P^2. \quad (4)$$

Теперь действие (3) приобретает вид:

$$S_f = \int d^4 \bar{x} \sqrt{-\bar{g}} \left[ \frac{m_p^2}{2} R + \frac{1}{2} \phi \mathcal{F}(\bar{\square}) \phi - V(\phi) - \bar{\Lambda} \right]. \quad (5)$$

Функция  $\mathcal{F}$  является аналитической на всей комплексной плоскости, иными словами, она является целой функцией оператора Даламбера.

$$\mathcal{F}(J) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n J^n,$$

а также, по теореме Вейерштрасса, в виде следующего произведения:

$$\mathcal{F}(J) = J^m e^{Y(J)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{J}{J_k}\right) e^{\frac{J}{J_k} + \frac{J^2}{2J_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k} \left(\frac{J}{J_k}\right)^{p_k}},$$

где  $m$  — порядок корня  $J = 0$  ( $m$  может равняться нулю),  $J_k$  — нули функции  $\mathcal{F}(J)$ ,  $Y(J)$  является целой функцией. Натуральные числа  $p_n$  выбраны так, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{J}{J_n}\right)^{p_n+1}$  сходится абсолютно и равномерно.

Класс функций  $\mathcal{F}(\square)$ , связанный с полевой теорией струн:

$$\mathcal{F}_{\text{sft}}(\square) = \xi^2 \square + 1 - c e^{2\square},$$

где  $\xi$  и  $c > 0$  — константы.

Варьированием действия (5) получаем уравнения:

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu\nu} = \frac{1}{m_p^2} (T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}), \quad (6)$$

$$\mathcal{F}(\square)\phi = V', \quad (7)$$

где  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса скалярного поля:

$$T_{\mu\nu} = E_{\mu\nu} + E_{\nu\mu} - g_{\mu\nu} (g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma} + W), \quad (8)$$

$$E_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sum_{l=0}^{n-1} \partial_\mu \square^l \phi \partial_\nu \square^{n-1-l} \phi,$$

$$W \equiv \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} f_n \sum_{l=1}^{n-1} \square^l \phi \square^{n-l} \phi - \frac{f_0}{2} \phi^2 + V(\phi).$$

Штрих здесь и далее обозначает производную по аргументу функции, тогда как точка обозначает временную производную.

# КВАДРАТИЧНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

$$V(\phi) = C_2\phi^2 + C_1\phi + \Lambda. \quad (9)$$

Поскольку слагаемое  $\phi \mathcal{F}(\bar{\square}) \phi$  содержит  $f_0\phi^2$ , то можно положить  $C_2 = 0$  без ограничения общности. Таким образом, потенциал  $V(\phi)$  можно считать линейным.

Удобно вначале рассмотреть простейший случай  $C_1 = 0$ , когда потенциал является космологической константой  $\Lambda$ , а потом обобщить полученные результаты на случай произвольного  $C_1$ . Основной идеей поиска решений является предположение, что функция  $\phi$  является собственной функцией оператора Даламбера в пространстве, метрика которого  $g_{\mu\nu}$  будет найдена позже. Если

$$\square\phi = J\phi, \quad (10)$$

то функция  $\phi$  является решением уравнения (7) с  $V(\phi) = \Lambda$  тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{F}(J) = 0. \quad (11)$$

Корни уравнения (11) не зависят от метрики.

# ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ–ИМПУЛЬСА ДЛЯ РЕШЕНИЙ

Обозначим простые корни функции  $\mathcal{F}$  как  $J_i$ , а двукратные — как  $\tilde{J}_k$ .  
Частное решение уравнения (7) будем искать в следующем виде

$$\phi_0 = \sum_{i=1}^{N_1} \phi_i + \sum_{k=1}^{N_2} \tilde{\phi}_k, \quad (12)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — произвольные натуральные числа.

$$(\square - J_i)\phi_i = 0, \quad (\square - \tilde{J}_k)^2 \tilde{\phi}_k = 0. \quad (13)$$

Уравнение четвёртого порядка

$$(\square - \tilde{J}_1)(\square - \tilde{J}_1)\tilde{\phi}_1 = 0$$

равносильно следующей системе уравнений:

$$(\square - \tilde{J}_1)\tilde{\phi}_1 = \varphi_1, \quad (\square - \tilde{J}_1)\varphi_1 = 0.$$

$$T_{\mu\nu}(\phi_0) = T_{\mu\nu}\left(\sum_{i=1}^{N_1} \phi_i + \sum_{k=1}^{N_2} \tilde{\phi}_k\right) = \sum_{i=1}^{N_1} T_{\mu\nu}(\phi_i) + \sum_{k=1}^{N_2} T_{\mu\nu}(\tilde{\phi}_k). \quad (14)$$

# ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СЛУЧАЯ $C_1 = 0$

Рассмотрим следующее локальное действие

$$S_{loc} = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{m_p^2}{2} R + \Lambda \right) + \sum_{i=1}^{N_1} S_i + \sum_{k=1}^{N_2} \tilde{S}_k, \quad (15)$$

где

$$S_i = - \frac{1}{2g_o^2} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{F}'(J_i) (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_i + J_i \phi_i^2),$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k = & - \frac{1}{2g_o^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ g^{\mu\nu} \left( \frac{\mathcal{F}''(\tilde{J}_k)}{4} (\partial_\mu \tilde{\phi}_k \partial_\nu \varphi_k + \partial_\nu \tilde{\phi}_k \partial_\mu \varphi_k) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\mathcal{F}'''(\tilde{J}_k)}{6} \partial_\mu \varphi_k \partial_\nu \varphi_k \right) + \frac{\tilde{J}_k \mathcal{F}''(\tilde{J}_k)}{2} \tilde{\phi}_k \varphi_k + \left( \frac{\tilde{J}_k \mathcal{F}'''(\tilde{J}_k)}{12} + \frac{\mathcal{F}''(\tilde{J}_k)}{4} \right) \varphi_k^2 \right]. \end{aligned}$$

Любое решение уравнений, полученных варьированием построенного локального действия  $S_{loc}$ , т.е. решения уравнений Эйнштейна и уравнений относительно  $\phi_k$ ,  $\tilde{\phi}_k$  и  $\varphi_k$ , решает исходную систему нелокальных уравнений (6) и (7).

Чтобы прояснить физическую интерпретацию полей в случае двукратного корня, выразим  $\tilde{\phi}_k$  и  $\varphi_k$  в терминах новых полей  $\xi_k$  и  $\chi_k$ :

$$\tilde{\phi}_k = \frac{1}{2\mathcal{F}''(\tilde{J}_k)} \left( \left[ \mathcal{F}''(\tilde{J}_k) - \frac{2}{3}\mathcal{F}'''(\tilde{J}_k) \right] \xi_k - \left[ \mathcal{F}''(\tilde{J}_k) + \frac{2}{3}\mathcal{F}'''(\tilde{J}_k) \right] \chi_k \right),$$

$$\varphi_k = \xi_k + \chi_k,$$

и получим

$$\begin{aligned} \tilde{S}_k = & -\frac{1}{2g_0^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left( g^{\mu\nu} \frac{\mathcal{F}''(\tilde{J}_k)}{4} (\partial_\mu \xi_k \partial_\nu \xi_k - \partial_\nu \chi_k \partial_\mu \chi_k) + \right. \\ & + \frac{\tilde{J}_k}{12} \left( (3\mathcal{F}''(\tilde{J}_k) - 2\mathcal{F}'''(\tilde{J}_k)) \xi_k - (3\mathcal{F}''(\tilde{J}_k) + 2\mathcal{F}'''(\tilde{J}_k)) \chi_k \right) (\xi_k + \chi_k) + \\ & \left. + \left( \frac{\tilde{J}_k \mathcal{F}'''(\tilde{J}_k)}{12} + \frac{\mathcal{F}''(\tilde{J}_k)}{4} \right) (\xi_k + \chi_k)^2 \right). \end{aligned}$$

Как легко видеть,  $\tilde{S}_k$  включает в себя одно фантомное скалярное поле и одно стандартное скалярное поле.

Сформулируем теперь алгоритм поиска частных решений нелокальных гравитационных моделей с квадратичным потенциалом, описываемых действием вида (5):

- Найти корни функции  $\mathcal{F}(J)$  и подсчитать их кратность.
- Выбрать конечное число простых и двукратных корней.
- Построить соответствующее локальное действие по формуле (15).
- Варьируя действие (15), получить уравнения Эйнштейна и уравнения движения локальных полей.
- Найти решения полученной системы дифференциальных уравнений.

**Замечание 1.** Если  $\mathcal{F}(J)$  имеет бесконечное число корней, то одна нелокальная модель соответствует бесконечному числу локальных моделей. В этом случае из нелокального действия (5) получается бесконечное число локальных действий (15).



**Замечание 2.** Мы должны доказать, что наш алгоритм является самосогласованным. При построение локального действия (15) мы предположили, что уравнения (13) выполняются. Следовательно, предложенный алгоритм правилен, только если уравнения (13) могут быть получены из локального действия (15). Явные вычисление показывают, что уравнения (13) получаются варьированием действия (15):

$$\frac{\delta S_{loc}}{\delta \phi_i} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \square \phi_i = J_i \phi_i; \quad \frac{\delta S_{loc}}{\delta \tilde{\phi}_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \square \varphi_k = \tilde{J}_k \varphi_k.$$

$$\frac{\delta S_{loc}}{\delta \varphi_k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \square \tilde{\phi}_k = \tilde{J}_k \tilde{\phi}_k + \varphi_k.$$

Помимо уравнений (13) из действия  $S_{loc}$  получаем уравнения Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{m_p^2 g_o^2} T_{\mu\nu}(\phi_0) - \frac{\Lambda}{m_p^2} g_{\mu\nu},$$

где  $\phi_0$  задано (12), а  $T_{\mu\nu}(\phi_0)$  — формулой (14).

**Замечание 3.** *Полученные результаты обобщены на случай произвольного  $C_1$  и случай  $f(R)$  гравитации.*

# НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Общая теория относительности прекрасно описывает поведение планет в Солнечной системе и является хорошо проверенной теорией.

# НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Общая теория относительности прекрасно описывает поведение планет в Солнечной системе и является хорошо проверенной теорией.

В то же время, есть много нерешённых задач, связанных с движением небесных тел на галактических и космологических масштабах, правильное описание которого требует добавление тёмной материи и тёмной энергии.

Существует вероятность, что тёмная материя и энергия могут быть не материальными полями, а наблюдаемым эффектом, свидетельствующем о необходимости модификации теории гравитации.

# НЕЛОКАЛЬНЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ

Общая теория относительности прекрасно описывает поведение планет в Солнечной системе и является хорошо проверенной теорией.

В то же время, есть много нерешённых задач, связанных с движением небесных тел на галактических и космологических масштабах, правильное описание которого требует добавление тёмной материи и тёмной энергии.

Существует вероятность, что тёмная материя и энергия могут быть не материальными полями, а наблюдаемым эффектом, свидетельствующем о необходимости модификации теории гравитации.

Отметим также важные и до сих пор не решённые проблемы квантования гравитации и её объединения с электромагнитными, слабыми и сильными ядерными взаимодействиями. На малых (квантовых) масштабах ОТО также скорей всего потребуются усовершенствовать. Всё это является мотивацией для поиска теории гравитации, обобщающей общую теорию относительности Эйнштейна.

Идея нелокальной гравитации порождена желанием связать гравитацию с квантовой физикой, в частности с квантовой теорией поля и теорией струн. Главная теоретическая мотивация поиска нелокального действия связана с теорией струн, которая предлагает поправки с высшими производными к действию

Гильберта–Эйнштейна. Нелокальные поправки появляются уже классически, т.е. на древесном уровне в вершинах.

Теория струн стимулирует исследования в данной области, но пока из конкретного действия теории струн не получены гравитационные модели и связь скорее идейная, а не на уровне строгих формулировок. По этой причине рассматриваемые модели включают произвольные функции. Важным вопросом является наличие тех или иных космологических решений в данных моделях в зависимости от вида функции, определяющей вклад нелокальной поправки к действию Гильберта–Эйнштейна.

Рассмотрена модель нелокальной гравитации с действием

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_P^2}{2} R + \frac{1}{2} R \mathcal{F} \left( \frac{\square}{M_*^2} \right) R - \Lambda + \mathcal{L}_M \right], \quad (16)$$

где  $M_*$  — масса, при которой высшие производные в действии становятся важными,  $\Lambda$  — космологическая константа,  $\mathcal{L}_M$  — лагранжиан материи.

Данная модель предложена в 2005 году Бисвасом (Biswas), Мазумдаром (Mazumdar) и Сигелом (Siegel) и привлекательна наличием точного решения типа отскока (bounce solution) для модели с радиацией и космологической константой.

Это решение было получено с помощью наложения дополнительного условия

$$\square R = r_1 R + r_2, \quad (17)$$

где  $r_1 \neq 0$  и  $r_2$  являются константами.

Если скалярная кривизна  $R$  удовлетворяет условию (17), то уравнения нелокальной гравитации становятся локальными. Для радиации след тензора энергии–импульса  $T_{\mu}^{\mu} = 0$ , поэтому уравнение следа существенно упрощается:

$$AR + \mathcal{F}'(r_1) (2r_1 R^2 + \partial_{\mu} R \partial^{\mu} R) + B = 0, \quad (18)$$

где  $\mathcal{F}'$  является первой производной аналитической функции  $\mathcal{F}$  по её аргументу, а константы  $A$  и  $B$  определены следующим образом:

$$A = 4\mathcal{F}'(r_1)r_2 - M_P^2 - 2\frac{r_2}{r_1}(\mathcal{F}(r_1) - f_0) + 6\mathcal{F}(r_1)r_1, \quad B = 4\Lambda + \frac{r_2}{r_1}M_P^2 + \frac{r_2}{r_1}A.$$

Простейший способ получить частное решение уравнения (18) — наложить условия  $\mathcal{F}'(r_1) = 0$ ,  $A = 0$ ,  $B = 0$ . Подставляя эти условия в систему всех уравнений, получаемую варьированием нелокального действия, имеем

$$2\mathcal{F}(r_1)(R + 3r_1)G_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu} + 2\mathcal{F}(r_1) \left[ g^{\mu\rho} \nabla_{\rho} \partial_{\nu} R - \frac{1}{4} \delta_{\nu}^{\mu} (R^2 + 4r_1 R + r_2) \right]. \quad (19)$$

Отметим, что для решения всех уравнений потребуется также зафиксировать количество радиации в данной модели.

В диссертации приведены два интересных результата, связанных с построением точных решений с помощью указанного анзаца. Во-первых, найдено точное космологическое решение, не требующее добавления в модель материи или радиации. Во-вторых, показано, что полученные уравнения (19) совпадают с уравнениями  $R^2$  гравитации. Таким образом, любое решение модели  $R^2$  гравитации с

$$f(R) = \frac{\mathcal{F}(r_1)}{m_P^2} [R^2 + 6r_1 R + 3r_2], \quad m_P^2 = \frac{2}{r_1} [3\mathcal{F}(r_1)r_1^2 - (\mathcal{F}(r_1) - f_0)r_2].$$

является решением соответствующий нелокальной модели, описываемой действием (16).

Полученный результат не подразумевает некоторую специальную форму метрики и справедлив для произвольной метрики. При этом нелокальная модель не эквивалентна модели  $R^2$ , поскольку полное рассмотрение модели включает не только построение фонового решения, но и возмущения, которые могут не удовлетворять условию (17).



# МОДЕЛИ С ОБРАТНЫМ ОПЕРАТОРОМ ДАЛАМБЕРА

Также изучались модели нелокальной гравитации, в исходное действие которых включена функция от обратного даламбертиана, действующая на скаляр кривизны:  $f(\square^{-1}R)$ .

Рассматриваемая в диссертации модель была предложена в работе Дезера и Вударда (Deser и Woodard) 2007 года и описывается следующим действием:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_{\text{P}}^2}{2} [R(1 + f(\square^{-1}R)) - 2\Lambda] + \mathcal{L}_{\text{m}} \right\}, \quad (20)$$

где  $f$  — дважды дифференцируемая функция,

$\square^{-1}$  — обратный оператор Даламбера,

$\Lambda$  — космологическая константа,

$\mathcal{L}_{\text{m}}$  — Лагранжиан материи.

В 2007 году Ноджири (Nojiri) и Одинцовым предложена локализация данной модели, а именно, действие с двумя скалярными полями:

$$S_l = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{M_{\text{P}}^2}{2} [R(1 + f(\psi)) + \xi(R - \square\psi) - 2\Lambda] + \mathcal{L}_{\text{m}} \right\}. \quad (21)$$

Варьирование действия (21) по метрике приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [R\Psi + \partial_\rho\xi\partial^\rho\psi - 2(\Lambda + \square\Psi)] - R_{\mu\nu}\Psi - \\ & - \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi\partial_\nu\psi + \partial_\mu\psi\partial_\nu\xi) + \nabla_\mu\partial_\nu\Psi = -\frac{1}{M_{\text{P}}^2}T_{\text{m}\mu\nu}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\Psi = 1 + f(\psi) + \xi$ .

Варьируя действие (21) относительно вариаций  $\xi$  и  $\psi$ , получаем

$$\square\psi = R, \quad \square\xi = f'(\psi)R.$$

Важно обоснование выбора того или иного вида функции  $f$ .

С этой целью для локальной скалярно–тензорной формулировки данной модели, описываемой действием (21), развит метод реконструкции, позволяющий восстанавливать функцию  $f$  по заданному поведению параметра Хаббла.

Для наиболее важных космологических решений (де Ситтера и с параметром Хаббла, обратно пропорциональным времени:  $H = n/t$ ) удалось показать, что простейшей подобной функцией является экспонента.

Мы предположим, что материя имеет вид идеальной космической жидкости, то есть,  $T_{m00} = \rho_m$ ,  $T_{mi0} = T_{m0i} = 0$  и  $T_{mij} = P_m g_{ij}$ .

$$\dot{\rho}_m = -3H(P_m + \rho_m). \quad (23)$$

Уравнения (22) сводятся к системе

$$3H^2\Psi = -\frac{1}{2}\dot{\xi}\dot{\psi} - 3H\dot{\Psi} + \Lambda + \kappa^2\rho_m, \quad (24)$$

$$\left(2\dot{H} + 3H^2\right)\Psi = \frac{1}{2}\dot{\xi}\dot{\psi} - \ddot{\Psi} - 2H\dot{\Psi} + \Lambda - \kappa^2 P_m. \quad (25)$$

Суммируя (24) и (25), получим линейное уравнение второго порядка на  $\Psi$ :

$$\ddot{\Psi} + 5H\dot{\Psi} + \left(2\dot{H} + 6H^2\right)\Psi - 2\Lambda + \kappa^2(P_m - \rho_m) = 0. \quad (26)$$

Уравнения поля:

$$\ddot{\psi} = -3H\dot{\psi} - 6\left(\dot{H} + 2H^2\right), \quad (27)$$

$$\ddot{\xi} = -3H\dot{\xi} - 6\left(\dot{H} + 2H^2\right)f'(\psi). \quad (28)$$

Необходимо выяснить при каких функциях  $f(\psi)$  существует решение с заданным  $H(t)$ .

Знание  $H(t)$  позволяет проинтегрировать (27) и получить  $\psi(t)$ .

Если параметр уравнения состояния  $w_m$  известен, то для любого заданного  $H(t)$  уравнение (23) интегрируется и мы получаем  $\rho_m(t)$ .

После этого можно решить уравнение (26) и получить  $\Psi(t)$ .

Подставляя

$$\xi(t) = \Psi(t) - f(\psi) - 1$$

в уравнение (28) и используя функцию  $t(\psi)$ , мы получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка на функцию  $f(\psi)$ , а именно

$$\dot{\psi}^2 f''(\psi) - 12 \left( \dot{H} + 2H^2 \right) f'(\psi) = \ddot{\Psi} + 3H\dot{\Psi}. \quad (29)$$

Это уравнение является основным уравнением предлагаемого метода реконструкции.

Подставляя полученные функции  $f(\psi)$  в уравнение (24) или уравнение (25), нужно проверить существование решений.

В ОТО степенные решения с  $H = n/t$  соответствуют модели с идеальной космической жидкостью с  $w_m = -1 + 2/(3n)$ .

Эволюция Вселенной содержит кроме инфляции и нынешней эпохи доминирования тёмной энергии, эпоху доминирования радиации ( $w_m = 1/3$ ) и доминирования тёмной материи, чья  $w_m = 0$ .

Подставив  $H = n/t$  в уравнение (23), получаем его общее решение:

$$\rho_m(t) = \rho_0 t^{-3n(w_m+1)}, \quad (30)$$

где  $\rho_0$  — произвольная константа.

Решая теперь уравнение (26), имеем (для  $n \neq -1$  и  $n \neq -1/3$ ):

$$\Psi_0 = C_1 t^{-2n} + C_2 t^{1-3n} + \frac{\Lambda}{(n+1)(3n+1)} t^2 - \frac{\rho_0 \kappa^2 (w_m - 1) t^{2-3(1+w_m)n}}{(3nw_m - 1)(n + 3nw_m - 2)}.$$

Отметим, что  $w_m$  нужно выбрать так, чтобы  $(3nw_m - 1)(n + 3nw_m - 2) \neq 0$ . где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные константы.

Подставляя  $H = n/t$  в уравнение (27), получаем решение

$$\psi(t) = \psi_1 t^{1-3n} - \frac{6n(2n-1)}{3n-1} \ln\left(\frac{t}{t_0}\right), \quad (31)$$

где  $\psi_1$  и  $t_0$  — произвольные константы.

При  $\psi_1 \neq 0$  функция  $t(\psi)$  включает в себя функцию Ламбера и функция  $f(\psi)$  не является элементарной функцией. Чтобы получить  $f(\psi)$  в терминах элементарных функций, положим  $\psi_1 = 0$ :

$$t = t_0 e^{(1-3n)\psi/(6n(2n-1))}. \quad (32)$$

Уравнение (29) обладает следующим общим решением:

$$\begin{aligned} f_0(\psi) = & \frac{\Lambda t_0^2}{6n(1+n)} e^{(1-3n)\psi/(3n(2n-1))} - \\ & - \frac{\rho_0 \kappa^2 t_0^{2-3n-3nw_m}}{3n(n-2+3nw_m)} e^{(3n(1+w_m)-2)(3n-1)\psi/(6n(2n-1))} + D_2 + \\ & + \frac{(n-1)t_0^{-2n} C_1}{2(2n-1)} e^{(3n-1)\psi/(3(2n-1))} + D_1 e^{(3n-1)^2\psi/(3n(2n-1))}, \end{aligned} \quad (33)$$

где  $D_1$ ,  $D_2$  и  $C_1$  — тоже произвольная константа. Данный результат получен для всех  $n$ , кроме  $n = 1/2$ ,  $n = 1/3$ ,  $n = -1/3$ , и  $n = -1$ .

Нам нужно найти такие функции  $f(\psi)$ , что степенные решения, удовлетворяют всем уравнениям (23)–(28). Так как мы уже решили уравнения (23), (27), (28) и сумму уравнений (24) и (25), то нам осталось только подставить полученные функции в уравнение (24). После этой подстановки члены, пропорциональные  $\Lambda$  и  $\rho_0$  пропадают, и уравнение (24) приобретает вид

$$6t_0^{2(3n-1)}(2n-1)nD_1t^{-6n} = 0, \Rightarrow D_1 = 0. \quad (34)$$

Таким образом, мы получили, что рассматриваемая модель с

$$f(\psi) = \tilde{f}_1 e^{\alpha_1 \psi} + \tilde{f}_2 e^{\alpha_2 \psi} + \tilde{f}_3 e^{\alpha_3 \psi} + \tilde{f}_4, \quad (35)$$

где  $\tilde{f}_i$  и  $\alpha_i$  — константы, имеет решение с  $H = n/t$  для произвольного  $n$  такого, что  $n \neq -1$ ,  $n \neq 1/3$ , и  $n \neq 1/2$ . Поскольку функция  $f(\psi)$  определена с точностью до константы, то можно положить  $\tilde{f}_4 = 0$ .

# МЕТОД РЕКОНСТРУКЦИИ ПОТЕНЦИАЛА

Идея рассматривать параметр Хаббла как функцию скалярного поля была предложена в 1990 году независимо в статье Салопека и Бонда (Salopek и Bond) и в статье Муслимова.

Позже похожая идея активно использовалась для реконструкции потенциала скалярного поля как в космологических моделях, так и в моделях мира на бране типа Рэндалл–Сундрума со скалярным полем. Рассмотрим модель с двумя скалярными полями.

Поскольку происхождение скалярных полей связано с теорией струн, действие содержит характерную массу струны  $M_s$  и безразмерную константу взаимодействия открытых струн  $g_o$ :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_P^2}{2} R + \frac{M_s^2}{g_o^2} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \partial_\mu \xi \partial_\nu \xi) - V(\phi, \xi) \right] \right],$$

Координаты  $(t, x_i)$  и поля  $\phi$  и  $\xi$  являются безразмерными.



## Уравнения движения

$$H^2 = \frac{1}{3m_p^2} \left( \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \right), \quad (36)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2m_p^2} \left( \dot{\phi}^2 - \dot{\xi}^2 \right), \quad (37)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{\partial V}{\partial \phi}, \quad \ddot{\xi} + 3H\dot{\xi} = -\frac{\partial V}{\partial \xi}, \quad (38)$$

где  $m_p^2 = g_o^2 M_P^2 / M_s^2$ . Отметим, что только три из четырёх уравнений (36)–(38) независимы.

Если явная форма полей  $\phi(t)$  и  $\xi(t)$  задана, то

$$H(t) = \frac{1}{2m_p^2} \left[ \int^t \dot{\phi}^2(\tau) d\tau - \int^t \dot{\xi}^2(\tau) d\tau \right] + C. \quad (39)$$

Потенциал как функцию времени можно выразить через  $H(t)$ :

$$V(t) = m_p^2 \left( 3H(t)^2 + \dot{H}(t) \right). \quad (40)$$

Этим методом сложно найти полиномиальный потенциал  $V(\phi, \xi)$ .

Отметим, что вышеупомянутый метод бесполезен при поиске новых решений для построенного потенциала.

Пусть параметр Хаббла  $H(t)$  является функцией (суперпотенциалом) от  $\phi(t)$  и  $\xi(t)$ :

$$H(t) = W(\phi(t), \xi(t)). \quad (41)$$

Применив метод суперпотенциала, мы получим, что функции  $\phi(t)$ ,  $\xi(t)$  и  $H(t)$  будут являться решением системы (36)–(38), при условии что, суперпотенциал  $W(\phi, \xi)$  удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\dot{\phi} = 2m_p^2 \frac{\partial W}{\partial \phi}, \quad \dot{\xi} = -2m_p^2 \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad (42)$$

$$V = 3m_p^2 W^2 + 2m_p^4 \left( \left[ \frac{\partial W}{\partial \phi} \right]^2 - \left[ \frac{\partial W}{\partial \xi} \right]^2 \right). \quad (43)$$

Метод суперпотенциала разделяет систему уравнений (36)–(38) на две части: систему (42), которая, как правило, интегрируема при заданном полиноме  $W(\phi, \xi)$ , и уравнение (43), которое не интегрируемо, если  $V(\phi, \xi)$  – полином, но имеет частные решения в виде полиномов.

Мы налагаем на потенциал  $V(\phi, \xi)$  следующие ограничения:

- потенциал — полином шестой степени:

$$V(\phi, \xi) = \sum_{k=0}^6 \sum_{j=0}^{6-k} c_{kj} \phi^k \xi^j; \quad (44)$$

- потенциал является чётным:  $V(\phi, \xi) = V(-\phi, -\xi)$ ;
- коэффициенты при 5-й и 6-й степенях имеют порядок  $1/m_p^2$ , и в пределе  $m_p^2 \rightarrow \infty$  получается потенциал четвёртой степени.

Из полевой теории струн мы также предположим асимптотические условия для полей.

Мы предполагаем, что фантомное поле  $\phi(t)$  плавно движется из нестабильного возмущённого вакуума ( $\phi = 0$ ) в невозмущённый и останавливается в нём. Другими словами, функция  $\phi(t)$  обращается в нуль в некоторой точке (пусть  $\phi(0) = 0$ ) и стремится к ненулевой асимптотике при  $t \rightarrow +\infty$ :  $\phi(+\infty) = A$ .

Поле  $\xi(t)$  соответствует замкнутой струне и стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

Рассмотрим произвольный полиномиальный суперпотенциал  $W(\phi, \xi)$ , определяющий потенциал вида (44):

$$W_3(\phi, \xi) = \frac{1}{2m_p^2} \left( a_{1,0}\phi + \frac{1}{3}a_{3,0}\phi^3 - a_{0,1}\xi - \frac{1}{3}a_{0,3}\xi^3 - a_{2,1}\phi^2\xi + a_{1,2}\phi\xi^2 \right), \quad (45)$$

где  $a_{i,j}$  — константы. Для  $W_3$  получаем:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= a_{1,0} + a_{3,0}\phi^2 - 2a_{2,1}\phi\xi + a_{1,2}\xi^2, \\ \dot{\xi} &= a_{0,1} + a_{0,3}\xi^2 + a_{2,1}\phi^2 - 2a_{1,2}\phi\xi. \end{aligned} \quad (46)$$

Используя асимптотические условия:  $\phi(+\infty) = A$ ,  $\xi(+\infty) = 0$ ,  $\dot{\phi}(+\infty) = 0$ ,  $\dot{\xi}(+\infty) = 0$  получаем

$$a_{1,0} = -a_{3,0}A^2, \quad a_{0,1} = -a_{2,1}A^2. \quad (47)$$

Следовательно,

$$W = \frac{1}{6m_p^2} \left[ -a_{3,0}\phi(3A^2 - \phi^2) + 3a_{1,2}\phi\xi^2 + 3a_{2,1}\xi(A^2 - \phi^2) - a_{0,3}\xi^3 \right]. \quad (48)$$

Таким образом, потенциал  $V$ , удовлетворяющий всем условиям, в том числе и асимптотическим условиям для полей, и соответствующий полиномиальному суперпотенциалу имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 V = & \frac{1}{2} (-a_{3,0}A^2 + a_{3,0}\phi^2 - 2a_{2,1}\phi\xi + a_{1,2}\xi^2)^2 - \\
 & - \frac{1}{2} (a_{2,1}(\phi^2 - A^2) - 2a_{1,2}\phi\xi + a_{0,3}\xi^2)^2 + \\
 & + \frac{1}{12m_p^2} (a_{3,0}\phi(3A^2 - \phi^2) - 3a_{2,1}\xi(A^2 - \phi^2) - 3a_{1,2}\phi\xi^2 + a_{0,3}\xi^3)^2.
 \end{aligned}$$

Дополнительные ограничения на потенциал могут быть получены из анализа асимптотического поведения параметра Хаббла. Поскольку

$$H_\infty^2 = -\frac{A^3 a_{3,0}}{3m_p^2},$$

то при  $A > 0$  должно выполняться условие  $a_{3,0} < 0$ .

Из построенного класса потенциалов выберем потенциал с

$$a_{0,3} = 0, \quad a_{2,1} = 0, \quad a_{1,2} = \frac{\omega}{2A}, \quad a_{3,0} = \frac{b\omega}{A}.$$

Тогда получаем систему

$$\dot{\phi} = Ab\omega \left[ \frac{\phi^2}{A^2} - 1 \right] + \frac{\omega\xi^2}{2A}, \quad \dot{\xi} = -\frac{\omega}{A}\phi\xi, \quad (49)$$

которая имеет решение

$$\phi(t) = A \tanh(\omega t), \quad \xi(t) = \frac{A\sqrt{2(1+b)}}{\cosh(\omega t)}, \quad (50)$$

причём  $A > 0$ ,  $\omega > 0$  и  $0 > b > -1$ .

Если  $\xi(t) \neq 0$ , то, используя второе уравнение системы (49), мы получаем дифференциальное уравнение второго порядка для  $\xi(t)$ :

$$\ddot{\xi}(t) = \omega^2 b \xi(t) - \frac{\omega^2 \xi^3(t)}{2A^2} + \frac{(1-b)\dot{\xi}^2(t)}{\xi(t)}. \quad (51)$$

Решения уравнения (51) получаются в квадратурах, а при  $b = -1/2$  решения системы (49)) выписываются явно:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{A((C_1^2 C_2^2 + 4A^2)e^{\omega t} - C_1^2 e^{-\omega t})}{(C_1^2 C_2^2 + 4A^2)e^{\omega t} + 2C_1^2 C_2 + C_1^2 e^{-\omega t}}, \\ \xi(t) &= \frac{4C_1 A^2}{(C_1^2 C_2^2 + 4A^2)e^{\omega t} + 2C_1^2 C_2 + C_1^2 e^{-\omega t}}, \end{aligned} \quad (52)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные параметры. Легко проверить, что при всех значениях  $C_1$  и  $C_2$ , кроме  $C_1 = 0$ , решения (52) и параметр Хаббла имеют следующие асимптотики:

$$\phi(\pm\infty) = \pm A, \quad \xi(\pm\infty) = 0, \quad H(+\infty) = \frac{A^2 \omega}{6m_p^2}. \quad (53)$$

Таким образом, построена гравитационная модель с двухпараметрическим множеством точных решений. Потенциал и решения удовлетворяют требуемым условиям.

Удобно ввести в решениях (52) новые параметры так, чтобы один из них соответствовал сдвигу по времени.

Положим  $C_1 = e^{t_0}$ , используя ограничение  $C_1 > 0$ .

Для краткости записи положим  $\omega = 1$  и введем параметры  $C \equiv C_1 C_2$  и

$$t_1 = t_0 - \frac{1}{2} \ln (C^2 + 4A^2). \quad (54)$$

Теперь функции  $\phi(t)$  и  $\xi(t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{A(e^{t-t_1} - e^{-(t-t_1)}) \sqrt{C^2 + 4A^2}}{\sqrt{C^2 + 4A^2}(e^{t-t_1} + e^{-(t-t_1)}) + 2C}, \\ \xi(t) &= \frac{4A^2}{\sqrt{C^2 + 4A^2}(e^{t-t_1} + e^{-(t-t_1)}) + 2C}. \end{aligned} \quad (55)$$



Рассмотрим зависимость поведения параметра Хаббла  $H$  от значения параметра  $C$ .

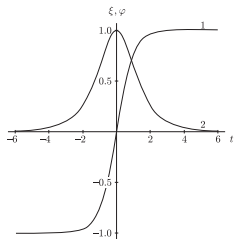
В случае  $C = 0$  имеем решения

$$\phi_0(t) = A \tanh(t - t_1), \quad \xi_0(t) = \frac{A}{\cosh(t - t_1)}. \quad (56)$$

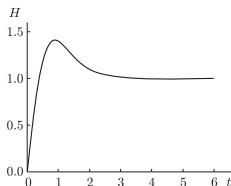
Соответствующий параметр Хаббла

$$H_f = \frac{A^2}{6m_p^2} (3 \tanh t - 2 \tanh^3 t) \quad (57)$$

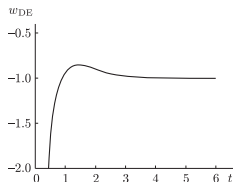
имеет максимум в точке  $t_{\max} = -\ln(\sqrt{2} - 1) \simeq 0.881$  и убывает при  $t \rightarrow \infty$ . При построении Рис. 1 – Рис. 2 мы положили  $A = 1$ ,  $\omega = 1$  и  $m_p^2 = 1/6$ .



a



б



в

Рис.: Поля  $\phi$  и  $\xi$  (а), параметр Хаббла  $H$  (б), параметр состояния  $w_{DE}$  при  $C = 0$ ,  $t_1 = 0$  (в).

При произвольном  $C$  параметр Хаббла имеет вид

$$H = \frac{A^2 (e^{t_0-t} + (C^2 + 4A^2)e^{t-t_0})^2}{6m_p^2 (e^{t_0-t} + 2C + (C^2 + 4A^2)e^{t-t_0})^3} (e^{2(t_0-t)} + 6Ce^{t_0-t} + 10(C^2 + 4A^2) + 6C(C^2 + 4A^2)e^{t-t_0} + (C^2 + 4A^2)^2 e^{2(t-t_0)}).$$

Рассмотрим случай  $C < -2A$ .

$H(t)$  имеет максимум в некоторой точке  $t_{m_1} > 0$ , минимум в некоторой точке  $t_{m_2} > t_{m_1}$  и монотонно возрастает при  $t > t_{m_2}$ .

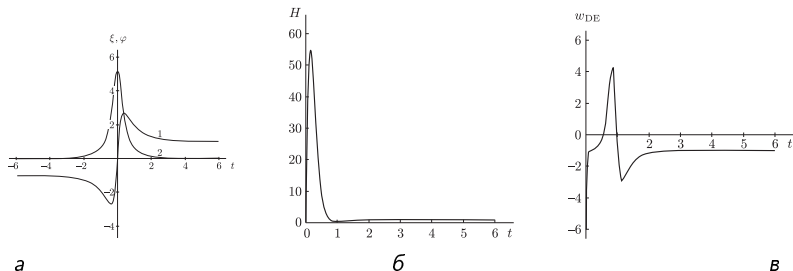


Рис.: Поля  $\phi$  и  $\xi$  (а), параметр Хаббла  $H$  (б), параметр состояния  $w_{DE}$  при  $C = -5$ ,  $t_1 = 0$  (в).

Итак, мы нашли для модели с потенциалом

$$\tilde{V} = \omega^2 \left[ \frac{1}{8} (1 - \phi^2 + \xi^2)^2 - \frac{1}{2A^2} \phi^2 \xi^2 + \frac{3\phi^2}{4m_p^2} \left( \frac{A}{2} \left[ 1 - \frac{\phi^2}{3A^2} \right] + \frac{\xi^2}{2A} \right)^2 \right]$$

двухпараметрическое множество точных решений.

# ПРОЦЕДУРА РЕКОНСТРУКЦИИ ПОТЕНЦИАЛА В МОДЕЛЯХ С $U(\phi)$

Рассмотрим космологическую модель, описываемую действием:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ U(\phi)R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - V(\phi) \right], \quad (58)$$

и уравнениями

$$6UH^2 + 6\dot{U}H = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V, \quad (59)$$

$$4U\dot{H} - 2\dot{U}H + 2\ddot{U} + \dot{\phi}^2 = 0. \quad (60)$$

Пусть  $H = Y(\phi)$ ,  $\dot{\phi} = F(\phi)$ ,

тогда (60) примет вид

$$4UY'_{,\phi} + 2(F'_{,\phi} - Y)U'_{,\phi} + (2U''_{,\phi\phi} + 1)F = 0. \quad (61)$$

Потенциал

$$V(\phi) = 6UY^2 + 6U'_{,\phi}FY - \frac{1}{2}F^2. \quad (62)$$

Уравнение (61) содержит 3 функции. Если две из них даны, третья — решение линейного дифференциального уравнения.

Если  $U(\phi)$  и  $F(\phi)$  заданы, то

$$Y(\phi) = - \left( \int^{\phi} \frac{2F'_{,\tilde{\phi}} U'_{,\tilde{\phi}} + (2U''_{,\tilde{\phi}\tilde{\phi}} + 1)F}{4U^{3/2}} d\tilde{\phi} + c_0 \right) \sqrt{U}$$

Если  $U(\phi)$  и  $Y(\phi)$  заданы, то

$$F(\phi) = \left[ \int^{\phi} \frac{U'_{,\tilde{\phi}} Y - 2UY'_{,\tilde{\phi}}}{U'_{,\tilde{\phi}}} e^{\Upsilon} d\tilde{\phi} + \tilde{c}_0 \right] e^{-\Upsilon(\phi)}, \quad \Upsilon(\phi) \equiv \frac{1}{2} \int^{\phi} \frac{2U''_{,\tilde{\phi}\tilde{\phi}} + 1}{U'_{,\tilde{\phi}}} d\tilde{\phi}.$$

Для моделей с  $U(\sigma) = \xi\sigma^2$  существует другой метод реконструкции [A.Yu. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, Phys. Lett. B 702 \(2011\) 191–196, arXiv:1104.2125](#).

*Три основные причины использования метода суперпотенциала:*

- $U(\sigma)$  может быть произвольной, в частности, результаты получены для  $U(\sigma) = \xi\sigma^2 + J$ .
- $H(t)$  может быть более сложным, чем  $H = Y(\sigma)$ .
- Методом суперпотенциала легче строить модели с полиномиальным потенциалом

# МОДЕЛЬ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ С НЕМОНОТОННЫМ ПАРАМЕТРОМ ХАББЛА

A.Yu. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, and S.Yu.V.,  
Phys. Rev. D **87** (2013) 063503, arXiv:1211.6272.

**Одно и то же поведение  $\phi(t)$  соответствует точно разрешимым моделям с различными потенциалами и качественно различным поведением параметра Хаббла.**

Пусть  $U(\phi) = \xi\phi^2$ ,

$$Y(\phi) = A_2\phi^2 + A_1\phi + A_0, \quad A_k \text{ — константы.}$$

Функция  $F(\phi)$  **НЕ ЗАВИСИТ** ОТ  $A_1$ :

$$F(\phi) = \frac{4\xi}{8\xi + 1}A_0\phi - \frac{4\xi}{16\xi + 1}A_2\phi^3 + \tilde{c}_0\phi^{-\frac{1+4\xi}{4\xi}}.$$

# МОДЕЛЬ ИНДУЦИРОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ С НЕМОНОТОННЫМ ПАРАМЕТРОМ ХАББЛА

A.Yu. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, and S.Yu.V.,  
Phys. Rev. D **87** (2013) 063503, arXiv:1211.6272.

**Одно и то же поведение  $\phi(t)$  соответствует точно разрешимым моделям с различными потенциалами и качественно различным поведением параметра Хаббла.**

Пусть  $U(\phi) = \xi\phi^2$ ,

$$Y(\phi) = A_2\phi^2 + A_1\phi + A_0, \quad A_k \text{ — константы.}$$

Функция  $F(\phi)$  **НЕ ЗАВИСИТ** ОТ  $A_1$ :

$$F(\phi) = \frac{4\xi}{8\xi + 1}A_0\phi - \frac{4\xi}{16\xi + 1}A_2\phi^3 + \tilde{c}_0\phi^{-\frac{1+4\xi}{4\xi}}.$$

При  $\tilde{c}_0 = 0$ , функция  $F(\phi)$  — кубический полином и уравнение  $\dot{\phi} = F(\phi)$  имеет общее решение:

$$\phi(t) = \pm \frac{\sqrt{(16\xi + 1)A_0}}{\sqrt{(16\xi + 1)A_0c_2e^{-\omega t} + (8\xi + 1)A_2}}, \quad (63)$$

где  $\omega = 8\xi A_0 / (8\xi + 1)$ ,  $c_2$  — константа интегрирования.

Потенциал является полиномом шестого порядка и имеет вид (при  $\xi = 1$ ):

$$V(\phi) = \frac{910}{289} A_2^2 \phi^6 + \frac{156}{17} A_1 A_2 \phi^5 + \left( 6A_1^2 + \frac{2236}{153} A_0 A_2 \right) \phi^4 + \frac{52}{3} A_0 A_1 \phi^3 + \frac{910}{81} A_0^2 \phi^2.$$

Если  $\omega > 0$ , то

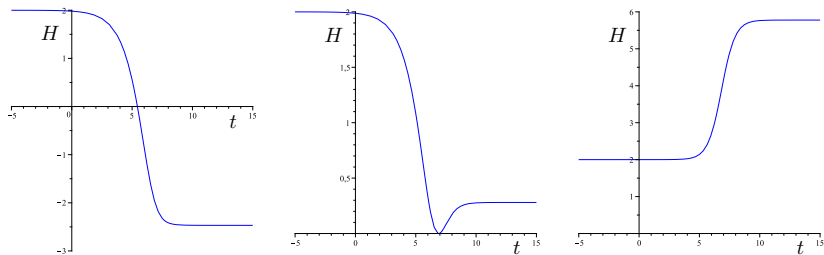
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \phi_{f\pm} = \pm \frac{\sqrt{(8\xi + 1)A_0}}{\sqrt{(4\xi + 1)A_2}}.$$

Параметр Хаббла также стремится к константе  $H_f$ . Т.е. получается асимптотическое решение де Ситтера. Условия стабильности требуют, в частности,  $H_f > 0$

(E.O. Pozdeeva and S.Yu. Vernov, AIP Conf. Proc. **1606** (2014) 48, arXiv:1401.7550).



# КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ СЛЕДСТВИЯ



**Рис.: Функция  $H(t)$  при  $A_1 = -6$ ,  $A_1 = -4$  и  $A_1 = 0$  (слева направо).  
На всех графиках  $A_2 = 1$ ,  $A_0 = 2$  и  $c_2 = 100000$ .**

Одна и та же функция  $\phi(t)$  соответствует разному поведению параметра Хаббла.

При  $A_1 = -4$  поведение  $H(t)$  является немонотонным.

- С целью объяснения ускоренного расширения Вселенной и феномена тёмной энергии изучены космологические модели с нелокальными скалярными полями, мотивированными полевой теорией струн, и полиномиальными потенциалами второй и третьей степени. Для моделей с квадратичным потенциалом сформулирован алгоритм локализации, и с его помощью поиск частных решений уравнений Эйнштейна с нелокальным полем сведён к анализу уравнений Эйнштейна с локальными скалярными и фантомными скалярными полями. Доказано, что системе нелокальных уравнений Эйнштейна соответствует множество систем локальных уравнений Эйнштейна со скалярными и фантомными скалярными полями. Решение любой из этих систем является частным решением исходной системы нелокальных уравнений. Таким образом, показана связь космологических моделей с фантомными скалярными полями с полевой теорией струн. Данный результат обобщён на модели  $f(R)$  гравитации. С помощью алгоритма локализации найдены точные частные решения уравнений с нелокальным скалярным полем в метриках ФЛРУ и Бьянки I.

- Для космологических моделей с нелокальными скалярными полями и произвольными потенциалами предложен метод поиска точных решений уравнения нелокального поля. Новые точные решения этого уравнения найдены для произвольного кубического потенциала, рассмотрение которого мотивировано полевой теорией струн. В зависимости от коэффициентов потенциала решения получаются в виде степенных, гиперболических или эллиптических функций. Показано, что точное решение всех уравнений Эйнштейна можно получить с помощью добавления в модель вспомогательного скалярного поля.
- Исследованы мотивированные теорией струн модели нелокальной гравитации, в действия которых добавлена аналитическая функция оператора Даламбера, действующая на скаляр кривизны. Показано, что рассматриваемую нелокальную модель можно связать с моделью  $R^2$  гравитации, наложив те же дополнительные условия, что используются для нахождения точных решений нелокальных уравнений. Найдено новое точное космологическое решение типа "отскока" в модели без материи и без радиации.

- Исследована локальная скалярно–тензорная формулировка моделей гравитации, в исходное нелокальное действие которых включена функция от обратного даламбертиана, действующая на скаляр кривизны:  $f(\square^{-1}R)$ . Данная локальная формулировка включает в себя два скалярных поля, неминимально взаимодействующих с гравитацией. Для указанного вида моделей, включающих в себя также космологическую константу и материю в виде идеальной космической жидкости, развит алгоритм, позволяющий восстанавливать входящую в действие функцию  $f$  по заданному поведению параметра Хаббла. Для наиболее важных космологических решений (де Ситтера и степенных решений с параметром Хаббла  $H = n/t$ ) показано, что простейшей подобной функцией является экспонента. Соответствующие космологические решения (де Ситтера и с  $H = n/t$ ) получены в явном виде для модели с идеальной жидкостью и космологической константой. Найдены функции  $f(\square^{-1}R)$ , допускающие, в зависимости от начальных данных, как решение с постоянным параметром Хаббла, так и решение с  $H = n/t$ .

- В рассматриваемой модели нелокальной гравитации с экспоненциальной функцией  $f$ , включающей идеальную космологическую жидкость и космологическую константу, получены новые, обобщающие известные ранее, решения де Ситтера и решения с  $H = n/t$ .  
Проанализирована стабильность решений де Ситтера относительно анизотропных возмущений в метрике Бьянки I. Найдены достаточные условия стабильности.

- Проведено исследование космологических моделей с тёмной энергией, описываемой скалярными полями, происхождение которых объясняется с помощью полевой теории струн. Цель данного исследования — теоретическое описание тёмной энергии с зависящим от времени параметром состояния, могущим принимать значения, меньшие минус единицы. В модели с фантомным скалярным полем и полиномиальным потенциалом получено точное решение типа кинка. Найдена область значений параметра модели, в которой построенное решение является стабильным.
- Рассмотрено обобщение модели с фантомным скалярным полем, полученное добавлением тёмной материи. Найдены начальные значения плотности энергии тёмной материи, при которых для нынешнего отношения плотностей энергии тёмной энергии и тёмной материи получается значение параметра состояния тёмной энергии, близкое к наблюдаемому.

- Для описания тёмной энергии с параметром состояния, пересекающим барьер космологической константы, построена космологическая модель с полиномиальным потенциалом, мотивированным струнной теорией поля, и двумя скалярными полями, одно из которых является фантомным. В этой модели получено двухпараметрическое множество точных решений. При этом некоторые точные решения соответствуют при больших временах параметру состояния тёмной энергии  $w_{DE} > -1$  и убывающему параметру Хаббла, тогда как другие соответствуют  $w_{DE} < -1$  и растущему параметру Хаббла. Найдены точные решения, в том числе и нарушающие изотропное условие энергодоминантности, которые устойчивы в метрике Бьянки I.
- Для космологических моделей с двумя скалярными полями, минимально взаимодействующими с гравитацией, развит метод реконструкции потенциала (метод суперпотенциала) и показана его эффективность при поиске новых точных решений, в частности, устойчивых решений типа кинка.

- Метод суперпотенциала был впервые использован для реконструкции космологических моделей с неминимальной связью скалярного поля и гравитации. Найденны потенциалы скалярного поля, которые позволяют получить модели с решениями де Ситтера, с асимптотическими решениями де Ситтера (в том числе с немонотонным поведением параметра Хаббла).

Изучена динамика космологических моделей индуцированной гравитации с полиномиальными потенциалами шестой степени, найденными с помощью метода суперпотенциала. Важным свойством таких моделей является существование решений, стремящихся к неподвижным точкам. Найденны достаточные условия стабильности таких решений. В частности, найденны условия, при которых решения с немонотонным параметром Хаббла, стремящимся к положительной константе, являются аттракторами.

- Найденны интегрируемые космологические модели с неминимально взаимодействующим скалярным полем. В явном виде получено общее решение для одной из таких моделей, а именно, модели индуцированной гравитации со степенным потенциалом.



- Разлит метод построения с помощью теста Пенлеве решений неинтегрируемых систем в виде рядов Лорана и применения данных решений для поиска точных эллиптических решений. С помощью предложенного метода доказано отсутствие эллиптических решений в виде стоячих волн у кубического комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау и получено эллиптическое решение уравнения Гинзбурга–Ландау пятой степени.

В двух неинтегрируемых случаях обобщённой системы Хенона–Хейлеса получены трёхпараметрические решения в виде сходящихся рядов Лорана и новые точные двухпараметрические решения, являющиеся эллиптическими функциями четвёртого порядка.

Метод поиска эллиптических решений неинтегрируемых систем с помощью формальных решений в виде рядов Лорана автоматизирован и обобщён на многозначные решения, разложимые в ряд Пюизё.

## Публикации в журналах, рекомендованных ВАК (23)

1. Koshelev A. S., Vernov S. Yu. Cosmological solutions in nonlocal models // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2014. — Vol. 11, no. 7. — P. 960–963
2. Integrable cosmological models with non-minimally coupled scalar fields / A. Kamenshchik, E. Pozdeeva, A. Tronconi, G. Venturi, S. Vernov // Classical and Quantum Gravity. — 2014. — Vol. 31, no. 10. — P. 105003.
3. Cosmological solutions of a nonlocal model with a perfect fluid / E. Elizalde, E.O. Pozdeeva, S.Yu. Vernov, Y.-I. Zhang // J. Cosmology Astroparticle Physics (JCAP). — 2013. — V. 2013, no. 7. — P. 034
4. Reconstruction of scalar potentials in modified gravity models / A. Kamenshchik, A. Tronconi, G. Venturi, S. Vernov // Physical Review D — 2013. — Vol. 87, no. 6. — P. 063503.
5. Elizalde E., Pozdeeva E. O., Vernov S. Yu. Reconstruction procedure in nonlocal cosmological models // Classical and Quantum Gravity. — 2013. — V. 30, no. 3. — P. 035002.

6. Elizalde E., Pozdeeva E., Vernov S. De sitter universe in non-local gravity // Physical Review D. — 2012. — Vol. 85, no. 4. — P. 044002.
7. Vernov S. Nonlocal gravitational models and exact solutions // Physics of Particles and Nuclei. — 2012. — Vol. 43, no. 5. — P. 694–696.
8. Koshelev A., Vernov S. On bouncing solutions in non-local gravity // Physics of Particles and Nuclei. — 2012. — Vol. 43, no. 5. — P. 666–668.
9. Vernov S. Yu. Exact solutions of nonlocal nonlinear field equations in cosmology // Theoretical and Mathematical Physics. — 2011. — Vol. 166, no. 3. — P. 392–402.
10. Vernov S. Localization of the SFT inspired nonlocal linear models and exact solutions // Physics of Particles and Nuclei Letters. — 2011. — Vol. 8, no. 3. — P. 310–320.
11. Vernov S. Yu. Localization of nonlocal cosmological models with quadratic potentials in the case of double roots // Classical and Quantum Gravity. — 2010. — Vol. 27, no. 3. — P. 035006.

12. Aref'eva I. Ya., Bulatov N. V., Vernov S. Yu. Stable exact solutions in cosmological models with two scalar fields // Theoretical and Mathematical Physics. — 2010. — Vol. 163, no. 3. — P. 788–803.
13. Vernov S. Yu. Construction of exact solutions in two-field cosmological models // Theoretical and Mathematical Physics. — 2008. — Vol. 155, no. 1. — P. 544–556.
14. Aref'eva I. Ya., Joukovskaya L. V., Vernov S. Yu. Dynamics in nonlocal linear models in the Friedmann–Robertson–Walker metric // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2008. — Vol. 41, no. 30. — P. 304003.
15. Vernov S. Elliptic solutions of the quintic complex one-dimensional Ginzburg–Landau equation // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2007. — Vol. 40, no. 32. — P. 9833–9844.
16. Vernov S. Construction of exact partial solutions of nonintegrable systems by means of formal Laurent and Puiseux series // Programming and Computer Software. — 2006. — Vol. 32, no. 2. — P. 77–83.

17. Vernov S. Construction of special solutions for nonintegrable systems // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 13, no. 1. — P. 50–63.
18. Aref'eva I., Vernov S., Koshelev A. Exact solution in a string cosmological model // Theoretical and Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 148, no. 1. — P. 895–909.
19. Vernov S. Proof of the absence of elliptic solutions of the cubic complex Ginzburg–Landau equation // Theoretical and Mathematical Physics. — 2006. — Vol. 146, no. 1. — P. 131–139.
20. Aref'eva I., Koshelev A., Vernov S. Crossing the  $w = -1$  barrier in the D3-brane dark energy model // Physical Review D. — 2005. — Vol. 72, no. 6. — P. 064017.
21. Vernov S., Timoshkova E. On two nonintegrable cases of the generalized Henon–Heiles system // Physics of Atomic Nuclei. — 2005. — Vol. 68, no. 11. — P. 1947–1955.
22. Aref'eva I., Koshelev A., Vernov S. Stringy dark energy model with cold dark matter // Physics Letters B. — 2005. — Vol. 628, no. 1–2. — P. 1–10.
23. Vernov S. Constructing solutions for the generalized Henon–Heiles system through the Painleve test // Theoretical and Mathematical Physics. — 2003. — Vol. 135, no. 3. — P. 792–801.

## Публикации в сборниках трудов конференций

24. Vernov S. Yu. Reconstruction procedure in modified gravity cosmological models // Proceedings of Science. — 2014. — PoS(QFTHEP2013). — P. 069.
25. Pozdeeva E. O., Vernov S. Yu. Stable exact cosmological solutions in induced gravity models // AIP Conference Proceedings. — 2014. — Vol. **1606**. — P. 48–58.
26. Elizalde E., Pozdeeva E., Vernov S. Stability of de sitter solutions in non-local cosmological models // Proceedings of Science. — 2012. — PoS(QFTHEP2011). — P. 038.
27. Vernov S. Yu. Gravitational models with non-local scalar fields // Proceedings of Science. — 2010. — PoS(QFTHEP2010). — P. 072.
28. Vernov S. Solutions of nonlocal cosmological equations // AIP Conference Proceedings. — 2010. — Vol. **1307**. — P. 185–190.
29. Vernov S. Nonlocal cosmological models and exact solutions // Proc. 16-th International Seminar on High Energy Physics (QUARKS 2010). — V. **1**. — Издат. отдел ИЯИ РАН, Москва, 2010. — P. 391–401.

30. Vernov S. Yu. Construction of exact solutions in two-fields models // Particle Physics On The Eve Of LHC: Proc. Thirteenth Lomonosov Conf. — Singapore: Singapore, 2009. — P. 245–248.
31. Vernov S.Yu. Exact solutions to nonlocal linear dark energy models // Proc. of 5th Math. Phys. Meeting, MPhys 2008. — SFIN Ser. A: Conferences. — Inst. Phys. Belgrade, Serbia, 2008. — P. 473–481.
32. Aref'eva I.Ya., Koshelev A.S., Vernov S.Yu. Exact solutions in  $w < -1$  SFT inspired cosmological models // Bulgarian Journal of Physics. — 2006. — Vol. **33**, no. S1. — P. 360–367.
33. Vernov S. Interdependence between the Laurent-series and elliptic solutions of nonintegrable systems // Computer Algebra In Scientific Computing, Proceedings. — Lecture Notes in Computer Science. Vol. **3718** — Berlin, Germany, 2005. — P. 457–468
34. Vernov S. Construction of single-valued solutions for nonintegrable systems with the help of the Painleve test // Proc. Int. Conf. "Computer Algebra in Scientific Computing" (CASC 2004) — Technische Universitat Munchen, Germany, 2004. — P. 457–465.
35. Vernov S. Construction of special solutions for nonintegrable dynamical systems with the help of the Painleve analysis // Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. — 2004. — Vol. 50, no. 1. — P. 504–512.