

Фазовые переходы под влиянием внешних условий в низкоразмерных моделях теории поля.

Р.Н. Жохов

Научный руководитель Клименко К. Г.

21 сентября 2015 г.

- **Глава 1.** Влияние химического потенциала на появление сверхпроводящей фазы в $(2+1)$ -мерной модели Ходоса.
- **Глава 2.** Явление сверхпроводимости, индуцированное внешним параллельным магнитным полем в $(2+1)$ -мерной модели Ходоса.
- **Глава 3.** Нарушение киральной симметрии в $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве с учетом зеймановского взаимодействия с внешним наклонным магнитным полем.
- **Глава 4.** Динамическое нарушение киральной симметрии в трехмерной модели Гросса-Невё с компактификацией в присутствии магнитного поля.

Влияние химического потенциала на
появление сверхпроводящей фазы в
(2+1)-мерной модели Ходоса.

Лагранжиан

Лагранжиан модели Ходоса

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k (\gamma^\nu i \partial_\nu + \mu \gamma^0) \psi_k + \frac{G_1}{N} \left(\sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2 + \frac{G_2}{N} \left(\sum_{k=1}^N \psi_k^T C \psi_k \right) \left(\sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j C \bar{\psi}_j^T \right),$$

где

μ химический потенциал;

все фермионные поля ψ_k ($k = 1, \dots, N$) принадлежат фундаментальному представлению группы $O(N)$;

$C \equiv \gamma^2$ это матрица зарядового сопряжения

$$\bar{\psi}^c = \psi^T C$$

Представление γ матриц

Двумерное приводимое представление трехмерной группы Лоренца $SO(2,1)$ определяется следующими $\tilde{\gamma}$ матрицами

$$\tilde{\gamma}^0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tilde{\gamma}^1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\gamma}^2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

действующими на двухкомпонентные дираковские спиноры.
Приводимое представление в Лагранжиане

$$\gamma^\mu = \text{diag}(\tilde{\gamma}^\mu, -\tilde{\gamma}^\mu),$$

действующее в пространстве четырехкомпонентных спиноров

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1(x) \\ \tilde{\psi}_2(x) \end{pmatrix}$$

с двумя двухкомпонентными спинорами $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$.

Модель инвариантна относительно дискретного кирального преобразования

$$\psi_k \rightarrow \gamma^5 \psi_k, \quad \psi_k \rightarrow \gamma^3 \psi_k,$$

где

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

где I единичная 2×2 матрица .

Модель инвариантна относительно преобразований из непрерывной группы числа фермионов $U(1)$

$$\psi_k \rightarrow \exp(i\alpha) \psi_k, \quad (k = 1, \dots, N).$$

Эквивалентный Лагранжиан

Эквивалентный Лагранжиан, содержащий вспомогательные скалярные бозонные поля $\sigma(x)$, $\Delta(x)$ и $\Delta^*(x)$,

$$\mathcal{L} = -\frac{N\sigma^2}{4G_1} - \frac{N}{4G_2}\Delta^*\Delta + \sum_{k=1}^N \left[\bar{\psi}_k \left(\gamma^\nu i\partial_\nu + \mu\gamma^0 - \sigma \right) \psi_k - \frac{\Delta^*}{2} \psi_k^T C \psi_k - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T \right].$$

Уравнения движения Эйлера-Лагранжа для скалярных бозонных полей

$$\sigma(x) = -2\frac{G_1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k, \quad \Delta(x) = -2\frac{G_2}{N} \sum_{k=1}^N \psi_k^T C \psi_k,$$

$$\Delta^*(x) = -2\frac{G_2}{N} \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k C \bar{\psi}_k^T.$$

Термодинамический потенциал

Будем предполагать, что вакуумные значения не зависят от координат пространства-времени, то есть

$$\langle \sigma(x) \rangle \equiv M, \quad \langle \Delta(x) \rangle \equiv \Delta, \quad \langle \Delta^*(x) \rangle \equiv \Delta^*,$$

где M, Δ, Δ^* постоянные величины.

Термодинамический потенциал системы $\Omega(M, \Delta, \Delta^*)$

$$\int d^3x \Omega(M, \Delta, \Delta^*) = -\frac{1}{N} \mathcal{S}_{\text{eff}}\{\sigma(x), \Delta(x), \Delta^*(x)\} \Big|_{\sigma(x)=M, \Delta(x)=\Delta, \Delta^*(x)=\Delta^*}$$

Отметим, что без потери общности величины Δ, Δ^* могут рассматриваться как действительные, таким образом, $\Omega(M, \Delta)$.

Термодинамический потенциал

Термодинамический потенциал модели при нулевой температуре, $T = 0$:

$$\Omega(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left[(p_0^2 - (\mathcal{E}_\Delta^+)^2)(p_0^2 - (\mathcal{E}_\Delta^-)^2) \right],$$

Термодинамический потенциал

Термодинамический потенциал модели при нулевой температуре, $T = 0$:

$$\Omega(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left[(p_0^2 - (\mathcal{E}_\Delta^+)^2)(p_0^2 - (\mathcal{E}_\Delta^-)^2) \right],$$

где $(\mathcal{E}_\Delta^\pm)^2 = E^2 + \mu^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{M^2\Delta^2 + \mu^2 E^2}$ и
 $E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2}$.

Термодинамический потенциал

Термодинамический потенциал модели при нулевой температуре, $T = 0$:

$$\Omega(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln \left[(p_0^2 - (\mathcal{E}_\Delta^+)^2)(p_0^2 - (\mathcal{E}_\Delta^-)^2) \right],$$

где $(\mathcal{E}_\Delta^\pm)^2 = E^2 + \mu^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{M^2\Delta^2 + \mu^2E^2}$ и
 $E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2}$.

Функция $\Omega(M, \Delta)$ инвариантна относительно каждого из преобразований $M \rightarrow -M$, $\Delta \rightarrow -\Delta$ и $\mu \rightarrow -\mu$. Таким образом, без потери общности можно положить $M \geq 0$, $\Delta \geq 0$, $\mu \geq 0$.

Перенормировка констант связи

Термодинамический потенциал имеет ультрафиолетовые расходимости. В качестве регуляризации будем использовать обрезание по импульсу

$$|p_1| < \Lambda, |p_2| < \Lambda.$$

Далее введем конечные параметры g_1 и g_2 следующим образом

$$\frac{1}{4G_1} \equiv \frac{1}{4G_1(\Lambda)} = \frac{2\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi g_1},$$

$$\frac{1}{4G_2} \equiv \frac{1}{4G_2(\Lambda)} = \frac{2\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{2\pi g_2},$$

$g_{1,2}$ конечные и не зависящие от Λ параметры модели с размерностью обратной массы.

Перенормировка термодинамического потенциала

$$\Omega^{ren}(M, \Delta) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega^{reg}(M, \Delta) \Big|_{G_1=G_1(\Lambda), G_2=G_2(\Lambda)} + \kappa \Lambda^3 \right\},$$

где $\kappa = \frac{2(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2}$,

$\Omega^{reg}(M, \Delta)$ - регуляризованный термодинамический потенциал,

$\Omega^{ren}(M, \Delta)$ - перенормированный термодинамический потенциал.

Термодинамический потенциал

$$12\pi\Omega^{ren}(M, \Delta) = \frac{6M^2}{g_1} + \frac{6\Delta^2}{g_2} + 2 \left(M + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right)^3 + \\ + 2 \left| M - \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right|^3 - 3t_+ \left(M + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right) + \\ + 3t_- \left| M - \sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \right| - \frac{3(\mu^2 - M^2)\Delta^2}{\mu} \ln \left| \frac{t_+ + \mu(M + \sqrt{\mu^2 + \Delta^2})}{t_- + \mu|M - \sqrt{\mu^2 + \Delta^2}|} \right|,$$

где $t_{\pm} = M\sqrt{\mu^2 + \Delta^2} \pm \mu^2$.

Фазовый портрет системы в плоскости (g_1, g_2) при $\mu = 0$

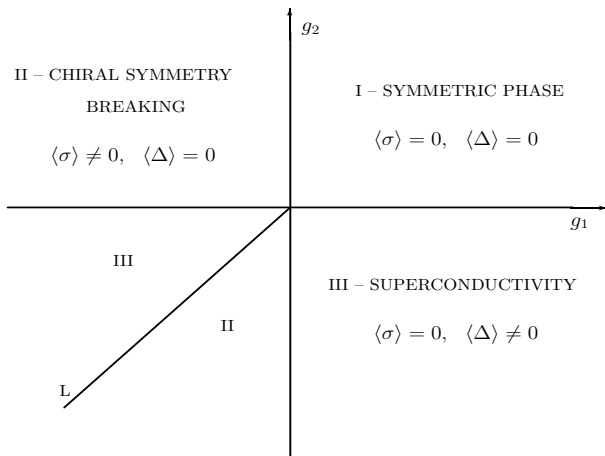


Рис.: Фазовый портрет системы в плоскости (g_1, g_2) при $\mu = 0$. I, II и III обозначают симметричную, сверхпроводящую фазы и фазу с нарушенной киральной симметрией, соответственно.

Фазовый портрет модели в терминах (μ, g_2) и $\mu_{crit}(g_2)$ в зависимости от g_2 при $g_1 < 0$.

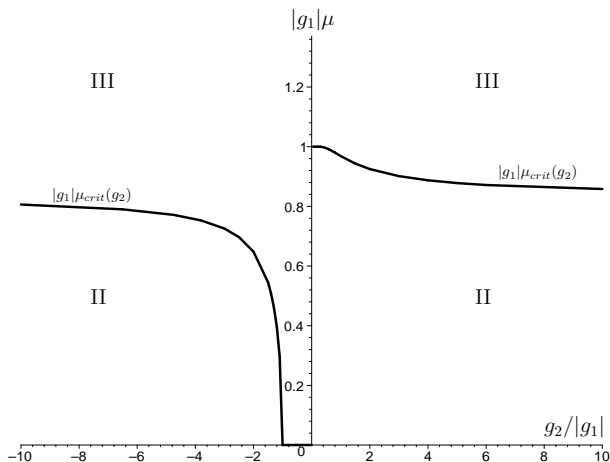


Рис.: В каждой точке $\mu = \mu_{crit}(g_2) \neq 0$ происходит фазовый переход из фазы с нарушенной киральной симметрией II в сверхпроводящую фазу III.

Плотность числа частиц

Плотность числа частиц

$$n = - \left. \frac{\partial \Omega^{ren}(M, \Delta)}{\partial \mu} \right|_{M=M_0, \Delta=\Delta_0}.$$

Можно использовать следующие выражения для плотности числа частиц в фазе с нарушенной киральной симметрией II и сверхпроводящей фазе III:

$$n|_{\text{phase II}} = - \left. \frac{\partial \omega_1(M)}{\partial \mu} \right|_{M=M_0} = \frac{1}{2\pi} (\mu^2 - M_0^2) \theta(\mu - M_0),$$

$$\begin{aligned} n|_{\text{phase III}} &= - \left. \frac{\partial \omega_2(\Delta)}{\partial \mu} \right|_{\Delta=\Delta_0} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\mu \sqrt{\mu^2 + \Delta_0^2} + \Delta_0^2 \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + \Delta_0^2}}{\Delta_0} \right]. \end{aligned}$$

Сверхпроводящая щель $\Delta_0 = \Delta_{crit}(g_2)$ и плотность числа частиц $n = n_{crit}(g_2)$ от g_2 , $g_1 < 0$

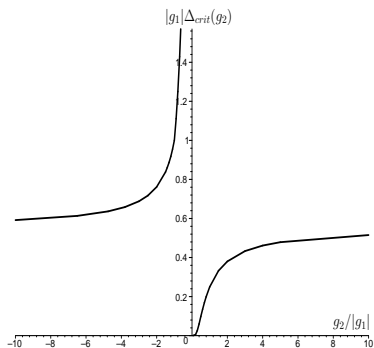


Рис.: Сверхпроводящая щель $\Delta_0 = \Delta_{crit}(g_2)$ от g_2 , которая генерируется в критической точке, то есть при $\mu = \mu_{crit}(g_2)$, при $g_1 < 0$.

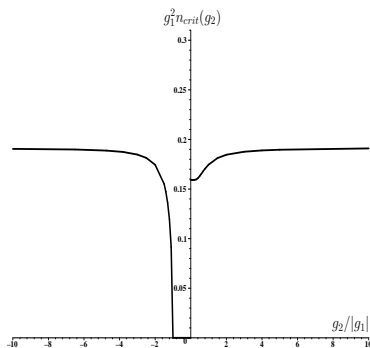


Рис.: Плотность числа частиц $n = n_{crit}(g_2)$ от g_2 при $\mu = \mu_{crit}(g_2)$, при $g_1 < 0$. При $\mu < \mu_{crit}(g_2)$ плотность числа частиц n равна нулю.

Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от μ при произвольном $g_1 < 0$

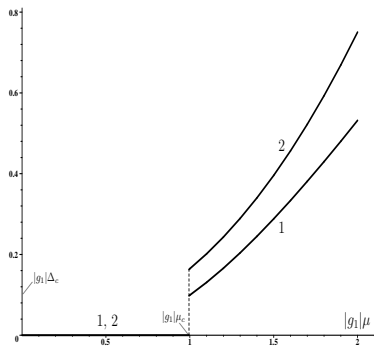


Рис.: Случай $g_2 = 0.5|g_1|$.
Кривые 1 и 2 представляют собой графики зависимости безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $|g_1|^2 n$ от химического потенциала, соответственно.

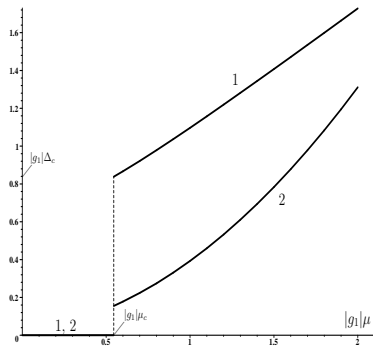


Рис.: Случай $g_2 = -1.5|g_1|$.
Кривые 1 и 2 представляют собой графики безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $|g_1|^2 n$, соответственно.

Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от μ

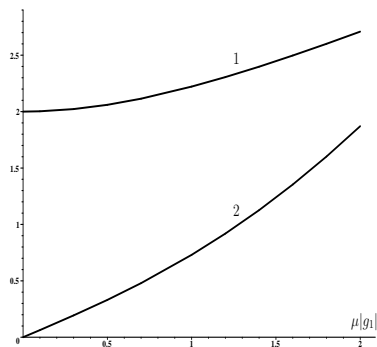


Рис.: При произвольном g_1 (при разных $g_1 < 0$ и $g_1 > 0$), а также при $g_2 = -0.5|g_1|$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $6|g_1|^2n$,

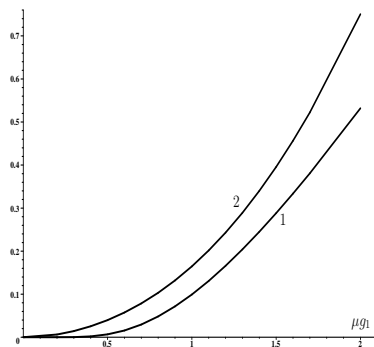


Рис.: При произвольном $g_1 > 0$, а также при $g_2 = 0.5g_1$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $|g_1|^2n$, соответственно.

Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность числа частиц n в зависимости от g_2 при произвольном $g_1 > 0$

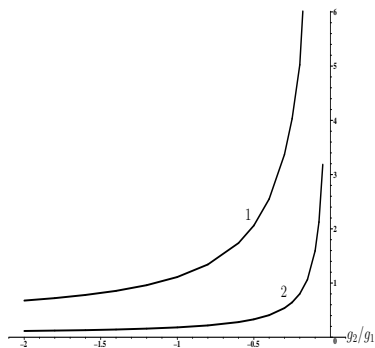


Рис.: Случай $g_2 < 0$, $\mu = 0.5/g_1$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики зависимости безразмерных величин $g_1\Delta_0$ и g_1^2n , соответственно.

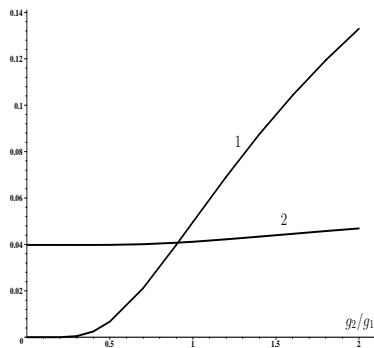


Рис.: Случай $g_2 > 0$, $\mu = 0.5/g_1$. Кривые 1 и 2 представляют собой графики зависимости безразмерных величин $g_1\Delta_0$ и g_1^2n , соответственно.

Термодинамический потенциал при конечной температуре

Для того чтобы получить термодинамический потенциал при конечной температуре, в термодинамическом потенциале при нулевой температуре нужно произвести преобразования:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} (\dots) \rightarrow iT \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\dots),$$

$$p_0 \rightarrow p_{0n} \equiv i\omega_n \equiv i\pi T(2n + 1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

то есть интегрирование по p_0 должно быть заменено на суммирование по матцубаровским частотам ω_n .

$$\Omega_T^{ren}(M, \Delta) = \Omega^{ren}(M, \Delta) - 2T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \left([1 + e^{-\beta \mathcal{E}_\Delta^+}] [1 + e^{-\beta \mathcal{E}_\Delta^-}] \right).$$

где $\Omega^{ren}(M, \Delta)$ термодинамический потенциал при нулевой температуре.

Фазовая диаграмма модели в плоскости (μ, T)

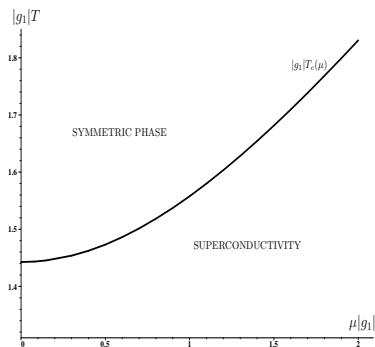


Рис.: Фазовая диаграмма модели в плоскости (μ, T) при $g_2 = -0.5|g_1|$ и произвольном фиксированном g_1 в обоих случаях, как при $g_1 < 0$, так и при $g_1 > 0$.

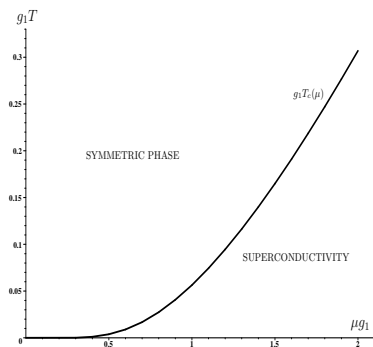


Рис.: Фазовая диаграмма модели в плоскости (μ, T) при произвольном фиксированном $g_1 > 0$ и при $g_2 = 0.5g_1$.

Ассимптотика критической температуры в зависимости от химического потенциала

Если $g_2 < 0$, то $T_c(0) = -1/(2g_2 \ln 2)$ и критическая температура может быть представлена в виде ряда по малому параметру μg_2 ,

$$T_c(\mu) = T_c(0) - \mu^2 g_2 / 16 + o(\mu^2 g_2).$$

Это разложение дает достаточно хорошее приближение для критической температуры только в интервале $0 < \mu g_1 < 0.2$ для случая предыдущего графика $g_2 = -0.5|g_1|$.

Случай $g_2 > 0$, $\mu\beta \gg 1$

$$T_c(\mu) \approx \frac{\mu}{2} \exp [C_1 + C_2 - 1 - 1/(\mu g_2)].$$

При $g_2 = 0.5g_1$ это выражение совпадает с большой точностью с графиком для критической температуры во всем интервале $0 < \mu g_1 < 2$.

Фазовый портрет модели в терминах (μ, T) при произвольном $g_1 < 0$

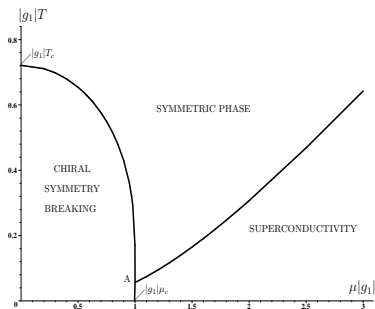


Рис.: $g_2 = 0.5|g_1|$.

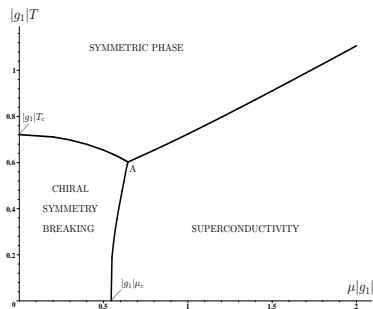


Рис.: $g_2 = -1.5|g_1|$.

Все кривые являются фазовыми переходами второго рода, за исключением границы между сверхпроводящей фазой и фазой с нарушенной киральной симметрией, где происходит фазовый переход первого рода.

Случай $T = 0, \mu = 0$. Существует либо симметричная I, либо сверхпроводящая фаза III, либо кирально нарушенная фаза II, то есть нет смешанной фазы за исключением линии

$g_1 = g_2 \equiv g, g < 0$, где две фазы могут сосуществовать.

Случай $T = 0, \mu \neq 0$. Химический потенциал приводит к тому, что система переходит в сверхпроводящую фазу. При $g_1 < 0, g_2 > 0$ или при $g_2 < g_1$ в системе реализуется фаза II с нулевой плотностью числа частиц при достаточно малых μ . При некотором критическом значении $\mu = \mu_{crit}(g_2)$ система переходит в фазу III с плотностью числа частиц $n_{crit}(g_2)$. При $g_1 > 0$ система находится в сверхпроводящей фазе даже при бесконечно малых значениях μ .

Случай $T > 0, \mu \neq 0$. При фиксированном μ с увеличением T восстанавливается симметричная фаза. При произвольном T , увеличение μ приводит к появлению сверхпроводимости в системе при произвольном соотношении между g_1 и g_2 .

Тот факт, что химический потенциал индуцирует явление сверхпроводимости, является основным результатом этой главы. Заметим, что это свойство $(2+1)$ -мерной модели типа Гросса-Неве не является справедливым в $(1+1)$ -мерном случае. В $(1+1)$ -мерном случае в сверхпроводящую фазу можно прийти при увеличении химического потенциала, только если температура меньше некоторой критической величины.

Мы надеемся, что результаты этой главы могут пролить свет на явление сверхпроводимости в системах с планарной структурой в физике конденсированного состояния вещества.

Явление сверхпроводимости,
индуцированное внешним параллельным
магнитным полем в $(2+1)$ -мерной
модели Ходоса.

Исследуется влияние внешнего параллельного магнитного поля \vec{B} на фазовую структуру $(2+1)$ -мерной версии модели Ходоса, которая описывает низкоэнергетическую динамику квазичастиц (электронов) как в фермион-антифермионном (киральном), так и в фермион-фермионном (куперовское спаривание) каналах. Эта модель является обобщением модели, рассмотренной в Главе 1, на случай, когда фермионы обладают спином (введенным таким же образом, как в уравнении Паули). Мы будем учитывать тот факт, что есть две проекции спина $\pm 1/2$ электронов на направление магнитного поля \vec{B} .

$$L = \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left[\gamma^\rho i \partial_\rho + \mu \gamma^0 - \nu (-1)^k \gamma^0 \right] \psi_{ka} + \frac{G_1}{N} \left(\sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka} \right)^2 +$$

$$+ \frac{G_2}{N} \left(\sum_{k=1}^2 \psi_{ka}^T C \psi_{ka} \right) \left(\sum_{j=1}^2 \bar{\psi}_{jb} C \bar{\psi}_{jb}^T \right),$$

где $a, b = 1, \dots, N$ индексы внутренней группы $O(N)$, $\rho = 0, 1, 2$ индексы группы Лоренца. Фермионное поле принадлежит приводимому четырехмерному представлению $SO(2, 1)$. Индекс $k = 1, 2$ соответствует двум спинорным полям $\psi_{1a}(x)$ и $\psi_{2a}(x)$ ($a = 1, \dots, N$), которые соответствуют фермионам с проекцией спина $1/2$ и $-1/2$ на направление \vec{B}_\parallel ; μ химический потенциал;

Зеймановское взаимодействие в Лагранжиане

ν введен для того, чтобы учесть энергию зеймановского взаимодействия электронов с внешним магнитным полем \vec{B}_{\parallel} ,

$$\nu = g\mu_B B/2,$$

где

$$B = |\vec{B}_{\parallel}|,$$

g - спектроскопический фактор Ланде
(будем полагать, что $g = 2$)

$\mu_B = \frac{e}{2m_e}$ - магнетон Бора.

Лагранжиан и термодинамический потенциал

Лагранжиан можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{N\sigma^2}{4G_1} - \frac{N\Delta^*\Delta}{4G_2} + \sum_{k=1}^2 \left[\bar{\psi}_{ka} \left(\gamma^\rho i \partial_\rho + \mu_k \gamma^0 - \sigma \right) \psi_{ka} - \frac{\Delta^*}{2} \psi_{ka}^T C \psi_{ka} - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_{ka} C \bar{\psi}_{ka}^T \right],$$

где введены два химических потенциала $\mu_1 = \mu + \nu$, $\mu_2 = \mu - \nu$. Будем считать, что $\nu = \mu_B B$.

Лагранжиан и термодинамический потенциал

Лагранжиан можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{N\sigma^2}{4G_1} - \frac{N\Delta^*\Delta}{4G_2} + \sum_{k=1}^2 \left[\bar{\psi}_{ka} \left(\gamma^\rho i \partial_\rho + \mu_k \gamma^0 - \sigma \right) \psi_{ka} - \frac{\Delta^*}{2} \psi_{ka}^T C \psi_{ka} - \frac{\Delta}{2} \bar{\psi}_{ka} C \bar{\psi}_{ka}^T \right],$$

где введены два химических потенциала $\mu_1 = \mu + \nu$, $\mu_2 = \mu - \nu$.

Будем считать, что $\nu = \mu_B B$.

Термодинамический потенциал

$$\Omega(M, \Delta) = \frac{M^2}{4G_1} + \frac{\Delta^2}{4G_2} + i \sum_{k=1}^2 \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln \left[(p_0^2 - (\mathcal{E}_{\Delta,k}^+)^2) (p_0^2 - (\mathcal{E}_{\Delta,k}^-)^2) \right],$$

где $(\mathcal{E}_{\Delta,k}^\pm)^2 = E^2 + \mu_k^2 + \Delta^2 \pm 2\sqrt{M^2\Delta^2 + \mu_k^2 E^2}$ и

$$E = \sqrt{M^2 + |\vec{p}|^2}.$$

Термодинамические величины. Плотность числа частиц, намагниченность, магнитная восприимчивость

Интересно рассмотрение таких термодинамических величин, как плотность числа частиц n , намагниченность m и магнитная восприимчивость χ , которые задаются выражениями

$$n = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial \mu}, \quad m = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial B}, \quad \chi = \frac{\partial m}{\partial B}.$$

Термодинамические величины. Плотность числа частиц, намагниченность, магнитная восприимчивость

Интересно рассмотрение таких термодинамических величин, как плотность числа частиц n , намагниченность m и магнитная восприимчивость χ , которые задаются выражениями

$$n = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial \mu}, \quad m = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial B}, \quad \chi = \frac{\partial m}{\partial B}.$$

Эти величины могут быть представлены в следующем виде

$$n = n_1 + n_2, \quad m = \mu_B(n_1 - n_2),$$

где

$$n_1 = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial \mu_1}, \quad n_2 = -\frac{\partial \Omega^{ren}(M_0, \Delta_0)}{\partial \mu_2}$$

являются плотностями числа частиц с проекциями спина $1/2$ и $-1/2$, соответственно.

Δ_0 , n , m и χ в зависимости от B при произвольном $g_1 > 0$ и $g_2 = 0.5g_1$ и $\mu = 0.5/g_1$

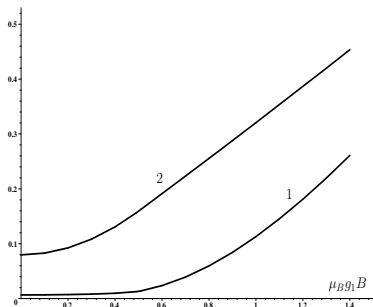


Рис.: Сверхпроводящая щель Δ_0 и плотность частиц n от B при произвольном $g_1 > 0$ и $g_2 = 0.5g_1$ и $\mu = 0.5/g_1$. Кривые 1 и 2 представляют безразмерные величины $g_1 \Delta_0$ и $g_1^2 n$, соответственно.

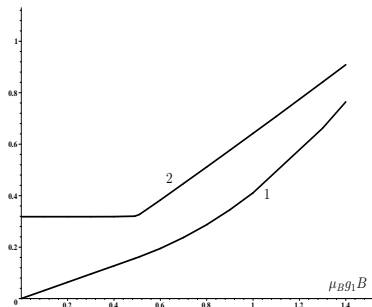


Рис.: Намагниченность m и магнитная восприимчивость χ от B при произвольном $g_1 > 0$ и при $g_2 = 0.5g_1$ и $\mu = 0.5/g_1$. Кривые 1 и 2 - графики безразмерных величин $g_1^2 m / \mu_B$ и $g_1 \chi / \mu_B^2$, соответственно.

Фазовый портрет (μ, B) при $g_1 < 0$, $g_2 \in (-k|g_1|, -|g_1|)$ и $g_1 < 0, g_2 > 0$ (или $g_2 < -k|g_1|$), где $k \approx 3.08$.

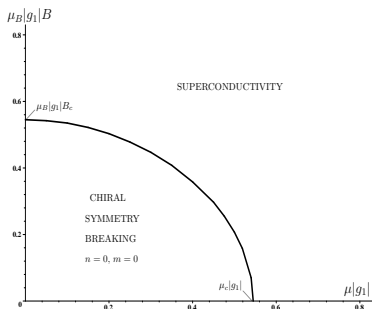


Рис.: Фазовый портрет модели в плоскости (μ, B) при произвольных фиксированных $g_1 < 0$ и $g_2 = -1.5|g_1|$.

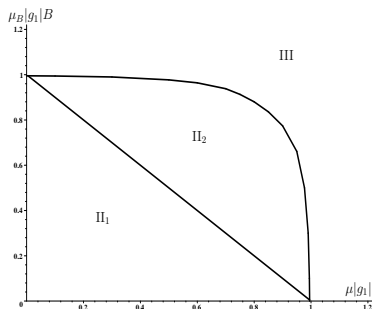


Рис.: Фазовый портрет модели в плоскости (μ, B) при $g_1 < 0$ и $g_2 = 0.5|g_1|$. II₁ и II₂ - фазы с нарушенной киральной симметрией с $n = 0, m = 0$ и $n \neq 0, m \neq 0$. III обозначает сверхпроводящую фазу.

Щели M_0 и Δ_0 , плотность числа частиц n , m и χ в зависимости от B $g_1 < 0$, $g_2 = 0.5|g_1|$ и $\mu = 0.7/|g_1|$

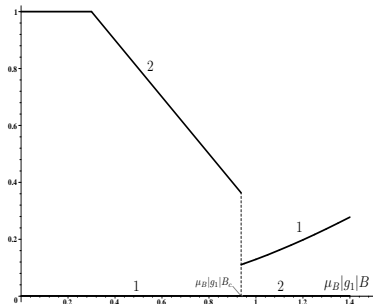


Рис.: Щели M_0 и Δ_0 в зависимости от B . Кривые 1 и 2 - зависимости безразмерных величин $|g_1|\Delta_0$ и $|g_1|M_0$, соответственно. Критическое значение поля $\mu_B|g_1|B_c \approx 0.937$.

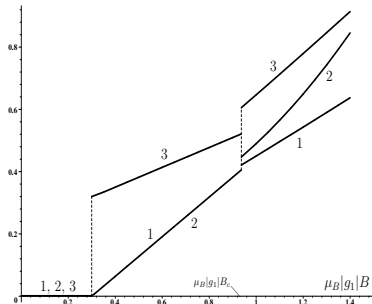


Рис.: n , m и χ от B . Кривые 1, 2 и 3 - зависимости безразмерных величин $g_1^2 n$, $g_1^2 m / \mu_B$ и $|g_1|\chi / \mu_B^2$, соответственно. Критическое значение поля $\mu_B|g_1|B_c \approx 0.937$.

Под воздействием внешнего параллельного магнитного поля \vec{B}_{\parallel} на $(2+1)$ -мерную модель типа Гросса-Неве возникает ненулевой сверхпроводящий конденсат, то есть происходит динамическое нарушение электромагнитной симметрии $U(1)$.

Внешнее параллельное магнитное поле также индуцирует в сверхпроводящей фазе ненулевую парамагнитную намагниченность (спиновую поляризацию) и плотность числа частиц.

При одновременном воздействии как химического потенциала, так и параллельного магнитного поля увеличение любого из этих параметров приводит к появлению сверхпроводящего конденсата, также в этом случае существуют две различные фазы с нарушенной киральной симметрией, одна с нулевыми плотностью числа частиц n и намагниченностью m , а другая с отличными от нуля n и m .

Нарушение киральной симметрии в $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве с учетом зеймановского взаимодействия с внешним наклонным магнитным полем.

- Физическая система располагается в двумерной плоскости, перпендикулярно оси \hat{z} обычного пространства-времени.
- В обычном трехмерном пространстве присутствует внешнее однородное, не зависящее от времени магнитное поле \vec{B} , направленное под наклоном к данной плоскости. Соответствующий (3+1)-мерный векторный потенциал A_μ задан формулами $A_{0,1} = 0$, $A_2 = B_\perp x$, $A_3 = B_\parallel y$, то есть $B_x = B_\parallel$, $B_y = 0$, $B_z = B_\perp$.
- Учитывается зеймановское взаимодействие магнитных моментов электронов с магнитным полем \vec{B} .
- Допустим, что возбуждение этой системы описывается Лагранжианом (2+1)-мерной модели Гросса-Неве.

$$L = \bar{\psi}_{ka} \left[\gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 i \nabla_1 + \gamma^2 i \nabla_2 - \nu (-1)^k \gamma^0 \right] \psi_{ka} + \frac{G}{N} \left(\sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka} \right)^2,$$

где ковариантная производная $\nabla_{1,2} = \partial_{1,2} + ieA_{1,2}$; индексы $a = 1, \dots, N$ внутренней группы $O(N)$;

$\psi_{ka}(x)$ - безмассовое дираковское фермионное поле, преобразующееся по приводимому четырехкомпонентному представлению $(2+1)$ -мерной группы Лоренца;

$k = 1, 2$ и спинорные поля $\psi_{1a}(x)$ и $\psi_{2a}(x)$ ($a = 1, \dots, N$) соответствуют электронам с проекцией спина $1/2$ и $-1/2$ на направление внешнего магнитного поля.

$\nu = g_L \mu_B |\vec{B}|/2$, где $|\vec{B}| = \sqrt{B_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2}$, g_L спектроскопический фактор Ланде и μ_B - магнетон Бора.

Эквивалентный Лагранжиан

Эквивалентный Лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{N\sigma^2}{4G} + \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left(\gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 i \nabla_1 + \gamma^2 i \nabla_2 + \mu_k \gamma^0 - \sigma \right) \psi_{ka},$$

где $\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = -\nu$ и $\nu = \mu_B |\vec{B}|$.

Эквивалентный Лагранжиан

Эквивалентный Лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{N\sigma^2}{4G} + \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \left(\gamma^0 i \partial_t + \gamma^1 i \nabla_1 + \gamma^2 i \nabla_2 + \mu_k \gamma^0 - \sigma \right) \psi_{ka},$$

где $\mu_1 = \nu$, $\mu_2 = -\nu$ и $\nu = \mu_B |\vec{B}|$.

Уравнение движения для поля $\sigma(x)$

$$\sigma(x) = -\frac{2G}{N} \sum_{k=1}^2 \bar{\psi}_{ka} \psi_{ka}.$$

Эффективное действие $\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma)$ в ведущем порядке $\frac{1}{N}$ -разложения

$$\exp(i\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma)) = \int \prod_{k=1}^2 \prod_{a=1}^N [d\bar{\psi}_{ka}] [d\psi_{ka}] \exp\left(i \int \mathcal{L} d^3x\right),$$

где

$$\mathcal{S}_{\text{eff}}(\sigma) = - \int d^3x \frac{N}{4G} \sigma^2(x) + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{eff}}.$$

Термодинамический потенциал

$$\Omega^{ren}(M; \nu, B_{\perp}) = \Omega^{ren}(M; B_{\perp}) - \frac{eB_{\perp}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \varepsilon_n)(\nu - \varepsilon_n),$$

Термодинамический потенциал

$$\Omega^{ren}(M; \nu, B_{\perp}) = \Omega^{ren}(M; B_{\perp}) - \frac{eB_{\perp}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \varepsilon_n) (\nu - \varepsilon_n),$$

$$\Omega^{ren}(M; B_{\perp}) = \frac{M^2}{\pi g} + \frac{MeB_{\perp}}{\pi} - \frac{(2eB_{\perp})^{3/2}}{\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{M^2}{2eB_{\perp}}\right),$$

Термодинамический потенциал

$$\Omega^{ren}(M; \nu, B_{\perp}) = \Omega^{ren}(M; B_{\perp}) - \frac{eB_{\perp}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \varepsilon_n)(\nu - \varepsilon_n),$$

$$\Omega^{ren}(M; B_{\perp}) = \frac{M^2}{\pi g} + \frac{MeB_{\perp}}{\pi} - \frac{(2eB_{\perp})^{3/2}}{\pi} \zeta\left(-\frac{1}{2}, \frac{M^2}{2eB_{\perp}}\right),$$

$$\left. \frac{\partial \Omega^{ren}(M; B_{\perp})}{\partial M} \right|_{M \rightarrow 0_+} = -\frac{eB_{\perp}}{\pi},$$

$$\Omega^{ren}(M) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega^{reg}(M) \Big|_{G=G(\Lambda)} + \frac{4\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} \right\},$$

$$\Omega^{ren}(M) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega^{reg}(M) \Big|_{G=G(\Lambda)} + \frac{4\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} \right\},$$

$$V(M) \equiv \Omega^{ren}(M) = \frac{M^2}{\pi g} + \frac{2M^3}{3\pi},$$

$$\Omega^{ren}(M) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left\{ \Omega^{reg}(M) \Big|_{G=G(\Lambda)} + \frac{4\Lambda^3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))}{3\pi^2} \right\},$$

$$V(M) \equiv \Omega^{ren}(M) = \frac{M^2}{\pi g} + \frac{2M^3}{3\pi},$$

$$\frac{1}{4G} \equiv \frac{1}{4G(\Lambda)} = \frac{4\Lambda \ln(1 + \sqrt{2})}{\pi^2} + \frac{1}{\pi g} \equiv \frac{1}{4G_c} + \frac{1}{\pi g},$$

где g конечный и не зависящий от Λ параметр модели с размерностью обратной массы и $G_c = \frac{\pi^2}{16\Lambda \ln(1+\sqrt{2})}$ - критическое значение константы связи.

Случай $g > 0$, $B_{\parallel} = 0$, то есть $B_{\perp} = |\vec{B}|$

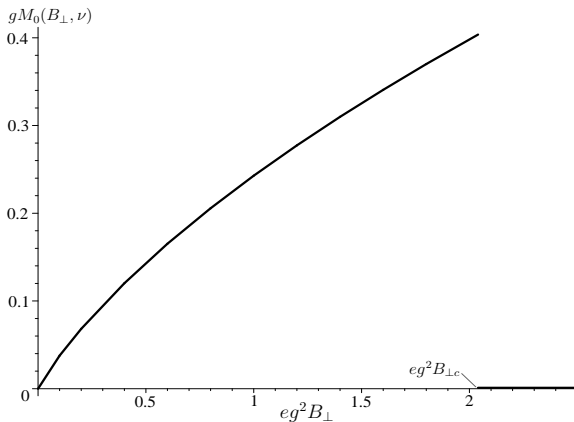


Рис.: Массовая щель $M_0(B_{\perp}, \nu)$ в зависимости от B_{\perp} в частном случае $B_{\parallel} = 0$ и $g = 5g_c \equiv 10\mu_B/e$. Щель является функцией от B_{\perp} до критического значения $B_{\perp,c}$, где она резко прыгает в ноль, то есть происходит фазовый переход первого рода.

Фазовый портрет модели в терминах $(|\vec{B}|, B_{\perp})$, случай $g > 0, B_{\perp} \neq |\vec{B}|$.

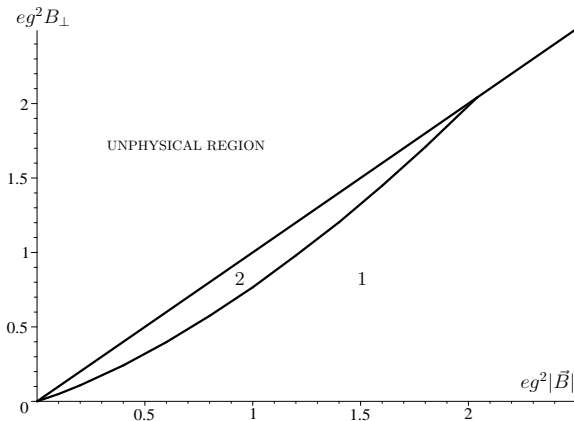


Рис.: $g = 5g_c \equiv 10\mu_B/e$. Символы 1 и 2 обозначают кирально симметричную фазу и фазу с нарушенной киральной симметрией, соответственно. В нефизической области $B_{\perp} > |\vec{B}|$. На границе между фазами 1 и 2 происходит фазовый переход первого рода.

Намагниченность

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) \equiv - \left. \frac{d\Omega^{ren}(M; \nu, B_{\perp})}{d|\vec{B}|} \right|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)},$$

Намагниченность

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) \equiv - \frac{d\Omega^{ren}(M; \nu, B_{\perp})}{d|\vec{B}|} \Big|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)},$$

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) = - \frac{B_{\perp}}{|\vec{B}|} \frac{\partial \Omega^{ren}(M; B_{\perp})}{\partial B_{\perp}} \Big|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)} +$$

$$\frac{eB_{\perp}}{\pi|\vec{B}|} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \varepsilon_n) \left(2\nu - \frac{\varepsilon_n^2 + enB_{\perp}}{\varepsilon_n} \right) \Big|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)},$$

Намагниченность

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) \equiv - \frac{d\Omega^{ren}(M; \nu, B_{\perp})}{d|\vec{B}|} \Big|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)},$$

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) = - \frac{B_{\perp}}{|\vec{B}|} \frac{\partial \Omega^{ren}(M; B_{\perp})}{\partial B_{\perp}} \Big|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)} +$$

$$\frac{eB_{\perp}}{\pi|\vec{B}|} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \theta(\nu - \varepsilon_n) \left(2\nu - \frac{\varepsilon_n^2 + enB_{\perp}}{\varepsilon_n} \right) \Big|_{M=M_0(B_{\perp}, \nu)},$$

$$m(|\vec{B}|, B_{\perp}) \Big|_{\text{phase 1}} = \frac{eB_{\perp}}{\pi} \left[\frac{3}{|\vec{B}|} \sqrt{2eB_{\perp}} \zeta(-1/2) + 2\mu_B \right] +$$

$$+ \frac{2eB_{\perp}}{\pi|\vec{B}|} \sum_{n=1}^{\infty} \theta(\nu - \sqrt{2enB_{\perp}}) \left(2\nu - \frac{3}{2} \sqrt{2enB_{\perp}} \right),$$

Осцилляции намагниченности, случай $g > 0$.

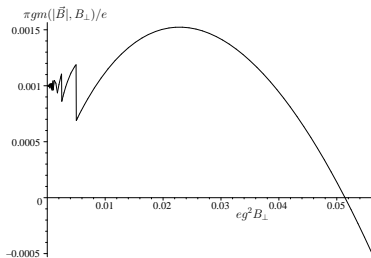


Рис.: Намагниченность $m(|\vec{B}|, B_{\perp})$ от B_{\perp} при $eg^2|\vec{B}| = 1$ и $g = 5g_c \equiv \frac{10\mu_B}{e}$.

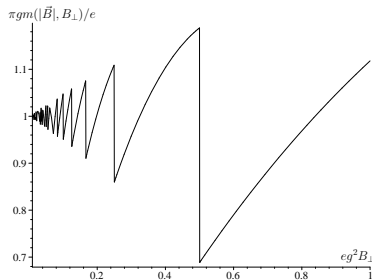


Рис.: Намагниченность $m(|\vec{B}|, B_{\perp})$ от B_{\perp} при $eg^2|\vec{B}| = 1$ и $g = 0.5g_c \equiv \frac{\mu_B}{e}$.

Осцилляции намагниченности обычно имеют место в присутствии μ . В этом случае они индуцируются при $\mu = 0$ наклонным магнитным полем.

Случай $g < 0$, $B_{\parallel} = 0$, $|g| = \mu_B/e$.

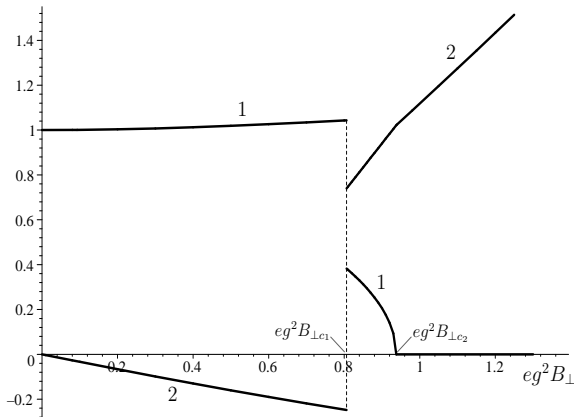


Рис.: Массовая щель $M_0(B_{\perp}, \nu)$ и намагниченность $m(|\vec{B}|, B_{\perp})$ в зависимости от B_{\perp} в частном случае $B_{\parallel} = 0$ и $|g| = \mu_B/e$. Кривые 1 и 2 - графики безразмерных величин $gM_0(B_{\perp}, \nu)$ и $\pi gm(|\vec{B}|, B_{\perp})/e$, соответственно. $eg^2 B_{\perp c1} \approx 0.81$ и $eg^2 B_{\perp c2} \approx 0.94$.

Случай $g < 0$, $B_{\parallel} \neq 0$, $|g| = \mu_B/e$.

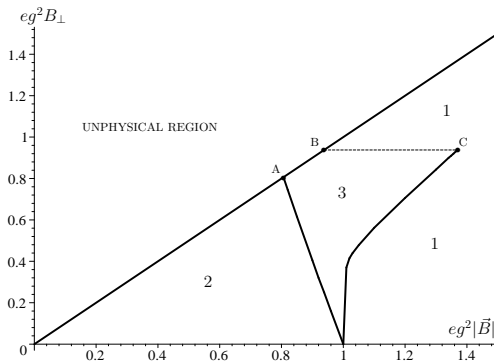


Рис.: Фазовый портрет модели в терминах $(|\vec{B}|, B_{\perp})$ при $|g| = \mu_B/e$. Символ 1 обозначает кирально симметричную фазу, символы 2 и 3 обозначают две различные фазы с нарушенной киральной симметрией (на границе между 2 и 3 массовая щель меняется скачком). На линии BC происходит фазовый переход второго рода, на других линиях происходит фазовый переход первого рода.

Случай $g < 0, |g| \neq \mu_B/e$.

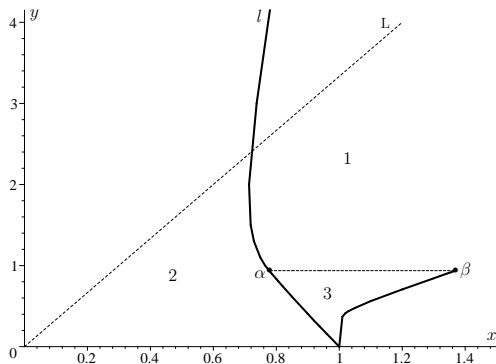


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (x, y) , где $x = \mu_B |\vec{B}| |g|$ и $y = eg^2 B_{\perp}$, типичная для значений $c \equiv e|g|/\mu_B < c^* \approx 28$. Физическая область лежит под линией $L = \{(x, y) : y = cx\}$. 1 обозначает кирально симметричную фазу, 2 и 3 - две различные фазы с нарушенной киральной симметрией. На сплошных линиях фазовый переход 1 рода. На линии $\alpha\beta$ фазовый переход 2 рода.

Случай $g < 0, |g| \neq \mu_B/e$.

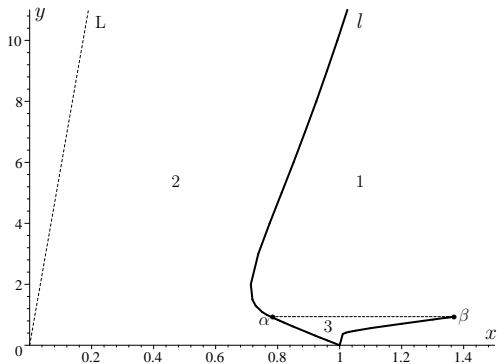


Рис.: Фазовая диаграмма модели в терминах (x, y) , где $x = \mu_B |\vec{B}| |g|$ и $y = eg^2 B_{\perp}$, типичная для значений $c \equiv e|g|/\mu_B > c^* \approx 28$. Физическая область диаграммы, соответствующая соотношению $B_{\perp} \leq |\vec{B}|$, лежит под и/или справа от линии $L = \{(x, y) : y = cx\}$.

Численные оценки в контексте физики конденсированного состояния вещества

В численных оценках используются следующие соотношения:
 $\mu_B = e/(2m_e)$, где m_e масса покоя электрона, $m_e \approx 0.5 \text{ MeV}$; $1 \text{ Tesla} \approx 700 \text{ eV}^2$; $e \approx 1/\sqrt{137}$, как в графене.

- $g < 0$, $M_{0F} \equiv -v_F/g$, $x_F = x/v_F \equiv \mu_B |\vec{B}| |g|/v_F$,

В случае $x_F = 1$ $|B_0| = v_F/(|g|\mu_B) = M_{0F}/\mu_B$.

$M_{0F} = 1 \text{ meV}$: $|\vec{B}_0| \approx 14 \text{ T}$.

$M_{0F} = 10 \text{ meV}$: $|\vec{B}_0| \approx 140 \text{ T}$.

Значения величин $|\vec{B}|$, при которых могут наблюдаться фазовые переходы, могут быть даже меньше, $0.7|\vec{B}_0|$.

- Если $v_F = 1/300$ и $g_S = 2$, как в графене, то коэффициент c_F порядка 10^3 при $M_{0F} = 10 \text{ meV}$, и порядка 10^4 при $M_{0F} = 1 \text{ meV}$, то есть $c_F \gg c^* \approx 28$.

Следовательно, графен соответствует рассмотренному нами случаю $c \equiv e|g|/\mu_B > c^* \approx 28$.

Численные оценки в контексте физики конденсированного состояния вещества

- Киральная симметрия не может быть восстановлена при произвольно больших значениях внешнего перпендикулярного магнитного поля и при $B_{\perp} \lesssim |\vec{B}|$ усиливается нарушение киральной симметрии. Однако, с помощью наклона магнитного поля по отношению к нормали к плоскости системы возможно восстановить киральную симметрию при $|\vec{B}| > 0.7|\vec{B}_0|$. Угол φ_0 между \vec{B} и плоскостью системы, при котором восстанавливается симметрия, может быть численно оценен.
При $|\vec{B}| = 1.5|\vec{B}_0|$, $M_{0F} = 10 \text{ meV}$ $\sin \varphi_0 \approx 0.02$, $\sin \varphi_0 \approx 0.2$
При $|\vec{B}| = 1.5|\vec{B}_0|$, $M_{0F} = 1 \text{ meV}$ $\sin \varphi_0 \approx 0.002$
То есть восстановление киральной симметрии происходит при очень слабых значениях компоненты магнитного поля B_{\perp} .

Численные оценки в контексте физики конденсированного состояния вещества

- $g_S = 200$ и $v_F = 1/300$
При $M_{0F} = 1$ meV, $|\vec{B}_0| = 0.14$ Т
При $M_{0F} = 10$ meV, $|\vec{B}_0| = 1.4$ Т

Эффекты, связанные с Зеймановским взаимодействием, могут наблюдаться в реальных системах конденсированного состояния вещества при лабораторных значениях внешнего магнитного поля.

- При $\mu_B \neq 0$ и $g > 0$, $g_c = 2\mu_B/e$
При $g > g_c$ достаточно слабое магнитное поле \vec{B} индуцирует спонтанное нарушение киральной симметрии при условии, что отклонение от вертикали \vec{B} не такое большое и $|\vec{B}| < B_c(g)$, где $0 < B_c(g) < \infty$.
При $0 < g < g_c$ киральная симметрия не может быть нарушена внешним магнитным полем.
- Предположим, что $\mu_B \neq 0$, $g > g_c > 0$ и что киральная симметрия нарушена, то есть \vec{B} имеет достаточно большую компоненту B_\perp . Тогда киральная симметрия может быть восстановлена простым наклоном внешнего магнитного поля по отношению к плоскости системы, то есть без увеличения модуля магнитного поля $|\vec{B}|$.

- Мы показали, что при $\mu_B \neq 0$, $g > 0$ и произвольном фиксированном $|\vec{B}| \neq 0$ можно наблюдать эффекты осцилляции намагниченности в области малых значений B_{\perp} .
- Если $\mu_B \neq 0$ и $g < 0$, то при учете зеймановского взаимодействия фазовый портрет модели содержит, по крайней мере, две фазы с нарушенной киральной симметрией, обозначенных как 2 и 3. В фазе 2, которая является диамагнитной, магнитное поле усиливает нарушение киральной симметрии, в то время как в парамагнитной фазе 3 киральный конденсат уменьшается с увеличением внешнего магнитного поля.

- В случае $g < 0$ и $c \equiv e|g|/\mu_B < c^* \approx 28$, при достаточно больших значениях $|\vec{B}|$ (даже в перпендикулярном магнитном поле) в модели происходит восстановление киральной симметрии.
- При $g < 0$ и $c \equiv e|g|/\mu_B > c^*$ прямая L не пересекает ни одну из критических кривых фазового портрета. В этом случае при произвольном (но не слишком большом) перпендикулярном магнитном поле киральная симметрия не может быть восстановлена. Увеличивая угол наклона магнитного поля от перпендикулярного направления, возможно восстановить симметрию. Именно такая ситуация реализуется для планарных систем типа графена.

Динамическое нарушение киральной симметрии в трехмерной модели Гросса-Невё с компактификацией в присутствии магнитного поля.

Модель

- Рассмотрим модель Гросса-Невё в случае пространства $R^2 \times S^1$, то есть на цилиндре (помимо времени есть одно некомпактифицированное измерение и одно компактифицированное пространственные измерения).
- Будем считать, что цилиндр вложен в $(3+1)$ -мерное пространство Минковского, в котором присутствует однородное магнитное поле H , направленное вдоль оси этого цилиндра.
- На поверхности цилиндра векторный потенциал имеет только одну постоянную компоненту вдоль компактифицированного измерения. Как будет показано она не может быть убрана калибровочным преобразованием, то есть существует ненулевой магнитный поток вдоль оси цилиндра.
- Будем считать, что магнитное поле взаимодействует со спином фермионов, который введем как дополнительный индекс у спинорного поля ψ . Заметим, что спин, введенный таким образом, не имеет отношения к группе Лоренца.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_s i \gamma^\mu D_\mu \psi_s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}_s \psi_s)^2 + \frac{\sigma_s}{2} g \mu_B H \bar{\psi}_s \gamma^0 \psi_s,$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_s i \gamma^\mu D_\mu \psi_s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}_s \psi_s)^2 + \frac{\sigma_s}{2} g \mu_B H \bar{\psi}_s \gamma^0 \psi_s,$$

$$\sigma_s = \pm 1,$$

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_s i \gamma^\mu D_\mu \psi_s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}_s \psi_s)^2 + \frac{\sigma_s}{2} g \mu_B H \bar{\psi}_s \gamma^0 \psi_s,$$

$$\sigma_s = \pm 1,$$

g - фактор Ланде, μ_B - магнетон Бора.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_s i \gamma^\mu D_\mu \psi_s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}_s \psi_s)^2 + \frac{\sigma_s}{2} g \mu_B H \bar{\psi}_s \gamma^0 \psi_s,$$

$$\sigma_s = \pm 1,$$

g - фактор Ланде, μ_B - магнетон Бора.

Константа связи делится на N ($\frac{G}{N}$), для того чтобы работать в пределе Т-Хофта $N \rightarrow \infty$. В противном случае, без N в знаменателе мы должны положить $GN = \text{const}$, $G \rightarrow 0$.

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_s i \gamma^\mu D_\mu \psi_s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}_s \psi_s)^2 + \frac{\sigma_s}{2} g \mu_B H \bar{\psi}_s \gamma^0 \psi_s,$$

$$\sigma_s = \pm 1,$$

g - фактор Ланде, μ_B - магнетон Бора.

Константа связи делится на N ($\frac{G}{N}$), для того чтобы работать в пределе Т-Хофта $N \rightarrow \infty$. В противном случае, без N в знаменателе мы должны положить $GN = const$, $G \rightarrow 0$.

D_μ ковариантная производная: $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$

$$A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = const$$

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_s i \gamma^\mu D_\mu \psi_s + \frac{G}{2N} (\bar{\psi}_s \psi_s)^2 + \frac{\sigma_s}{2} g \mu_B \mathbf{H} \bar{\psi}_s \boldsymbol{\gamma}^0 \psi_s,$$

$$\sigma_s = \pm 1,$$

g - фактор Ланде, μ_B - магнетон Бора.

Константа связи делится на N ($\frac{G}{N}$), для того чтобы работать в пределе Т-Хофта $N \rightarrow \infty$. В противном случае, без N в знаменателе мы должны положить $GN = const$, $G \rightarrow 0$.

D_μ ковариантная производная: $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$

$$A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = const$$

Зеймановский член

$$g = 2 \implies \sigma_s \mu_B \mathbf{H} \bar{\psi}^s \boldsymbol{\gamma}^0 \psi^s = \mu_B \mathbf{H} \bar{\psi}^1 \boldsymbol{\gamma}^0 \psi^1 - \mu_B \mathbf{H} \bar{\psi}^2 \boldsymbol{\gamma}^0 \psi^2$$

Граничные условия и калибровочные преобразования

Покажем, что в пространстве-времени $R^d \times S^1$ постоянный векторный потенциал вдоль компактифицированного измерения не может быть убран с помощью калибровочного преобразования.

$$A_\mu = 0 \text{ при } \mu = 1, \dots, d, \quad A_{d+1} = \text{const.}$$

Граничные условия и калибровочные преобразования

Покажем, что в пространстве-времени $R^d \times S^1$ постоянный векторный потенциал вдоль компактифицированного измерения не может быть убран с помощью калибровочного преобразования.

$$A_\mu = 0 \text{ при } \mu = 1, \dots, d, \quad A_{d+1} = \text{const.}$$

Калибровочные преобразования

$$\psi \rightarrow e^{ie\alpha} \psi,$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

Граничные условия и калибровочные преобразования

Покажем, что в пространстве-времени $R^d \times S^1$ постоянный векторный потенциал вдоль компактифицированного измерения не может быть убран с помощью калибровочного преобразования.

$$A_\mu = 0 \text{ при } \mu = 1, \dots, d, \quad A_{d+1} = \text{const.}$$

Калибровочные преобразования

$$\psi \rightarrow e^{ie\alpha} \psi,$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \alpha$$

Периодические граничные условия

$$\psi(x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + L) = \psi(x_1, \dots, x_d, x_{d+1})$$

Граничные условия и калибровочные преобразования

α должна удовлетворять условию:

$$\alpha(x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + L) = \alpha(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) + 2\pi en$$

где L -длина компактифицированного измерения.

Условие удовлетворяется при $\alpha(x) = \frac{2\pi n x_{d+1}}{L}$.

Граничные условия и калибровочные преобразования

α должна удовлетворять условию:

$$\alpha(x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + L) = \alpha(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) + 2\pi en$$

где L -длина компактифицированного измерения.

Условие удовлетворяется при $\alpha(x) = \frac{2\pi n x_{d+1}}{L}$.

Преобразование для A_{d+1}

$$A_{d+1} \rightarrow A_{d+1} - \frac{2\pi en}{L}$$

Произвольная константа не может быть убрана калибровочным преобразованием.

Граничные условия и калибровочные преобразования

α должна удовлетворять условию:

$$\alpha(x_1, \dots, x_d, x_{d+1} + L) = \alpha(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) + 2\pi en$$

где L -длина компактифицированного измерения.

Условие удовлетворяется при $\alpha(x) = \frac{2\pi n x_{d+1}}{L}$.

Преобразование для A_{d+1}

$$A_{d+1} \rightarrow A_{d+1} - \frac{2\pi en}{L}$$

Произвольная константа не может быть убрана калибровочным преобразованием.

Система взаимодействует с векторным потенциалом, но не с напряженностью магнитного поля, что соответствует эффекту Аронова-Бома.

Наложим граничные условия

$$\psi(x + L) = e^{2\pi i\alpha}\psi(x).$$

$\alpha = 0$ - периодические граничные условия.

Наложим граничные условия

$$\psi(x + L) = e^{2\pi i \alpha} \psi(x).$$

$\alpha = 0$ - периодические граничные условия.

$\alpha = \frac{1}{2}$ - антипериодические граничные условия.

Граничные условия для графена

Граничные условия для графена немного более сложные и разные для разных точек Дирака

$$\psi_K(x + L) = \psi_K(x)e^{2\pi i(\phi - \frac{\nu}{3})}$$

$$\psi_{K'}(x + L) = \psi_{K'}(x)e^{2\pi i(\phi + \frac{\nu}{3})}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi^{AK} \\ \psi^{BK} \\ \psi^{BK'} \\ \psi^{AK'} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{x}{R})(n+\phi)} \frac{1}{2\pi} \int d^2 p e^{ipx} \begin{pmatrix} \psi_n^{AK} e^{i(\frac{x}{R})\nu/3} \\ \psi_n^{BK} e^{i(\frac{x}{R})\nu/3} \\ \psi_n^{BK'} e^{-i(\frac{x}{R})\nu/3} \\ \psi_n^{AK'} e^{-i(\frac{x}{R})\nu/3} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma[\psi, \bar{\psi}, \sigma] = \int dx \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \sigma \bar{\psi} \psi - \frac{N}{2G} \sigma^2 - iN \text{tr} \ln(i\gamma \partial - \sigma) \right),$$

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} = \bar{\eta}, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} = -\eta, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma} = -J.$$

Зануляя источники, получим для $\psi, \bar{\psi}, \sigma$ следующие условия экстремума эффективного действия

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} = 0, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} = 0, \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \sigma} = 0.$$

Для фермионов получим уравнение Дирака

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \sigma \psi = 0.$$

Для того чтобы сохранить Лоренц-инвариантность, предположим, что $\psi = 0, \bar{\psi} = 0$.

Эффективный потенциал

Получим для эффективного действия для скалярного поля σ

$$\Gamma[\sigma] = \int dx \left(-\frac{N}{2G} \sigma^2 - iNtr \ln(i\gamma\partial - \sigma) \right).$$

Определим эффективный потенциал как

$$V_{\text{eff}} = -\frac{\Gamma}{\int d^3x} = -\frac{\Gamma}{TV}.$$

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{2G} \sigma^2 + i\frac{1}{TV} Ntr \ln(i\gamma\partial - \sigma).$$

Эффективный потенциал

$$V_{eff} = \frac{\sigma^2}{2G} - \frac{1}{\beta L} \sum_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \ln \left[p_0^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n + \phi)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \right].$$

Магнитный поток

$$\phi = \frac{eL^2 H}{8\pi^2}.$$

Эффективный потенциал

Чтобы рассмотреть теорию при конечных температурах и плотностях, необходимо заменить интегрирование по импульсу p_0 на суммирование по матцубаровским частотам

$$p \rightarrow \frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\mu, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

Эффективный потенциал при конечной температуре

$$V_{\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} - \frac{1}{\beta L} \sum_s \sum_l \sum_{n=-\infty}^{\infty} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_1}{2\pi} \ln \left[\left(\frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\mu_s \right)^2 + \left(\frac{2\pi}{L} \right)^2 (n + \phi)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \right].$$

Эффективный потенциал

Выражение для эффективного потенциала может быть получено в относительно компактной форме

$$V_{\text{eff}} = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2 \sigma_0}{2} \right) + V_{\mu T} + \\ + \frac{4N}{\beta L} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_l}{n} K_1(L\sigma_l n) \cos(2\pi\alpha n),$$

где

$$\sigma_l = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\beta} \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\mu \right)^2 + \sigma^2}.$$

Эффективный потенциал

Вклад температуры и химического потенциала

$$V_{\mu T} = -\frac{N}{\pi\beta^3} Li_3(-e^{-\beta\sigma+\beta\mu}) - \frac{N}{\pi\beta^3} Li_3(-e^{-\beta\sigma-\beta\mu}) - \\ -\frac{N\sigma}{\pi\beta^2} Li_2(-e^{-\beta\sigma+\beta\mu}) - \frac{N\sigma}{\pi\beta^2} Li_2(-e^{-\beta\sigma-\beta\mu}),$$

где используется полилогарифм, определенный как

$$Li_\nu(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\nu}.$$

Перенормируем константы связи

$$\frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{G} - \frac{\Lambda}{\pi} + \frac{\mu}{\pi^2} = \frac{1}{g} + \frac{\mu}{\pi^2},$$

$$\frac{1}{g(\mu)} = \frac{1}{g(\mu_0)} + \frac{1}{\pi^2}(\mu - \mu_0).$$

Эффективный потенциал

$$V_{\text{eff}} = V_L + V_0 + V_{\mu T},$$

$$V_L = 2\text{Re}\left(\frac{1}{\pi L^3} \text{Li}_3(e^{-L\sigma+2\pi i\phi}) + \frac{\sigma}{\pi L^2} \text{Li}_2(e^{-L\sigma+2\pi i\phi})\right),$$

$$V_0 = \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2 \sigma_0}{2} \right),$$

$$V_{\mu T} = -\frac{2}{\beta L} \sum \int \frac{dp_1}{2\pi} (\ln(1 + e^{\beta E_{np_1}^+}) + \ln(1 + e^{\beta E_{np_1}^-})),$$

$$E_{np_1}^{\pm} = E_{np_1} \pm \mu.$$

Эффективный потенциал

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}} = & \frac{N}{\pi} \left(\frac{\sigma^3}{3} - \frac{\sigma^2 \sigma_0}{2} \right) + \frac{2N}{\pi L^3} \text{Li}_3(e^{-L\sigma+2\pi\alpha}) + \frac{2N}{\pi L^3} \text{Li}_3(e^{-L\sigma-2\pi i\alpha}) + \\ & + \frac{2N\sigma}{\pi L^2} \text{Li}_2(e^{-L\sigma+2\pi i\alpha}) + \frac{2N\sigma}{\pi L^2} \text{Li}_2(e^{-L\sigma-2\pi i\alpha}) - \\ & - \frac{2N}{\pi\beta L} \sum_{\sigma_n < \mu} \int \frac{dp_1}{2\pi} \ln \left(1 + e^{(-\beta\sqrt{p_1^2 + \Delta_n^2} + \beta\mu)} \right) + \\ & + \frac{2N}{\pi\beta L} \sum_{\sigma_n > \mu} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sigma_n}{m} K_1(\beta\sigma_n m) e^{\beta\mu m} + \\ & + \frac{2N}{\pi\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sigma_n}{m} K_1(\beta\sigma_n m) e^{-\beta\mu m}, \end{aligned}$$

где $\Delta_n = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2(n+\alpha)^2 + \sigma^2}$.

Полная намагниченность

Полная намагниченность

$$m = -\left(\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \mu} \frac{g\mu_B}{2} + \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi} \frac{eL^2}{8\pi^2}\right),$$

$$n_s = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left(\frac{\text{sh}(\beta\mu_s)}{\text{ch}(\beta\mu_s) + \text{ch}(\beta E_{np_1})} \right),$$

где

$$E_{np_1} = \sqrt{p_1^2 + \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (n + \alpha)^2 + \sigma^2}.$$

Намагниченность из-за эффекта Зеймана

$$m = \mu_B(n_1 - n_2).$$

Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=0, \alpha = 0$

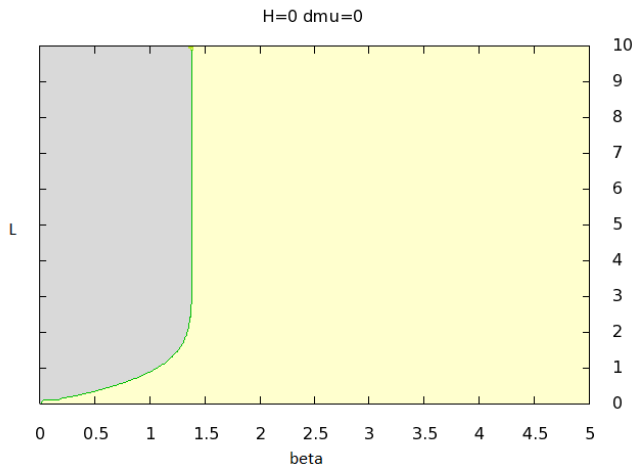


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=0, \alpha = 0$

Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=33, \alpha = 0$

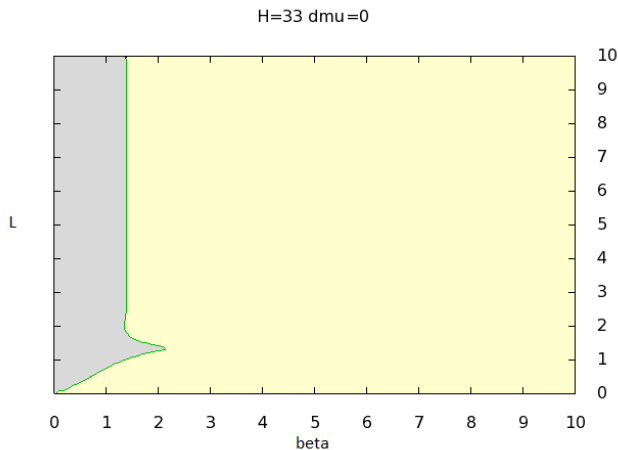


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=33, \alpha = 0$

Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=115$, $\alpha = 0$

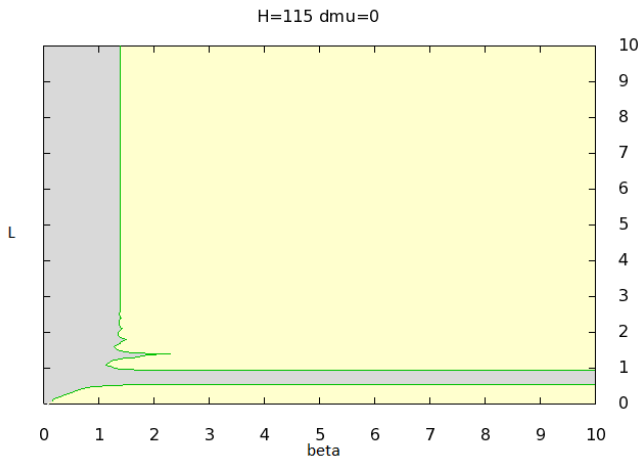


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=115$, $\alpha = 0$

Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=135$, $\alpha = 0$

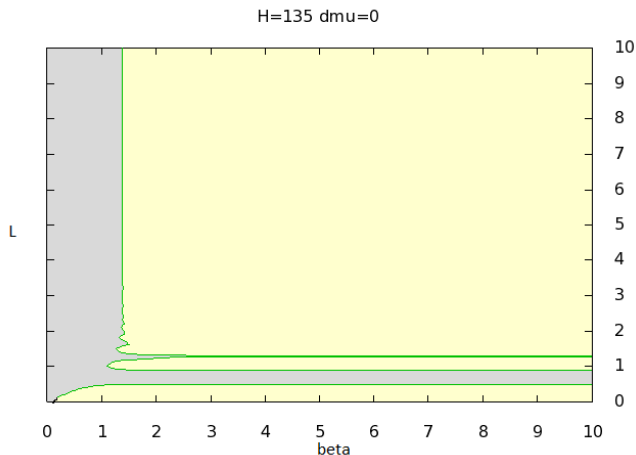


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=135$, $\alpha = 0$

Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=330$, $\alpha = 0$

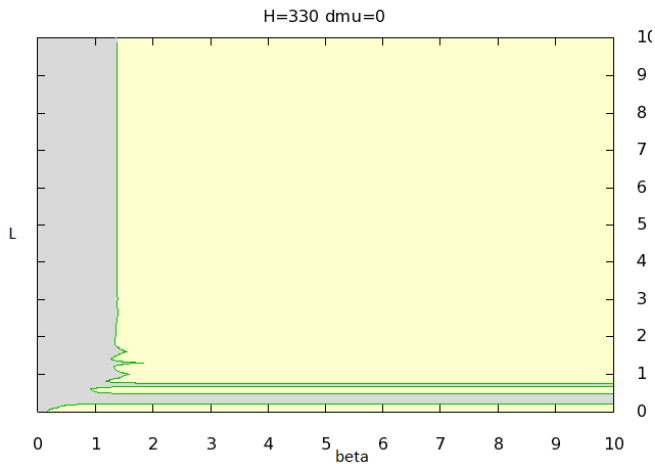


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=330$, $\alpha = 0$

Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=0$, $\alpha = \frac{1}{2}$

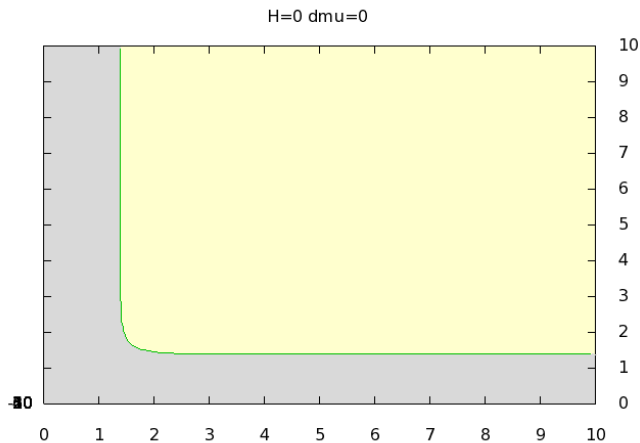


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=0$, $\alpha = \frac{1}{2}$

Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=130$, $\alpha = \frac{1}{2}$

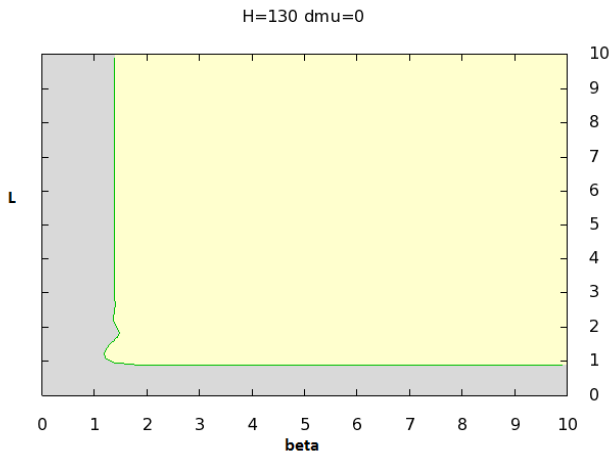


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=130$, $\alpha = \frac{1}{2}$

Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=330$, $\alpha = \frac{1}{2}$

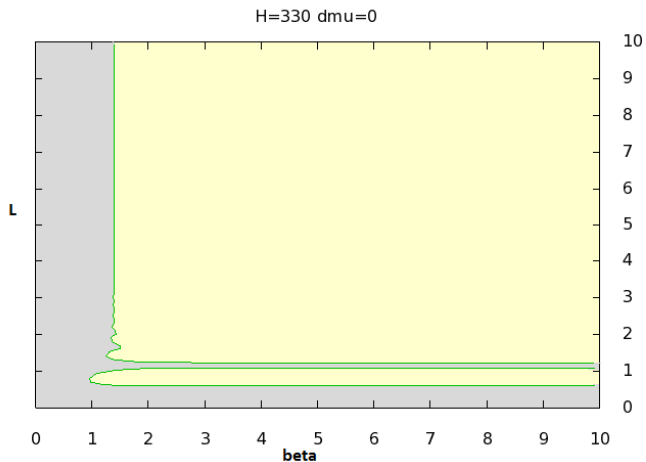


Рис.: Фазовая диаграмма в терминах (L, β) при $H=330$, $\alpha = \frac{1}{2}$

В случае периодических граничных условий $\alpha = 0$ увеличение температуры восстанавливает киральную симметрию. Если присутствует ненулевой магнитный поток, то он может восстановить симметрию и при нулевой температуре. Однако, он не может восстановить симметрию при больших радиусах компактификации $L < L_c$. При больших полях есть область L , где симметрия может восстанавливаться или нарушаться при незначительных изменениях L .

В случае антипериодических граничных условий $\alpha = \frac{1}{2}$ увеличение температуры восстанавливает киральную симметрию. При ($\delta\mu = 0$) магнитное поле способствует нарушению киральной симметрии.

Мы надеемся, что эти результаты прольют свет на влияние внешнего магнитного поля на углеродные нанотрубки.

Итоги диссертации

- В $(2+1)$ -мерной модели Ходоса химический потенциал всегда индуцирует явление сверхпроводимости, в отличие от $(1+1)$ -мерной модели.
- Увеличение параллельного магнитного поля в случае $(2+1)$ -мерной модели Ходоса с учетом зеймановского взаимодействия приводит к появлению сверхпроводящего конденсата.
- В $(2+1)$ -мерной модели Гросса-Неве с учетом зеймановского взаимодействия под влиянием внешнего наклонного магнитного поля при увеличении магнитного поля вначале происходит явление магнитного катализа, но при дальнейшем увеличении (даже в случае только перпендикулярной компоненты) киральная симметрия восстанавливается.

- В случае одного компактифицированного измерения (периодическое граничное условие) при достаточно большом значении магнитного поля в определенной области L при малых температурах возможно периодически нарушать и восстанавливать киральную симметрию не слишком большими изменениями L .
- Мы надеемся, что наши результаты прольют свет на явление сверхпроводимости в системах с планарной структурой в физике конденсированного состояния вещества и на физику углеродных нанотрубок.

Спасибо за внимание.