Бигравитация: что в ней нового для космологии?

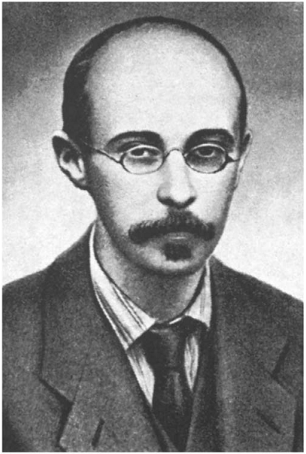
В.О. Соловьев

Семинар ОТФ, 31.03.2015

Каждая новая формула уменьшает число внимательных слушателей вдвое :-((

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$B_i(r) = \beta_i + 3\beta_{i+1}r + 3\beta_{i+2}r^2 + \beta_{i+3}r^3$$
$$D_i(r) = \beta_i + 2\beta_{i+1}r + \beta_{i+2}r^2 \equiv \frac{1}{3}B'_{i+1}$$



Дорогой Павел Сигизмундович

Посылаю Вам небольшую заметку касающуюся вопроса о возможной форме вселенной более общей, чем цилиндрический мир Эйнштейна и сферический мир de Sitter'a; кроме этих двух случаев получается еще мир, пространство коего обладает <u>переменным</u> с течением времени радиусом кривизны; мне казалось, что такого рода вопрос может заинтересовать Вас или de Sitter'a. В ближайшее время я пошлю Вам немецкий перевод этой заметки, если Вы найдете вопрос в ней разбираемый интересным, то не откажите поместить в каком либо журнале.

Передайте мой поклон Татьяне Алексеевне.

Не откажите, в виду неисправности почты, подтвердить получение настоящаго письма

3 Июня 1922 г. Искренне Ваш А. Фридман

Лагранжиан гравитационного поля

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M(\phi^A, g_{\mu\nu}), \qquad \kappa = 16\pi G,$$

лагранжиан материи (пример: скалярное поле)

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - U(\phi)\right),$$

уравнения

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(R - 2\Lambda) = \frac{\kappa}{2}T_{\mu\nu},$$

простейшая космология

$$g_{\mu\nu} = (-N^2(t), a^2(t)\delta_{ij}), \qquad \sqrt{-g} = Na^3, \qquad \phi = \phi(t).$$

Космология в общей теории относительности

Гравитация

$$\mathcal{L}_g = Na^3\left(-\frac{6}{\kappa}\left(\frac{\dot{a}}{Na}\right)^2 - 2\Lambda\right), \qquad \mathcal{H} = \frac{\dot{a}}{Na}, \qquad \pi_a = -\frac{12a^2}{\kappa}\mathcal{H}.$$

Материя (скалярное поле)

$$\mathcal{L}_\phi = Na^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{N}\right)^2 - U(\phi)\right), \qquad \pi_\phi = \frac{a^3}{N}\dot{\phi}.$$

Феноменология идеального газа (плотность и давление)

$$\rho = \frac{{\pi_\phi}^2}{2a^6} + U(\phi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{N}\right)^2 - U(\phi), \qquad p = \frac{{\pi_\phi}^2}{2a^6} - U(\phi).$$

Уравнения Фридмана

Общий гамильтониан и скобка Пуассона

$$\mathrm{H} = Na^3 \left(-\frac{6\mathcal{H}^2}{\kappa} + \rho + \frac{2\Lambda}{\kappa} \right), \qquad \{a, \mathcal{H}\} = -\frac{\kappa}{12a^2}.$$

Уравнение связи (N – множитель Лагранжа)

$$-\frac{6\mathcal{H}^2}{\kappa} + \rho + \frac{2\Lambda}{\kappa} = 0, \qquad \leftrightarrow \qquad \left(\frac{\dot{a}}{Na}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}.$$

Закон сохранения энергии (следствие уравнений материи)

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0.$$

Динамическое гамильтоново уравнение гравитации

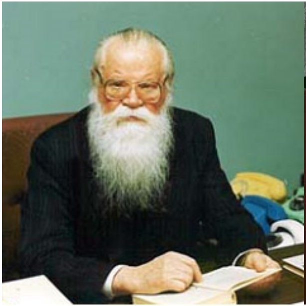
$$\dot{\mathcal{H}} = -\frac{N\kappa}{4}(\rho + p) = -4\pi G N(\rho + p).$$

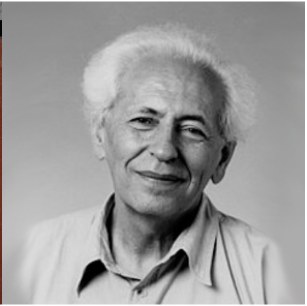
Permutations (G,R,T)

$$\text{GRT} \rightarrow \text{RTG}$$

$$\text{GRT} \rightarrow {}_{\text{d}}\text{RGT}$$

RTG





de Rham, Gabadadze, Tolley (dRGT)

Бигравитация

Переменные для космологии: f и g метрики, f и g материи

$$\begin{aligned} f_{\mu\nu} &= (-N^2(t), \omega^2(t)\delta_{ij}), \\ g_{\mu\nu} &= (-\bar{N}^2(t), \xi^2(t)\delta_{ij}), \\ \rho_f &= \rho_f(t), \qquad \rho_g = \rho_g(t), \\ p_f &= p_f(t), \qquad p_g = p_g(t), \end{aligned}$$

новые переменные

$$u = \frac{\bar{N}}{N}, \qquad r = \frac{\omega}{\xi}.$$

Лагранжиан бигравитации

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_M - \sqrt{-g}\, U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

Bi-GRT: космологические уравнения

Связи

$$
\begin{aligned}
H_g^2 &= \frac{\kappa_g}{6}\rho_g + \frac{\Lambda_g}{3},\\
H_f^2 &= \frac{\kappa_f}{6}\rho_f + \frac{\Lambda_f}{3},
\end{aligned}
$$

законы сохранения энергии

$$
\begin{aligned}
\dot{\rho}_g &= -3\bar{N}H_g(\rho_g + p_g),\\
\dot{\rho}_f &= -3NH_f(\rho_f + p_f),
\end{aligned}
$$

динамические уравнения гравитации

$$
\begin{aligned}
\dot{H}_g &= -\frac{\bar{N}\kappa_g}{4}(\rho_g + p_g),\\
\dot{H}_f &= -\frac{N\kappa_f}{4}(\rho_f + p_f).
\end{aligned}
$$

de Rham, Gabadadze, Tolley (dRGT)

Bi-dRGT (1)

Потенциал взаимодействия строится из симметричных полиномов матрицы $X^\mu_\nu = \left(\sqrt{g^{-1}f}\right)^\mu_\nu$:

$$U = \frac{2m^2}{\kappa}\sqrt{-g}\sum_{n=0}^{4}\beta_n e_n(X) = \frac{2m^2}{\kappa}\left(\beta_0\sqrt{-g} + \ldots + \beta_4\sqrt{-f}\right),$$

выражающиеся через собственные значения матрицы X:

$$\begin{aligned}
e_0 &= 1,\\
e_1 &= \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4,\\
e_2 &= \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_4+\lambda_4\lambda_1+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_4,\\
e_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_4,\\
e_4 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4,
\end{aligned}$$

Bi-dRGT (2)

Арифметический корень из диагональной матрицы $g^{-1}f$:

$$\begin{aligned} Y^{\mu}_{\nu} &= \left(g^{-1}f\right)^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu} = \mathrm{diag}\left(u^{-2}, r^2\delta_{ij}\right), \\ X &= \sqrt{Y} = \mathrm{diag}\left(+\sqrt{u^{-2}}, +\sqrt{r^2}\delta_{ij}\right) \equiv \mathrm{diag}\left(u^{-1}, r\delta_{ij}\right). \end{aligned}$$

Собственные значения λ_i и симметричные полиномы e_i:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u^{-1}, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = r, \\ e_0 &= 1, \\ e_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = u^{-1} + 3r, \\ e_2 &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4 = 3ru^{-1} + 3r^2, \\ e_3 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 = 3r^2u^{-1} + r^3, \\ e_4 &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = r^3u^{-1}. \end{aligned}$$

Потенциал Bi-dRGT в космологии

Деформированный куб суммы: $(1 + r)^3$

$$B_i(r) = \beta_i + 3\beta_{i+1} r + 3\beta_{i+2} r^2 + \beta_{i+3} r^3,$$

потенциал

$$U = \frac{2m^2}{\kappa} N u \xi^3 \left(B_0(r) + \frac{1}{u} B_1(r) \right) = \frac{2m^2}{\kappa} N \left(uV + W \right),$$

и части его

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{N} \frac{\partial U}{\partial u} = \xi^3 B_0(r), \\ W &= \frac{1}{N} \left(U - u \frac{\partial U}{\partial u} \right) = \xi^3 B_1(r) \equiv \omega^3 \frac{B_1(r)}{r^3}. \end{aligned}$$

Связи

$$H_g^2 = \frac{\kappa_g}{6}\rho_g + \frac{\Lambda_g}{3}, \qquad \Lambda_g(r) = m^2 B_0(r)\left[\frac{\kappa_g}{\kappa}\right],$$
$$H_f^2 = \left[\frac{\kappa_f}{6}\rho_f\right] + \frac{\Lambda_f}{3}, \qquad \Lambda_f(r) = m^2 \frac{\kappa_f}{\kappa_g}\frac{B_1(r)}{r^3}\left[\frac{\kappa_g}{\kappa}\right],$$

законы сохранения энергии

$$\dot\rho_g = -3NuH_g(\rho_g + p_g),$$
$$\dot\rho_f = -3NH_f(\rho_f + p_f),$$

динамические уравнения гравитации

$$\dot H_g = -\frac{Nu\kappa_g}{4}(\rho_g + p_g) + \frac{N}{6}m^2(1-ur)B_0{}'(r)\left[\frac{\kappa_g}{\kappa}\right],$$
$$\dot H_f = \left[-\frac{N\kappa_f}{4}(\rho_f + p_f)\right] - \frac{N}{6}m^2\frac{\kappa_f}{\kappa_g}(1-ur)\frac{B_0{}'(r)}{r^3}\left[\frac{\kappa_g}{\kappa}\right].$$

Космология Bi-dRGT (2)

Вторичная связь

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathcal{S}} &= \{\mathcal{S}, \mathrm{H}\} = N\{\mathcal{S}, \mathcal{R}'\} \equiv N\Omega = 0, \\
\Omega &\equiv \{\mathcal{S}, \mathcal{R}'\} = \frac{4m^2}{\kappa}\xi^2\left(\omega H_f - \xi H_g\right) B_0{}'(r) = 0, \\
\Omega &= \Omega_1\Omega_2,
\end{aligned}
$$

факторизуется, поэтому имеются две ветви:

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= 0, &\leftrightarrow\quad & H_g = rH_f, && (1)\\
\Omega_2 &= 0, &\leftrightarrow\quad & \beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2 = 0 = B_0{}'(r). && (2)
\end{aligned}
$$

Массивная гравитация dRGT

Метрика $f_{\mu\nu}$ замораживается и считается Минковской, f-материя исключается

$$\omega = 1, \qquad H_f = 0, \qquad \rho_f = 0 = p_f,$$

тогда

$$\dot{\omega} = 0 = H_f, \qquad r = \frac{1}{\xi},$$

и вторичная связь принимает вид

$$\Omega = -\frac{4m^2}{\kappa}\xi H_g\left(\beta_1\xi^2 + 2\beta_2\xi + \beta_3\right) = 0.$$

Динамика однородного изотропного мира невозможна, т.к. это уравнение выполняется только при постоянной ξ.

Космология Bi-dRGT (первая ветвь)

$$
\begin{aligned}
H_f &= r^{-1}H_g, \\
\dot r &= Nr(1-ur)H_g, \qquad u = -\{\Omega_1,\mathcal{R}'\}/\{\Omega,\mathcal{S}\}, \\
H_g^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + m^2 r\left(\left[\frac{\beta_0}{3r}+\right]\beta_1+\beta_2 r+\frac{\beta_3}{3}r^2\right), \\
H_g^2 &= \frac{m^2}{r}\left[\frac{\kappa_f}{\kappa_g}\right]\left(\frac{\beta_1}{3}+\beta_2 r+\beta_3 r^2\left[+\frac{\beta_4}{3}r^3\right]\right), \\
\rho &= \frac{m^2}{8\pi G}\left(\left[\frac{\kappa_f}{\kappa_g}\right]\frac{B_1(r)}{r}-B_0(r)\right), \\
\rho+p &= \frac{m^2}{8\pi G}(1-ur)\left(\left[\frac{\kappa_f}{\kappa_g}\right]\frac{D_1(r)-2B_1(r)}{r^2}-D_1(r)\right), \\
\dot\rho &= -3NuH_g(\rho+p), \\
\dot H_g &= N\left[-4\pi Gu(\rho+p)+\frac{m^2}{6}(1-ur)(\beta_1+2\beta_2 r+\beta_3 r^2)\right].
\end{aligned}
$$

Космология Bi-dRGT (вторая ветвь)

$$
\begin{aligned}
D_1(r) &\equiv \beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2 = 0, \qquad \dot r = 0,\\
u &= \frac{H_f}{H_g}, \qquad \dot H_f = 0,\\
H_g^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + m^2 r\left(\left[\frac{\beta_0}{3r}+\right]\beta_1 + \beta_2 r + \frac{\beta_3}{3}r^2\right),\\
H_f^2 &= \frac{\kappa_f}{\kappa_g}\frac{m^2}{r^3}\left(\frac{\beta_1}{3} + \beta_2 r + \beta_3 r^2\left[+\frac{\beta_4}{3}r^3\right]\right),\\
\rho &= \frac{m^2}{8\pi G}\left(\left[\frac{\kappa_f}{\kappa_g}\right]\frac{B_1(r)}{u^2 r^3} - B_0(r)\right),\\
\dot\rho &= -3NuH_g(\rho + p),\\
\dot H_g &= -4\pi G N u\,(\rho + p),
\end{aligned}
$$

Model	Λ_{eff} $(\alpha \to 0)$	$\mathcal{O}(\alpha^2)$ correction
$\beta_1, \beta_2 \neq 0$	$-\frac{2}{3}\frac{\beta_1^2}{\beta_2}m^2$	$-\frac{2}{9}\frac{\beta_1^2}{\beta_2^2}\alpha^2\left(\frac{\rho}{2M_{Planck}^2} - \frac{\beta_1^2}{3\beta_2}m^2\right)$
$\beta_1, \beta_3 \neq 0$	$\frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{\beta_1^{3/2}}{\sqrt{-\beta_3}}m^2$	$\frac{\beta_1}{\beta_3}\alpha^2\left(\frac{\rho}{3M_{Planck}^2} - \frac{8\beta_1^{3/2}}{9\sqrt{-3\beta_3}}m^2\right)$
$\beta_1, \beta_4 \neq 0$	$3\frac{\beta_1^{4/3}m^2}{\sqrt[3]{-\beta_4}}$	$-\left(-\frac{\beta_1}{\beta_4}\right)^{2/3}\left(\frac{\rho}{M_{Planck}^2} + 3\frac{\beta_1^{4/3}}{\sqrt[3]{-\beta_4}}m^2\right)$
$\beta_2, \beta_3 \neq 0$	$2\frac{\beta_2^3}{\beta_3^2}m^2$	$-\frac{\beta_2^2}{\beta_3^2}\alpha^2\left(\frac{\rho}{M_{Planck}^2} + \frac{2\beta_2^3}{\beta_3^2}m^2\right)$
$\beta_2, \beta_4 \neq 0$	$-9\frac{\beta_2^2}{\beta_4}m^2$	$3\frac{\beta_2}{\beta_4}\alpha^2\left(\frac{\rho}{M_{Planck}^2} - \frac{9\beta_2^2}{\beta_4}m^2\right)$

Таблица : The effective cosmological constant and lowest-order corrections (which are time-dependent through ρ) for a variety of two-parameter models. We have chosen solution branches which lead to positive Λ_{eff} for appropriate signs of the β_n, and generally take $\beta_1 \geq 0$ based on viability conditions. The $\beta_3, \beta_4 \neq 0$ model does not possess a finite-branch solution.

Era of transition to stability	$H_\star$	α	M_f
BBN	10^{-16} eV	10^{-17}	100 GeV
GUT-scale inflation	10^{13} GeV	10^{-55}	10^{-27} eV
M_{Planck}	10^{19} GeV	10^{-61}	10^{-33} eV

Таблица : The values of α and M_f for a few choices of the era at which perturbations become stable.

Одна материя, минимально взаимодействующая с двумя метриками

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-f}\left(\frac{1}{2}f^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - U(\phi)\right) + \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - U(\phi)\right),$$

$$\begin{aligned}
H_g^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{m^2}{6}B_0(r), \\
H_f^2 &= \frac{\kappa_f}{\kappa_g}\left(\frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{m^2}{6}\frac{B_1}{r^3}\right), \\
\rho &= \frac{\pi_\phi^2}{2\xi^6\left(ur^3+1\right)^2} + U(\phi).
\end{aligned}$$

Взаимодействие с эффективной метрикой

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \alpha^2 g_{\mu\nu} + 2\alpha\beta g_{\mu\alpha}\sqrt{g^{-1}f}^{\alpha}_{\ \nu} + \beta^2 f_{\mu\nu},$$

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-\mathcal{G}}\left(\frac{1}{2}\mathcal{G}^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - U(\phi)\right),$$

В космологии

$$\mathcal{G}_{00} = -\mathcal{N}^2, \qquad \mathcal{G}_{ij} = a^2\delta_{ij},$$

$$\mathcal{N} = N(\alpha u + \beta), \qquad a = \alpha\xi + \beta\omega.$$

$$\sqrt{-\mathcal{G}} = \mathcal{N}a^3,$$

$$\mathcal{L}_\phi = \mathcal{N}a^3\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\phi}}{\mathcal{N}}\right)^2 - U(\phi)\right), \qquad \pi_\phi = \frac{a^3}{\mathcal{N}}\dot{\phi}.$$

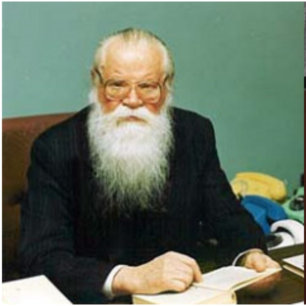
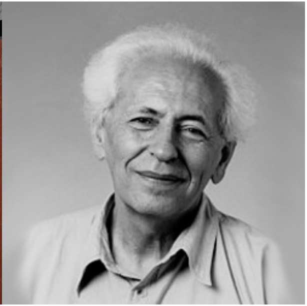
Уравнения связей

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \frac{6\xi^3}{\kappa_g}\left[-{H_g}^2 + \alpha(\alpha+\beta r)^3 \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{m^2}{3} B_0(r)\right] = 0, \\
\mathcal{R}' &= \frac{6\omega^3}{\kappa^{(f)}}\left[-{H_f}^2 + m^2 \frac{\kappa_f}{\kappa_g} \frac{B_1(r)}{3r^3}\right] = 0, \\
\Omega &\propto \Omega_1\Omega_2 = 0, \\
\Omega_1 &= rH_f - H_g, \\
\Omega_2 &= \beta_1 + 2\beta_2 r + \beta_3 r^2 - \alpha\beta\left(\alpha+\beta r\right)^2 p = 0.
\end{aligned}
$$

Плотность и давление

$$
\rho = \frac{\pi_\phi^2}{2a^6} + U(\phi), \qquad p = \frac{\pi_\phi^2}{2a^6} - U(\phi).
$$

RTG

Потенциал РТГ (а также и би-РТГ) в общем виде

$$U = \frac{m^2}{\kappa}\left[\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - 1\right) - \sqrt{-f}\right],$$

в космологии

$$\sqrt{-g} = Nu\xi^3, \qquad \sqrt{-f} = N\omega^3, \qquad g^{\mu\nu}f_{\mu\nu} = \frac{1}{u^2} + 3r^2,$$

потенциал би-РТГ в космологии

$$U = \frac{m^2}{\kappa}N\xi^3\left[\frac{1}{2u} + u\left(\frac{3}{2}r^2 - 1\right) - r^3\right].$$

Bi-RTG (2)

Вклады от потенциала в уравнения “связей” (уравнения Фридмана)

$$\begin{aligned} V &= \frac{\partial U}{\partial u} = N\frac{m^2}{\kappa}\xi^3\left(-\frac{1}{2u^2} - 1 + \frac{3}{2}r^2\right), \\ W &= U - u\frac{\partial U}{\partial u} = N\frac{m^2}{\kappa}\omega^3\left(\frac{1}{ur^3} - 1\right), \end{aligned}$$

Вариации гамильтониана по N и u дают уравнения Фридмана:

$$\begin{aligned} H_g^2 &= \frac{\kappa_g}{6}\rho_g + \frac{m^2}{6}\frac{\kappa_g}{\kappa}\left(-\frac{1}{2u^2} - 1 + \frac{3}{2}r^2\right), \\ H_f^2 &= \frac{\kappa_f}{6}\rho_f + \frac{m^2}{6}\frac{\kappa_f}{\kappa}\left(\frac{1}{ur^3} - 1\right). \end{aligned}$$

Bi-RTG (3)

$$
\begin{aligned}
H_g^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{m^2}{6}\left(-\frac{1}{2u^2} - 1 + \frac{3}{2}r^2\right), \\
H_f^2 &= \frac{m^2}{6}\frac{\kappa_f}{\kappa_g}\left(\frac{1}{ur^3} - 1\right), \\
\dot{\rho} &= -3NuH_g(\rho + p), \\
\dot{H}_g &= Nu\left[-4\pi G(\rho + p) + \frac{m^2}{4}\frac{1-(ur)^2}{u^2}\right], \\
\dot{H}_f &= -N\frac{m^2}{4}\frac{\kappa_f}{\kappa_g}\frac{1-(ur)^2}{ur^3}.
\end{aligned}
$$

Массивная гравитация РТГ

Метрика $f_{\mu\nu}$ замораживается и считается Минковской:

$$\omega = 1, \qquad H_f = 0, \qquad \rho_f = 0,$$

тогда должно выполняться условие

$$u = \frac{1}{r^3} = \xi^3,$$

подставляя это во второе уравнение Фридмана получаем

$$\begin{aligned} H_g^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \\ \Lambda(\xi) &= \frac{m^2}{2}\left(-\frac{1}{2\xi^6} - 1 + \frac{3}{2\xi^2}\right) \leq 0, \end{aligned}$$

что дает циклическую эволюцию Вселенной $\xi_{\mathrm{min}} \leq \xi \leq \xi_{\mathrm{max}}$.