

# Динамическое нарушение симметрии в трехмерной модели Гросса–Невё при конечной температуре под влиянием магнитного поля

П. Б. Колмаков

Диссертационная работа  
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
аспиранта кафедры теоретической физики  
физического факультета  
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

1 ноября 2016 г.

# План доклада

- 1 Введение
- 2 Модель Гросса–Невё на цилиндре
- 3 Эффект Ааронова–Бома
- 4 Химический потенциал
- 5 Эффект Зеемана и намагничивание
- 6 Заключение и выводы

# Модель Гросса–Невё

Действие модели Гросса–Невё:

$$S = \int d^D x \left[ \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_k + \frac{G}{2N} \left( \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \psi_k \right)^2 \right]$$

( $N$  — число «ароматов» фермионов, всюду далее  $\bar{\psi} \hat{O} \psi \equiv \sum_{k=1}^N \bar{\psi}_k \hat{O} \psi_k$ ).

Поскольку

$$\text{mdim}(G) = 2 - D,$$

модель неперенормируема в рамках обычной теории возмущений при  $D > 2$ .

# Двумерная модель Гросса–Невё

$$S = \int d^2x \left[ \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{G}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2 \right],$$

$$\mu = \overline{0,1}, \quad \gamma^\mu = \sigma^{\mu+1} \quad (\sigma - \text{матрицы Паули}).$$

Действие обладает  $\mathbf{U}(N)$ -симметрией по ароматам, а также  $\mathbf{Z}(2)$  киральной симметрией:

$$\begin{aligned} \psi_L(x)' &= \pm \psi_L(x), & \bar{\psi}_L(x)' &= \pm \bar{\psi}_L(x), \\ \psi_R(x)' &= \mp \psi_R(x), & \bar{\psi}_R(x)' &= \mp \bar{\psi}_R(x), \end{aligned}$$

где

$$\psi_{R,L}(x) = \frac{1 \pm \gamma^2}{2} \psi, \quad \bar{\psi}_{R,L}(x) = \bar{\psi} \frac{1 \mp \gamma^2}{2}.$$

Введем вспомогательное поле

$$\sigma(x) = \frac{G}{N} \bar{\psi}(x) \psi(x).$$

После этого действие переписывается в виде:

$$S = \int d^2x \left[ \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \psi \sigma + \frac{N}{2G} \sigma^2 \right].$$

Видно, что при  $\sigma \neq 0$  слагаемое  $\bar{\psi} \psi \sigma$  нарушает киральную симметрию. Далее, ограничимся ведущим порядком в разложении по степеням  $1/N$  и будем полагать, что  $\sigma = \text{const}(x) = \frac{G}{N} \langle \bar{\psi} \psi \rangle$  («приближение среднего поля»), тогда в импульсном представлении:

$$S = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \bar{\psi}(-k) [i \gamma^\mu k_\mu - \sigma] \psi(k) + \frac{NV}{2G} \sigma^2,$$

где  $V$  — объём пространства-времени.

Введем эффективный потенциал исходя из формулы  $Z = \exp(-NVV_{\text{eff}})$ :

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2k \ln(k^2 + \sigma^2) + \frac{1}{2G}\sigma^2.$$

После взятия интеграла:

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{4\pi} \left( -\ln \Lambda_2^2 - 1 + \ln \sigma^2 + \frac{2\pi}{G} \right) = \frac{\sigma}{4\pi} \left( \ln \left( \frac{\sigma^2}{m_\psi^2} \right) - 1 \right),$$

где введено равновесное значение  $\sigma$  определяемое условием  $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma} = 0$ :

$$\sigma_{\text{eq}} = m_\psi = \Lambda_2 \exp \left( -\frac{\pi}{G} \right).$$

# Трёхмерная модель Гросса–Невё

$$S = \int d^3x \left[ \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{G}{2N} (\bar{\psi} \psi)^2 \right],$$

$$\mu = \overline{0, 2}.$$

Киральную  $\mathbf{Z}(2)$  симметрию следует дополнить отражением пространственного измерения, поскольку матрица  $\gamma^3$  теперь явно входит в лагранжиан:

$$\begin{aligned} \psi_L(x_0, x_1, x_3)' &= \pm \psi_L(x_0, x_1, -x_3), & \bar{\psi}_L(x_0, x_1, x_3)' &= \pm \bar{\psi}_L(x_0, x_1, -x_3), \\ \psi_R(x_0, x_1, x_3)' &= \mp \psi_R(x_0, x_1, -x_3), & \bar{\psi}_R(x_0, x_1, x_3)' &= \mp \bar{\psi}_R(x_0, x_1, -x_3). \end{aligned}$$

Эффективный потенциал трёхмерной модели равен:

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma^3}{6\pi} - \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c} \right),$$

$$G_c = \frac{\pi^2}{\Lambda_3}.$$

Уравнение  $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \sigma} = 0$  имеет ненулевое решение при  $G > G_c$ . В дальнейшем в настоящей работе будет использоваться приводимое  $4 \times 4$  представление  $\gamma$ -матриц, в котором  $\text{Tr} \mathbb{I} = 4 = 2 \times 2$  и слагаемое содержащее интеграл удваивается, кроме того, поскольку возможно ввести матрицу  $\gamma^5$ , то не требуется отражение пространственной координаты как часть киральной симметрии.

$$V_{\text{eff}}(\sigma) = \frac{\sigma^3}{3\pi} - \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c} \right),$$

$$G_c = \frac{\pi^2}{2\Lambda_3}.$$



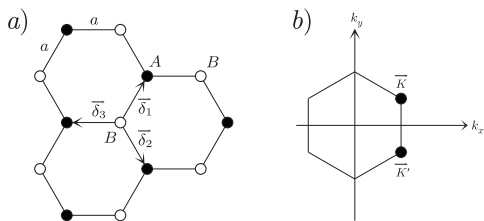
# Магнитное поле

Магнитное поле может быть учтено путем замены производных на ковариантные и добавления вклада, описывающего его взаимодействие со спином (эффект Зеемана)

$$\bar{\psi} i \partial \psi \rightarrow \bar{\psi} \left[ i \gamma^0 (\partial_0 - i \mu + i \frac{g_L}{2} \mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}) + i \gamma^1 (\partial_x + i e A_x) + i \gamma^2 (\partial_y + i e A_y) \right] \psi,$$

где  $A_x$  и  $A_y$  — компоненты внешнего электромагнитного потенциала, а дополнительный вклад  $\sim \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$  является нерелятивистским зеемановским вкладом в энергию, который должен быть добавлен отдельно, поскольку модель не описывает реального спина частиц.

# Модель на шестиугольной решетке



**Рис.:** а) Шестиугольная решетка состоящая из двух треугольных подрешеток  $A$  и  $B$ . Векторы  $\vec{\delta}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  являются направляющими векторами решетки. б) Соответствующая этой решетке зона Бриллюэна с двумя «дираковскими конусами» фермионов, расположенными в точках  $K$  и  $K'$ .

- ▶ Две степени свободы связанные с подрешетками (псевдоспин)
- ▶ Две степени свободы связанные с «долинами» (2 дираковские точки)

Эффективный лагранжиан:

$$L_0 = \bar{\psi} [i\gamma^0\partial_0 + iv_F\gamma^1\partial_x + iv_F\gamma^2\partial_y] \psi = \bar{\psi} i\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu \psi,$$

где  $\tilde{\partial}_\mu = (\partial_0, v_F\vec{\nabla})$ , спиноры имеют вид:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_K^{Aa} \\ \psi_K^{Ba} \\ -i\psi_{K'}^{Ba} \\ i\psi_{K'}^{Aa} \end{pmatrix},$$

а гамма-матрицы записываются как

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -\tau^1 \\ \tau^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\tau^2 \\ \tau^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

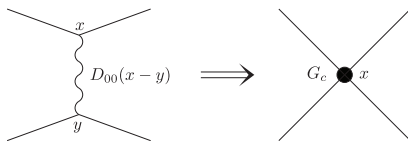


Рис.: «Контактное» приближение взаимодействия

Различные взаимодействия могут быть приближенно описаны «контактным» четырехфермионным взаимодействием. В частности вклад взаимодействия, передаваемого фононами решетки записывается как (N.A. Viet et al, 1994)

$$L_{\text{int}} = \frac{Gv_F}{2} (\bar{\psi}\psi)^2,$$

по форме совпадающим с лагранжианом взаимодействия в модели Гросса–Невё.

# Модель Гросса–Невё на цилиндре

Теперь компактифицируем пространственную координату  $x_2$ , таким образом модель будет рассматриваться на цилиндре радиуса  $R$  с длиной окружности сечения  $L = 2\pi R$ , который вложим в обычное  $(3+1)$ -мерное пространство («балк») так, что ось  $z$  совпадает с осью цилиндра. Таким образом  $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_z$ ,  $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_\varphi$ .

В применении к углеродным нанотрубкам было показано, что существует несколько вариантов наложения условий периодичности, зависящих от способа сворачивания листа графена в трубку

$$\psi_{K(K')}(x^0, x^1, x^2 + L) = e^{2\pi i(s\nu/3)} \psi_{K(K')}(x^0, x^1, x^2),$$

где  $s = \pm 1$  отличает точки  $K$  и  $K'$ , а  $\nu = 0, \frac{1}{3}$ .

# Магнитное поле: векторный потенциал на цилиндре

Рассмотрим магнитное поле  $\mathbf{H} = H_0 \mathbf{e}_z$ , его векторный потенциал может быть записан как  $\mathbf{A} = \frac{\rho}{2} H_0 \mathbf{e}_\varphi$ , что на поверхности цилиндра дает  $\mathcal{A} = \frac{R}{2} H_0 \mathbf{e}_2$ , можно показать, что и в общем случае подобную постоянную компоненту векторного потенциала невозможно занулить калибровочным преобразованием в пространствах с компактификацией. Поле  $\vec{A}$  должно быть добавлено к частной производной для формирования ковариантной производной  $\partial_2 \rightarrow D_2 = \partial_2 + ie\mathcal{A}_2$  в лагранжиане. В качестве альтернативы, возможно также сохранить в лагранжиане частную производную  $\partial_2$  и включить «магнитную фазу»  $\phi = \frac{e\mathcal{A}_2 L}{2\pi} = \frac{\Phi_m}{\Phi_m^0}$  в граничные условия для фермионного поля  $\psi(x^0, x^1, x^2)$

$$\psi(x^0, x^1, x^2 + L) = e^{2\pi i \phi} \psi(x^0, x^1, x^2).$$

# Конечная температура

Учтем также конечную температуру  $T = 1/\beta$  путем использования техники разложения по мацубаровским частотам

$p_{0,m} = \omega_m = (2\pi/\beta)(m + 1/2)$ , ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Кроме того для учета компактификации разложим поле  $\psi$  в ряд Фурье вдоль координаты  $x_2$ , тогда эффективный потенциал равен

$$\begin{aligned}
 V_{\text{eff}} &= \frac{\sigma^2}{2G} - i \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{tr}_s \ln(-\gamma^\mu P_\mu - \sigma) = \\
 &= \frac{\sigma^2}{2G} - 2 \left\{ \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \ln \left[ \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^2 (m + 1/2)^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \left( n + \phi + s \frac{\nu}{3} \right)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

# Эффект Ааронова–Бома

После несложных, но продолжительных вычислений, эффективный потенциал можно записать в следующем «симметричном» виде:

$$V_{\text{eff}} = V_0 + V_{(T)} + V_{(A)} + V_{(\times)},$$

$$V_0 = \frac{\sigma^3}{3\pi} - \frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{1}{G} - \frac{1}{G_c} \right),$$

$$V_{(T)} = \frac{2}{\pi\beta^3} [\sigma\beta \text{Li}_2(-e^{-\sigma\beta}) + \text{Li}_3(-e^{-\sigma\beta})].$$

где  $\text{Li}_s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s}$  — полилогарифмы (в данном случае ди- и трилогарифмы).



$$V(L) = \frac{1}{\pi L^3} [\sigma L \operatorname{Li}_2(e^{-\sigma L - 2\pi i \phi}) + \sigma L \operatorname{Li}_2(e^{-\sigma L + 2\pi i \phi}) + \operatorname{Li}_3(e^{-\sigma L - 2\pi i \phi}) + \operatorname{Li}_3(e^{-\sigma L + 2\pi i \phi})] = \frac{2}{\pi L^3} [\sigma L \operatorname{Re} \operatorname{Li}_2(e^{-\sigma L - 2\pi i \phi}) + \operatorname{Re} \operatorname{Li}_3(e^{-\sigma L - 2\pi i \phi})].$$

Последнее слагаемое не выражается в специальных функциях и его удастся учесть только численно:

$$V(x) = \frac{4}{\pi} \sqrt{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ (-1)^m \cos(2\pi n \phi) \times \left[ \exp\left(-\sigma \sqrt{\beta^2 m^2 + L^2 n^2}\right) \frac{\sigma \sqrt{\beta^2 m^2 + L^2 n^2} + 1}{\left(\sqrt{\beta^2 m^2 + L^2 n^2}\right)^3} \right] \right\}.$$

# Фазовые диаграммы

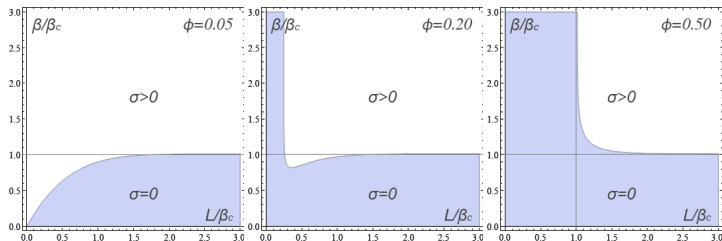


Рис.: Фазовые диаграммы модели в плоскости  $(L, \beta)$  при различных значениях магнитной фазы

# Эффективный потенциал

Для учета химического потенциала необходимо модифицировать эффективный потенциал, который в дальнейшем уже не удастся переписать в симметричной форме указанной выше:

$$V_{\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} - 2 \left\{ \int \frac{dp_1}{2\pi} \frac{1}{\beta} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{s=\pm 1} \ln \left[ \left( \frac{2\pi}{\beta} \right)^2 (m + 1/2 - i\mu)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 (n + \phi)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \right] \right\}.$$

Переход к  $\nu \neq 0$  можно осуществить по формуле

$$V_{\text{eff}}|_{\nu \neq 0} = \frac{1}{2} \left[ V_{\text{eff}}|_{\nu=0} \left( \phi \rightarrow \phi + \frac{\nu}{3} \right) + V_{\text{eff}}|_{\nu=0} \left( \phi \rightarrow \phi - \frac{\nu}{3} \right) \right]$$

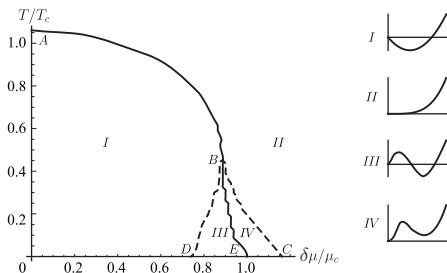
После ряда преобразований эффективный потенциал записывается как

$$V_{\text{eff}} = V_{(0)} + V_{(L)} + V_{(\mu T)},$$

$V_{(0)}$  и  $V_{(L)}$  совпадают с приведенными ранее результатами, а  $V_{(\mu T)}$  записывается как

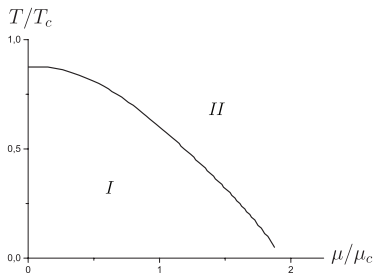
$$V_{(\mu T)} = -\frac{2}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left[ \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_{n,p_1}^+)} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_{n,p_1}^-)} \right) \right],$$

где  $E_{n,p_1} = \sqrt{p_1^2 + \left( \frac{2\pi(n+\phi)}{L} \right)^2 + \sigma^2}$  и  $E_{n,p_1}^{\pm} = E_{n,p_1} \pm \mu$ .



**Рис.:** Фазовая диаграмма модели под с учетом температуры и химического потенциала в отсутствие эффекта Ааронова–Бома.

Фазовая диаграмма в отсутствие эффекта Ааронова–Бома демонстрирует наличие фаз с нарушенной и ненарушенной киральной симметрией, а также фаз, в которых возможно существование метастабильных состояний, что согласуется с фазовой диаграммой двумерной модели Гросса–Невё и является демонстрацией размерной редукции.



**Рис.:** Фазовая диаграмма модели под с учетом температуры и химического потенциала при наличии магнитного потока соответствующего  $\phi = 0.5$ .

Фазовая диаграмма при наличии «магнитной фазы»  $\phi = 0.5$  превращающей граничные условия в антипериодические не содержит фаз, в которых возможно существование метастабильных состояний, что согласуется с фазовой диаграммой трехмерной плоской модели Гросса–Невё и демонстрирует отсутствие размерной редукции из антисимметричного состояния.

# Эффект Зеемана

Для рассмотрения эффекта Зеемана в эффективный потенциал следует добавить стандартный член по форме совпадающий с химическим потенциалом, но зависящий от направления реального спина частиц на направление магнитного поля:

$$V_{\text{eff}} = \frac{\sigma^2}{2G} - \frac{1}{\beta L} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \ln \left[ \left( \frac{2\pi}{\beta} \left( l + \frac{1}{2} \right) - i\mu_s \right)^2 + \left( \frac{2\pi(n + \phi)}{L} \right)^2 + p_1^2 + \sigma^2 \right],$$

здесь было введено дополнительное квантовое число,  $s$ , отвечающее за знак проекции спина частиц на направление магнитного поля.

$\mu_{\uparrow} = \mu + \delta\mu = \mu + \frac{g_L}{2} \mu_B H$ ,  $\mu_{\downarrow} = \mu - \delta\mu = \mu - \frac{g_L}{2} \mu_B H$ ;  $\mu_B = e/2m$  — магнетон Бора и  $g_L$  — эффективный множитель Ланде.

Вычисления, аналогичные проведенным ранее, показывают, что для учета эффекта Зеемана требуется заменить  $V_{(\mu T)}$  на

$$\begin{aligned}
 V_{(\mu T)}^Z &= -\frac{1}{\beta L} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \ln \left( 1 + 2 \operatorname{ch}(\beta \mu_s) \exp(-\beta E_{n, p_1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \exp(-2\beta E_{n, p_1}) \right) = \\
 &= -\frac{1}{\beta L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{dp_1}{2\pi} \left[ \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_{n, p_1})_{\uparrow}^{+}} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_{n, p_1})_{\uparrow}^{-}} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_{n, p_1})_{\downarrow}^{+}} \right) + \ln \left( 1 + e^{-\beta(E_{n, p_1})_{\downarrow}^{-}} \right) \right],
 \end{aligned}$$

где  $(E_{n, p_1})_{\downarrow \uparrow}^{\pm} = E_{n, p_1} \pm \mu_{\downarrow \uparrow}$ . Из этой формулы можно сделать вывод, что значение эффективного потенциала остается неизменным при замене  $\mu \leftrightarrow \delta\mu$ , а следовательно фазовая структура, полученная на плоскости  $(T, \mu)$ , совпадает с фазовой структурой в плоскости  $(T, \delta\mu)$  при  $\mu = 0$ .

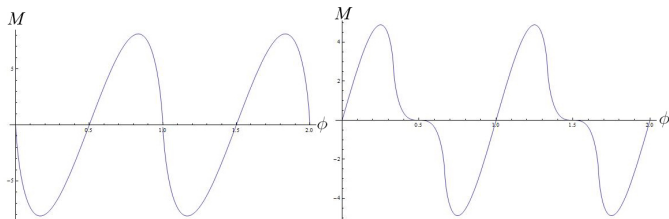


# Намагниченность, вызываемая эффектом Ааронова–Бома

Намагниченность системы может быть найдена согласно общему правилу

$$M = -\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial H} = -\left[ \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \delta\mu} \cdot \frac{\partial \delta\mu}{\partial H} + \frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial H} \right].$$

Игнорируя эффект Зеемана вычислим сперва второй член суммы — намагниченность вызванную эффектом Ааронова–Бома



**Рис.:** Характерный вид зависимости намагниченности системы,  $\frac{\partial V_{(L)}}{\partial \phi}(\phi) \sim M(\phi)$ , при нулевой температуре и  $\nu = 0$  (левый график) и  $\nu = \pm 1$  (правый график)

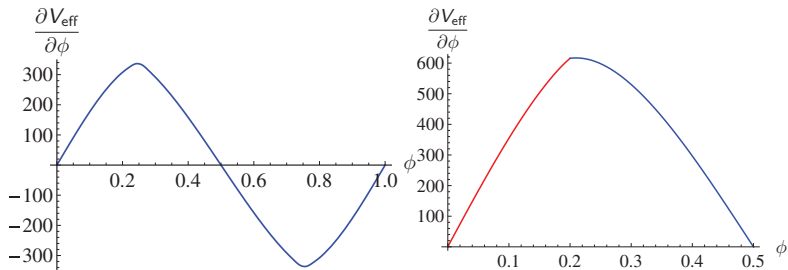


Рис.:  $L = 0.5L_c$ ,  $\beta = 3\beta_c$  (слева) и  $L = 0.4L_c$ ,  $\beta = 0.8\beta_c$  (справа).

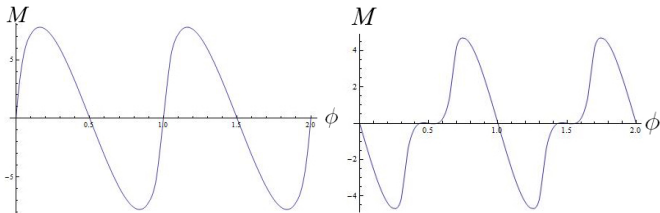


Рис.: Характерный вид зависимости  $\frac{\partial V_{(\mu T)}}{\partial \phi}(\phi) \sim j_{\phi}(\phi)$  при  $\nu = 0$  (левый график) и  $\nu = \pm 1$  (правый график) и температуре  $T = 2L^{-1}$

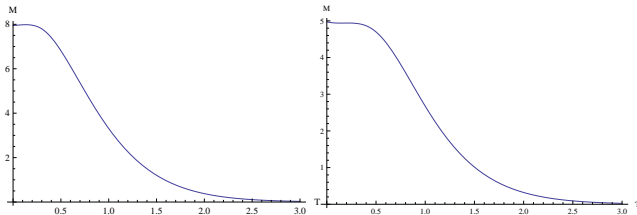
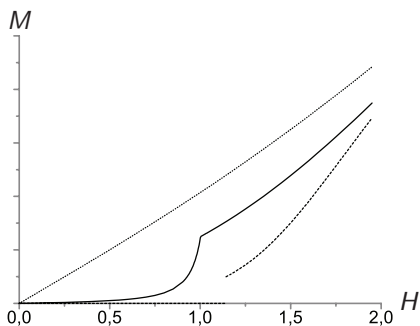


Рис.:  $\nu = 0, \phi = 0.2$  (левый график) и  $\nu = 0, \phi = 0.35$  (правый график)

# Намагниченность, вызываемая эффектом Зеемана

Аналогично, можно пренебречь эффектом Ааронова–Бома



**Рис.:** Намагниченность  $M$  системы, как функция магнитного поля  $H$  при различных температурах:  $T = \frac{1}{3} T_c$  (штрихованная линия),  $T = \frac{4}{5} T_c$  (сплошная линия),  $T = \frac{3}{2} T_c$  (точечная линия)  $H$  выражено в единицах  $H_\mu$  – величины поля, восстанавливающей симметрию в плоской модели.

# Одновременный учет эффектов Зеемана и Ааронова–Бома

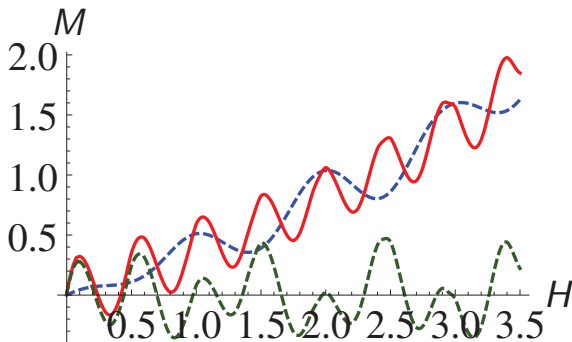


Рис.: Суммарная намагниченность (красная линия) с учетом эффектов Зеемана (синяя пунктирная линия) и Ааронова–Бома (зеленая пунктирная линия)

# Заключение и выводы

В настоящей работе рассмотрена модель Гросса–Невё на цилиндре

- с учетом эффекта Ааронова–Бома, вызванного внешним магнитным полем
  - > получен эффективный потенциал модели с учетом конечной температуры
  - > результаты вычислений при учете только температуры или только компактификации пространства совпадают с ранее известными результатами
  - > построены фазовые диаграммы одновременно учитывающие компактификацию и температуру и отмечена симметрия этих вкладов

- с учетом химического потенциала
  - > получен эффективный потенциал модели
  - > построены фазовые диаграммы, обнаруживающие влияние эффекта Ааронова–Бома на фазовую структуру модели, и отмечено проявление явления размерной редукции или его отсутствия в зависимости от эффекта Ааронова–Бома
- с учетом эффекта Зеемана
  - > получен эффективный потенциал модели
  - > показана симметрия между эффектом Зеемана и влиянием ненулевого химического потенциала
  - > построены графики намагниченности с учетом эффектов Зеемана и Ааронова–Бома, демонстрирующие, в том числе, фазовые переходы наблюдавшиеся на диаграммах в других частях рассмотрения

# Список работ, опубликованных в рецензируемых научных изданиях

- «Эффект Ааронова–Бома в трехмерной модели Гросса–Невё с компактификацией при конечной температуре»  
В.Ч. Жуковский, **П.Б. Колмаков**,  
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. **4**, С. 8, 2013
- «Эффект Зеемана в модифицированной модели Гросса–Невё в (2+1)-мерном пространстве—времени с компактификацией»  
Р.Н. Жохов, В.Ч. Жуковский, **П.Б. Колмаков**,  
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. **4**, С. 12, 2015
- «Phase transitions in hexagonal, graphene-like lattice sheets and nanotubes under the influence of external conditions»  
D. Ebert, K.G. Klimenko, **P.B. Kolmakov**, V.Ch. Zhukovsky,  
Annals of Physics, **371**, P. 254, 2016