Вырожденные суперинтегрируемые системы на трёхмерных пространствах постоянной отрицательной кривизны

По материалам кандидатской диссертации

Давид Петросян

Научный руководитель д.ф.-м.наук Г.С.Погосян

ЛТФ ОИЯИ

17 мая 2016 г.

Содержание

Введение

Суперинтегрируеые системы

В классической механике n-мерная система называется интегрируемой если существует n функционально независимых интегралов движения находящихся в инволюции

$$\{H, X_i\} = 0 \quad \{X_i, X_j\} = 0$$

Система называется суперинтегрируемой, если она допускает существование n+k (k=1,2,..n-1) констант движения

Трёхмерные пространства постоянной кривизны

$$\begin{array}{ll} E_3 & H_2^2 = SO(2,2)/SO(2,1) \\ E_{2,1} & H_1^3 = SO(3,1)/SO(2,1) \\ S_3 & H_3^1 = SO(3,1)/SO(3) \end{array}$$

Интерес к суперинтегрируеости

- В классической механике, суперинтегрируемость ограничивает траекторию в $n-k$ мерном подпространстве фазового пространства ($0<k<n$). Для $k=n-1$ (максимальная суперинтегрируемость), это означает что финитные траектории замкнуты и движение периодично.
- По крайней мере принципиально возможно вычислить траектории без использования мат. анализа.
- Теорема Бертрана гласит, что из всех сферически симметричных потенциалов $V(r)$, только для систем Кеплера-Кулона и гармонического осциллятора все финитные траектории являются замкнутыми, следовательно ни одна другая суперинтегрируемая система не является центрально симметричной.
- Алгебра интегралов движения не является Абелевой, и зачастую это конечная полиномиальная алгебра.
- В специальном случае квадратичной суперинтегрируеости, интегрируемость связана с разделение переменных в уравнениях Гамильтона-Якоби и Шредингера.
- В квантовой механике суперинтегрируемость приводит к дополнительному вырождению уровней энергии (случайное вырождение).
- Существует предположение, основанное на всех известных примерах, что все суперинтегрируемые системы точно решаемы. Если предположение верно то уровни энергии могут быть найдены алгебраически.

Геометрия пространства H_2^2

Трёхмерный гиперболоид $H_2^2 \subset \mathrm{R}_{2,2}$

$$z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2 \tag{1}$$

Псевдосферические координаты

$$\begin{aligned} z_0 &= \pm R \cosh r, & z_1 &= R \sinh r \sinh \tau, \\ z_2 &= R \sinh r \cosh \tau \cos \varphi, & z_3 &= R \sinh r \cosh \tau \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$r \in (0, \infty) \quad \tau \in (-\infty, \infty) \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \pm R \cos \chi, & z_1 &= R \sin \chi \cosh \mu, \\ z_2 &= R \sin \chi \sinh \mu \cos \varphi, & z_3 &= R \sin \chi \sinh \mu \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\chi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \mu \in (-\infty, \infty)$$

$$r \to i\chi \qquad \tau \to \mu - i\pi/2.$$

Метрика

$$\frac{ds^2}{R^2} = dr^2 - \sinh^2 r d\tau^2 + \sinh^2 r \cosh^2 \tau d\varphi^2$$

Свободный Гамильтониан

$$\mathcal{H}_{free} = \frac{1}{2R^2}\left\{p_r^2 - \frac{1}{\sinh^2 r}\left(p_\tau^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau}\right)\right\}.$$

Генераторы $so(2,2)$ алгебры

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= -(z_2 p_3 - z_3 p_2), \qquad & \mathcal{L}_2 &= -(z_1 p_3 + z_3 p_1), \qquad & \mathcal{L}_3 &= (z_1 p_2 + z_2 p_1),\\
\mathcal{N}_1 &= (z_0 p_1 - z_1 p_0), \qquad & \mathcal{N}_2 &= -(z_0 p_2 + z_2 p_0), \qquad & \mathcal{N}_3 &= -(z_0 p_3 + z_3 p_0),
\end{aligned}$$

со скобками Ли-Пуасона ($\bar{g}_{ik} = diag\{\, 1, -1, -1 \,\}$)

$$\{\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j\} = \bar{g}_{im}\bar{g}_{jn}\varepsilon_{mnk}\mathcal{L}_k, \quad \{\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j\} = \bar{g}_{im}\bar{g}_{jn}\varepsilon_{mnk}\mathcal{L}_k,$$
$$\{\mathcal{N}_i, \mathcal{L}_j\} = \bar{g}_{im}\bar{g}_{jn}\varepsilon_{mnk}\mathcal{N}_k,$$

Инварианты Казимира

$$\mathcal{C}_1 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{L} = \bar{g}_{ik} \mathcal{N}_i \mathcal{L}_k = \mathcal{N}_1 \mathcal{L}_1 - \mathcal{N}_2 \mathcal{L}_2 - \mathcal{N}_3 \mathcal{L}_3 = 0,$$

$$\mathcal{C}_2 = N^2 + L^2,$$

$$N^2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \bar{g}_{ik} \mathcal{N}_i \mathcal{N}_k = \mathcal{N}_1^2 - \mathcal{N}_2^2 - \mathcal{N}_3^2,$$

$$L^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L} = \bar{g}_{ik} \mathcal{L}_i \mathcal{L}_k = \mathcal{L}_1^2 - \mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_3^2.$$

В псевдо-сферических координатах

$$L^2 = \mathcal{L}_1^2 - \mathcal{L}_2^2 - \mathcal{L}_3^2 = -\left(p_\tau^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau}\right), \tag{2}$$

Как следует из уравнения (2): $p_\varphi^2/\cosh^2 \tau - L^2 \geq 0$, величина L^2, в отличии от движения в Евклидовом пространстве (или сфере и двухполостном гиперболоиде), может принимать не только положительные и нулевое, а также отрицательные значения.

Потенциал

$$V^{osc} = \frac{\omega^2 R^2}{2}\left(\frac{z_2^2+z_3^2-z_1^2}{z_0^2}\right) = \begin{cases} \frac{\omega^2 R^2}{2}\tanh^2 r, & |z_0| \geq R \\ -\frac{\omega^2 R^2}{2}\tan^2\chi, & |z_0| \leq R. \end{cases}$$

Соответствующим образом Гамильтониан может быть записан как

$$\mathcal{H}^{osc} = \frac{1}{2R^2}\left(p_r^2 + \frac{L^2}{\sinh^2 r}\right) + \frac{\omega^2 R^2}{2}\tanh^2 r, \quad |z_0| \geq R$$

$$\mathcal{H}^{osc} = -\frac{1}{2R^2}\left(p_\chi^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \chi}\right) - \frac{\omega^2 R^2}{2}\tan^2 \chi, \quad |z_0| \leq R$$

Тензор Демкова-Фрадкина

$$\mathcal{D}_{ik} = \frac{1}{R^2}N_i N_k + \omega^2 R^2 \frac{z_i z_k}{z_0^2}, \qquad \mathcal{D}_{ik} = \mathcal{D}_{ki} \qquad i,k = 1,2,3.$$

$$\mathcal{H}^{osc} = -\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{22} + \mathcal{D}_{33} - \frac{L^2}{2R^2}.$$

$$
\begin{array}{lll}
[D_{12}L_1] = -iD_{13} & [D_{12}L_2] = -iD_{23} & [D_{12}L_3] = iD_{11} - iD_{22} \\
[D_{13}L_1] = iD_{12} & [D_{13}L_2] = iD_{11} - iD_{33} & [D_{13}L_3] = -iD_{23} \\
[D_{23}L_1] = -iD_{33} + iD_{22} & [D_{23}L_2] = iD_{12} & [D_{23}L_3] = iD_{13} \\
[D_{11}L_2] = 2iD_{13} & [D_{11}L_3] = -2iD_{12} & [D_{22}L_1] = -2iD_{23} \\
[D_{22}L_3] = 2iD_{12} & [D_{33}L_1] = 2iD_{23} & [D_{33}L_2] = 2iD_{13}
\end{array}
$$

$$
[D_{11}D_{12}] = i\left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4}\right)L_3 - \frac{i}{R^2}\{L_3D_{11}\} \qquad [D_{11}D_{13}] = i\left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4}\right)L_2 - \frac{i}{R^2}\{L_2D_{11}\}
$$

$$
[D_{11}D_{23}] = \frac{i}{R^2}(\{L_2D_{12}\} + \{L_3D_{13}\}) \qquad [D_{11}D_{22}] = -\frac{2i}{R^2}\{L_3D_{12}\}
$$

$$
[D_{22}D_{12}] = -i\left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4}\right)L_3 + \frac{i}{R^2}\{L_3D_{22}\} \qquad [D_{22}D_{13}] = \frac{i}{R^2}(-\{L_1D_{12}\} + \{L_3D_{23}\})
$$

$$
[D_{22}D_{23}] = i\left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4}\right)L_1 - \frac{i}{R^2}\{L_1D_{22}\} \qquad [D_{22}D_{33}] = -\frac{2i}{R^2}\{L_1D_{23}\}
$$

$$
[D_{33}D_{12}] = \frac{i}{R^2}(\{L_2D_{23}\} + \{L_1D_{13}\}) \qquad [D_{33}D_{13}] = -i\left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4}\right)L_2 + \frac{i}{R^2}\{L_2D_{33}\}
$$

$$
[D_{33}D_{23}] = -i\left(2\omega^2 - \frac{1}{2R^4}\right)L_1 + \frac{i}{R^2}\{L_1D_{33}\} \qquad [D_{33}D_{11}] = \frac{2i}{R^2}\{L_2D_{13}\}
$$

$$
[D_{12}D_{13}] = i\left(\omega^2 - \frac{1}{4R^4}\right)L_1 + \frac{i}{2R^2}(-\{L_1D_{11}\} - \{L_2D_{12}\} + \{L_3D_{13}\})
$$

$$
[D_{12}D_{23}] = i\left(\omega^2 - \frac{1}{4R^4}\right)L_2 + \frac{i}{2R^2}(-\{L_1D_{12}\} - \{L_2D_{22}\} - \{L_3D_{23}\})
$$

$$
[D_{13}D_{23}] = i\left(\omega^2 - \frac{3}{4R^4}\right)L_3 + \frac{i}{2R^2}(-\{L_1D_{13}\} + \{L_2D_{23}\} - 3\{L_3D_{33}\})
$$

Уравнение Гамильтона-Якоби получается заменой в Гамильтониане $p_{\mu_i} \to \partial S/\partial \mu_i$, где $\mu_i = (r, \tau, \varphi)$

$$H = \frac{1}{2R^2}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 r}\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 \tau}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} + \frac{\omega^2 R^2}{2}\tanh^2 r = E.$$

Это уравнение полностью разделимо, и координата φ циклична, и мы будем искать решение классического действия $S(r, \tau, \varphi, t)$ в виде

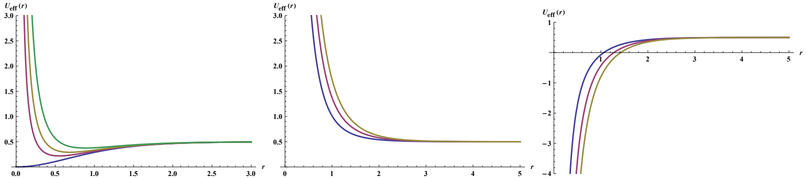
$$S(r, \tau, \varphi, t) = -Et + p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\tau),$$

После разделения переменных

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \tau}\right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau} = -L^2, \tag{3}$$
$$\frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^2}{2}\tanh^2 r + \frac{L^2}{2R^2 \sinh^2 r} = E, \tag{4}$$

Эффективный потенциал

$$U_{eff}(r) = \frac{\omega^2 R^2}{2} \tanh^2 r + \frac{L^2}{2R^2 \sinh^2 r}.$$



(a) $0 \le L^2 < \omega^2 R^4$ (b) $L^2 \ge \omega^2 R^4$ (c) $L^2 < 0$

Рис.: Эффективный потенциал $U_{eff}(r)$ для разных значений L^2

В случае $0 \le L^2 < \omega^2 R^4$ потенциал имеет минимум в $r_0 = \tanh^{-1} \sqrt[4]{L^2/\omega^2 R^4}$

$$0 \le U_{eff}(r_0) = \omega\sqrt{L^2} - \frac{L^2}{2R^2} < \frac{\omega^2 R^2}{2},$$

Для уравнения траектории имеем

$$\coth^2 r = \left(\frac{ER^2}{L^2}+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(\frac{ER^2}{L^2}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{\omega^2R^4}{L^2}}\ \sin(2\psi+4\sqrt{A}\beta),$$

$$\psi = \arcsin\left(\frac{\sinh\tau}{\sqrt{p_\varphi^2/L^2-1}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+L^2/p_\varphi^2\cot^2(\varphi_0-\varphi)}}\right).$$

Из формулы (**??**) следует, что движение частицы на гиперболоиде ограничено дополнительным условием

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\tanh\tau}{\sin\varphi} = \sqrt{1-L^2/p_\varphi^2}.$$

В следствии этого, без потери общности можем выбрать $\tau = 0$ или $L^2 = p_\varphi^2$. Можно заметить, что траектории движения, вписывающиеся этой формулой, лежат на верхнем $(z_0 \geq R)$ или нижнем $(z_0 \leq -R)$ листе двухполостного гиперболоида: $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$

$$\tanh^2 r = \frac{p}{1+\varepsilon(R)\cos 2\varphi}, \tag{5}$$

где мы используем обозначения

$$p = \left(\frac{ER^2}{L^2}+\frac{1}{2}\right)^{-1} > 0, \qquad \varepsilon(R) = \sqrt{1-\frac{4\omega^2R^4L^2}{(2ER^2+L^2)^2}}, \tag{6}$$

A. Рассмотрим сначала случай $0 < L^2 < \omega^2 R^4$ и $U_{eff}(r_0) < E < \omega^2 R^2/2$. Для данных значений траектории получаются эллиптическими

$$0 \leq \varepsilon(R) = \sqrt{1 - \frac{4\omega^2 R^4 L^2}{(2ER^2 + L^2)^2}} < 1.$$

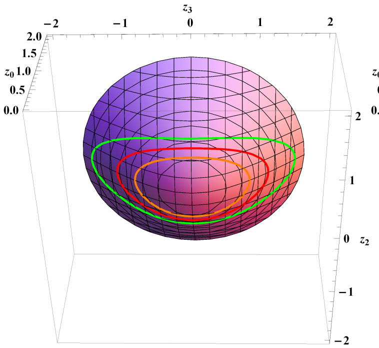


Рис.: Эллиптические траектории на верхнем листе двухполостного гиперболоида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений $\varepsilon = 0.3$ and $p = 0.3, 0.4, 0.5$.

В. В случае минимальной энергии $E = E_{\min} = U_{eff}(r_0)$ имеем из (6) что $\varepsilon = 0$ и $p = \omega R^2/\sqrt{L^2}$, следовательно траектории являются кругами

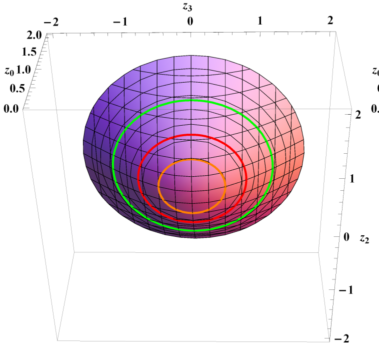


Рис.: Круговые траектории для $\varepsilon = 0$ и $p = 0.2, 0.4, 0.6$.

C. Для случая значения энергии $E = \omega^2 R^2/2$ получаем

$$p(R) = \frac{2A}{\omega^2 R^4 + L^2}, \qquad \varepsilon(R) = \frac{|\omega^2 R^4 - L^2|}{\omega^2 R^4 + L^2},$$

и траектории имеют вид эквидистант [1]

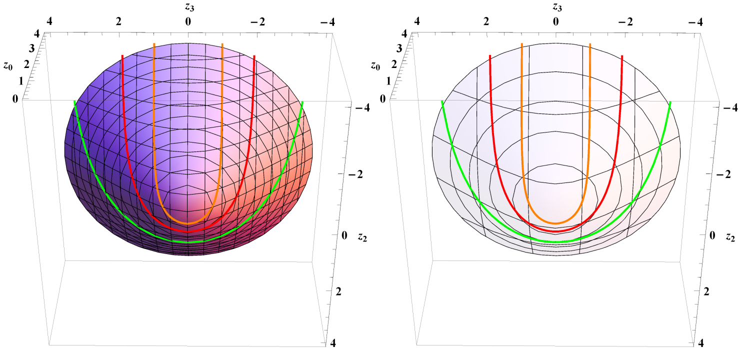
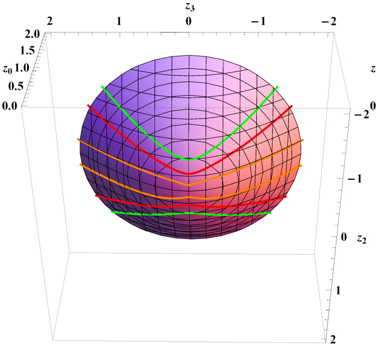


Рис.: Эквидистантные траектории на верхнем листе двухполостного гиперболоида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений пар $(p, \varepsilon) = (1/3, 2/3); (2/3, 1/3); (8/9, 1/9)$.

[1] M.Ranada J.Carinera and M.Santander. The harmonic oscillator on Riemannian and Lorentzian

D. Для энергии $E > \omega^2 R^2/2$ легко видеть что для любой положительной $L^2 > 0$ траектории получаются ультраэллипсаи



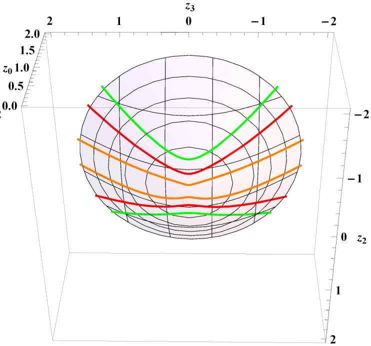


Рис.: Ультраэллиптические траектории на верхнем листе двухполостного гиперболоида $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$ для значений $\epsilon = 0.8$ and $p = 0.2, 0.5, 0.8$.

Траектории для $L^2 < 0$

Для упрощения дальнейших формул, зафиксируем $p_\varphi = 0$. Тогда движение происходит при постоянном значении азимутального угла $\varphi = \varphi_0$ ограниченным условием $z_3/z_2 = \tan\varphi_0$. Для дальнейшего упрощения достаточно выбрать $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \pi$. Так мы получаем что траектория движения (7) лежит на однополостном гиперболоиде $z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = R^2$. Для уравнение траектории в области $z_0 > R$ получим:

$$\coth^2 r = \left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}} \cosh(2\tau + 4\sqrt{|L^2|}\beta). \tag{7}$$

Производя далее преобразование $r \to i\chi$ и $\tau \to \mu - i\pi/2$ в формуле (7), получим уравнение траектории в области $0 < z_0 < R$:

$$\cot^2\chi = -\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{ER^2}{|L^2|}\right)^2 + \frac{\omega^2 R^4}{|L^2|}} \cosh(2\mu + 4\sqrt{|L^2|}\beta).$$

В формуле траектории (7) мы должны различить два случая, а именно для случаев $E < \omega^2 R^2/2$ и $E \geq \omega^2 R^2/2$. Первый случай соответствует связанному движению,а второй бесконечному.

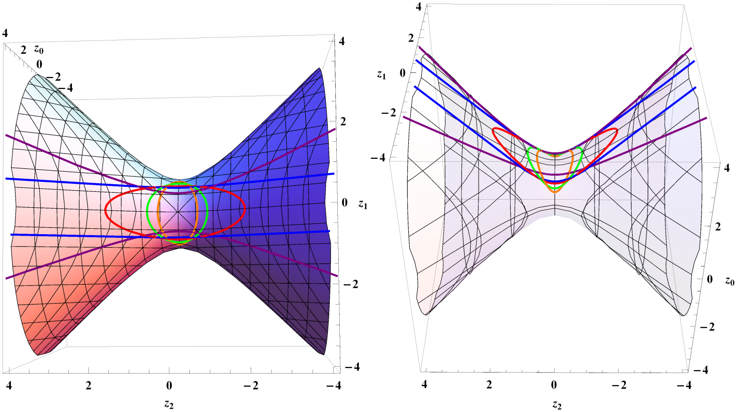


Рис.: Траектории для случая $L^2 = -1$; $E = -3/2, -1/2, 1/4, 1/2, 3/2$ $(\omega = R = 1)$

В граничном случае $L^2 = 0$ легко получим

$$\coth^2 r = \frac{\omega^2 R^2}{2E} + R\sqrt{E}\,(2\beta - \tan\varphi/p_\varphi)^2\,,$$

с $\varphi_0 = 0$. Траектории могут быть представлены на гиперболическом цилиндре $z_0^2 - z_2^2 = R^2$, $z_1^2 = z_3^2$, $z_0 \geq R$.

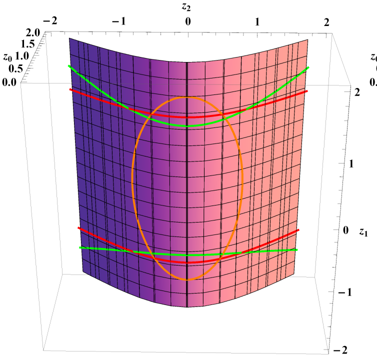


Рис.: Траектории для случая $A = 0$ на гиперболическом цилиндре $z_0^2 - z_2^2 = R^2$, $z_1^2 = z_3^2$, and $z_0 \geq R$. для значений $E = 0.2,\ 0.5,\ 0.8$ $(\omega = R = p_\varphi = 1)$

По аналогии с Евклидовым пространством требуем чтобы поле заряженной частицы $\mu = Ze$ в $r = 0$ удовлетворяло уравнению Пуассона

$$\Delta_{LB} V(r) = \frac{1}{R^2} \sinh^{-2} r \, \frac{\partial}{\partial r} \left(\sinh^2 r \, \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{4\pi\mu}{R} \delta(r)$$

где $\delta(r)$ дельта функция Дирака. Решение последнего уравнения с условием

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$$

Потенциал

$$V^{KC}(r) = -\frac{\mu}{R} \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 - R^2}} = \begin{cases} -\frac{\mu}{R} \coth r, & |z_0| \geq R \\ -\frac{\mu}{R} \cot \chi, & |z_0| \leq R. \end{cases}$$

Гамильтониан может быть записан как

$$\mathcal{H}^{KC} = \frac{1}{2R^2}\left(p_r^2 + \frac{L^2}{\sinh^2 r}\right) - \frac{\mu}{R}\coth \qquad |z_0| \geq Rr \tag{8}$$

$$\mathcal{H}^{KC} = -\frac{1}{2R^2}\left(p_\chi^2 + \frac{L^2}{\sin^2 \chi}\right) - \frac{\mu}{R}\cot\chi, \qquad |z_0| \leq R \tag{9}$$

Вектор Рунге-Ленца

$$\vec{A} = -\frac{1}{2R}\left(\left[\vec{N}\times\vec{L}\right] - \left[\vec{L}\times\vec{N}\right]\right) - \mu\frac{\vec{x}}{|x|}, \qquad [A_i, H] = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\left[\vec{N}\times\vec{L}\right]_i = \bar{g}_{im}\varepsilon_{mkl}N_k L_l, \qquad \bar{g}_{ik} = diag\{-1, 1, 1\}.$$

$$\mathbf{LA} = \mathbf{AL} = \bar{g}_{ii}L_i A_i = 0, \quad A^2 = 2H(L^2+1) + \frac{L^2}{R^2}(L^2-2) + \mu^2$$

$$[A_i, A_j] = -2\left(\frac{L^2}{R^2} + H\right)\bar{g}_{im}\bar{g}_{jn}\varepsilon_{mnk}L_k, \qquad [L_i, A_j] \quad = \bar{g}_{im}\bar{g}_{jn}\varepsilon_{mnk}A_k,$$

Уравнение Гамильтона-Якоби

В Гамильтониане делая замену $p_{\mu_i} \to \partial S/\partial \mu_i$, где $\mu_i = (r, \tau, \varphi)$ приходим к уравнению Гамильтона-Якоби

$$H = \frac{1}{2R^2}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{\sinh^2 r}\left(\frac{\partial S}{\partial \tau}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sinh^2 r \cosh^2 \tau}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} - \frac{\mu}{R}\coth r = E$$

Данное уравнение полностью разделимо, и координата φ является цикличной. Мы будем искать решение классического действия $S(r, \tau, \varphi, t)$ в виде

$$S(r, \tau, \varphi, t) = -Et + p_\varphi \varphi + S_1(r) + S_2(\tau)$$

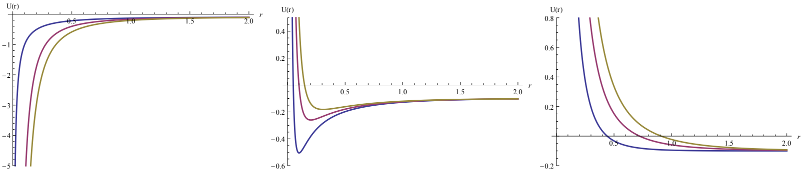
и получим

$$\left(\frac{\partial S_2}{\partial \tau}\right)^2 - \frac{p_\varphi^2}{\cosh^2 \tau} = -L^2 \qquad (10)$$

$$\frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 - \frac{\mu}{R}\coth r + \frac{L^2}{2R^2 \sinh^2 r} = E \qquad (11)$$

Эффективный потенциал

$$U_{eff}(r) = -\frac{\mu}{R}\coth r + \frac{L^2}{2R^2\sinh^2 r}$$



(a) $L^2 \leq 0$ (b) $0 \leq L^2 < \mu R$ (c) $L^2 > \mu R$

Рис.: Эффективный потенциал $U_{eff}(r)$ для разных значений L^2

Если $L^2 > 0$ и $\mu R/L^2 > 1$ этот потенциал имеет минимальное значение при $r_0 = \tanh^{-1}(L^2/\mu R)$, и в этой точке

$$U_{eff}(r_0) = -\frac{\mu^2 R^2}{2L^2} - \frac{L^2}{2R^2}$$

Траектории

Как и в случае осциллятора траектория движения лежит на двухмерном пространстве Лобачевского или двухполостном гиперболоиде: $z_0^2 - z_2^2 - z_3^2 = R^2$. Уравнение траектории даётся формулой

$$\frac{1}{\coth r - 1} = \frac{p}{1 + \varepsilon(R)\cos\varphi} \tag{12}$$

где мы воспользовались обозначениями

$$p = \left(\frac{\mu R}{L^2} - 1\right)^{-1} > 0, \qquad \varepsilon(R) = \sqrt{1 + \frac{2L^2(R^2 E + \mu R)}{(\mu R - L^2)^2}} \tag{13}$$

Для случая $L^2 < \mu R$ и $E < -\mu/R$ ($\varepsilon < 1$) траектории будут эллипсами

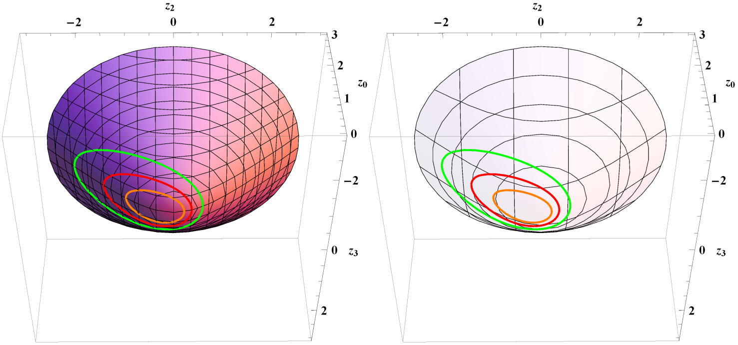


Рис.: Траектория для $p = 0.5, 1, 2$, $\epsilon = 0.8$

с периодом движения

$$T = \frac{\pi R}{\sqrt{2(|E| - \mu/R)}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu/(R|E| - \mu)}} \right] \qquad (14)$$

который зависит только от энергии и кривизны пространства $\kappa = 1/R^2$

В случае же $E > -\mu/R$ в не зависимости от значения L^2 $(\varepsilon > 1)$ траектории будут несвязанными

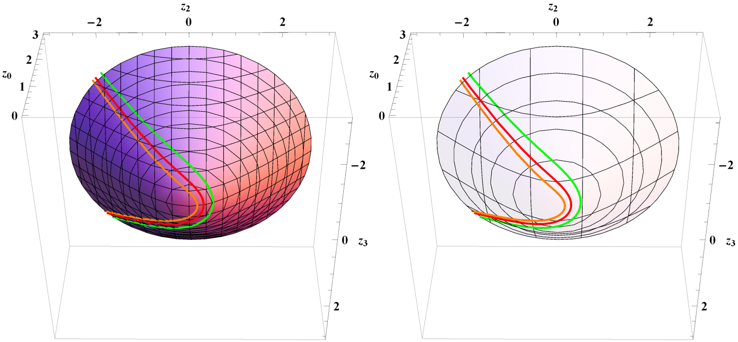


Рис.: Траектория для $p = 0.5, 1, 2$, $\epsilon = 1.3$

Уравнение Шредингера на гиперболоиде H_2^2 запишется как

$$\frac{1}{\sinh^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\sinh^2 r\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\left[2R^2E-\frac{\hat{L}^2}{\sinh^2 r}+\frac{\mu}{R}(\coth r-1)\right]\Psi=0, \tag{15}$$

которое можно решить с помощью анзаца

$$\Psi(r,\tau,\varphi)=\ R(r)\,\mathcal{Y}_\ell^m(\tau,\varphi), \tag{16}$$

Псевдо-сферическая функция $\mathcal{Y}$ является собственной функцией операторов $\hat{L}^2\mathcal{Y}_\ell^m=\ell(\ell+1)\mathcal{Y}_\ell^m$ и $L_1^2\mathcal{Y}_\ell^m=m^2\mathcal{Y}_\ell^m$ которое описывает квантовое геодезическое движение на двухмерном однополостном гиперболоиде. Спектр ℓ может принимать как реальные значения: $\ell=0,1,...$ (дискретная серия представлений группы $SO(2,1)$) так и комплексные значения $\ell=-1/2+i\rho$, $\rho>0$ (непрерывная серия). В первом случае собственные значения оператора $\hat{L}^2$ положительны а во втором отрицательны.

В случае целых значений ℓ для $\mathcal{Y}_\ell^m$ имеем

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\tau,\varphi) = \frac{2^\ell \ell!}{\pi}\sqrt{\frac{(2\ell+1)\,(|m|-\ell-1)!}{2(|m|+\ell)!}}\,(\cosh\tau)^{-\ell-1}\; C^{\ell+1}_{|m|-\ell-1}(\tanh\tau)\,e^{im\varphi}$$

а для комплексных $\ell = -1/2 + i\rho$ решение $\mathcal{Y}_\rho^m(\tau,\varphi) = S_{\rho m}(\tau)e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$ можно записать в терминах чётной и нечётной функций

$$S^{(+)}_{\rho m}(\tau) = C^{(+)}_{\rho m}\,(\cosh\tau)^{-|m|}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{4}+\frac{i\rho}{2}-\frac{|m|}{2},\frac{1}{4}-\frac{i\rho}{2}-\frac{|m|}{2};\frac{1}{2};-\sinh^2\tau\right),$$

$$S^{(-)}_{\rho m}(\tau) = C^{(-)}_{\rho m}\,(\cosh\tau)^{-|m|}\,\sinh\tau\,{}_2F_1\left(\frac{3}{4}+\frac{i\rho}{2}-\frac{|m|}{2},\frac{3}{4}-\frac{i\rho}{2}-\frac{|m|}{2};\frac{3}{2};-\sinh^2\tau\right),$$

где константы $C^{(\pm)}$ выбраны так, чтобы удовлетворять условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} S^{(\pm)}_{\rho m}(\tau)S^{(\pm)}_{\rho' m}(\tau)\,\cosh\tau\,d\tau = \delta(\rho-\rho').$$

После разделения переменных для $R(r)$ получим

$$\frac{1}{\sinh^2 r}\frac{d}{dr}\sinh^2 r\,\frac{dR}{dr}+\left[2R^2\left(E+\frac{\mu}{R}(\coth r-1)\right)-\frac{\ell(\ell+1)}{\sinh^2 r}\right]R=0 \tag{17}$$

дальнейшей подстановкой $R(r)=\Omega(r)/\sinh r$ приходим к

$$\Omega''(r)+\left[(2R^2E-1)+2\mu R(\coth r-1)-\frac{\ell(\ell+1)}{\sinh^2 r}\right]\Omega(r)=0 \tag{18}$$

Эффективный потенциал Манинга-Розена

$$V_\ell(r)=-\mu R(\coth r-1)+\frac{\ell(\ell+1)}{2\sinh^2 r} \tag{19}$$

Дискретный спектр возможен только для целых $\ell=0,1,2\ldots$ и $E<0$. Для решения получаем

$$R_{n\ell\sigma}(r)=N^\sigma_{n\ell}\,(\sinh r)^\ell\,e^{-(n+\ell+1-\sigma)r}\,{}_2F_1\left(-n+\ell+1,\ \ell+1+\sigma;\ 2\ell+2;\ \frac{2}{1+\coth r}\right)$$

со спектром энергии

$$E_N = -\frac{N^2-1}{2R^2} - \frac{\mu^2}{2nN^2} + \frac{\mu}{R}, \qquad \lambda = N + \sigma - 1/2$$

где $N = (n_r + \ell + 1) = 1, 2, ...n_{max} < \sqrt{R\mu}$ главное квантовое число. Для каждого фиксированного N, уровень энергии E_N вырожден в $N-1$ раз по квантовым числам ℓ и n_r, и бесконечно вырожден по азимутальному квантовому числу $m = \pm(\ell+1), \pm(\ell+2)$
Непрерывное же решение осуществляется для $E > 0$ в не зависимости от значения ℓ и решение запишется

$$\begin{aligned} R_{k\ell}(r) &= N_{k\ell}\,(\sinh r)^{2\ell+1} e^{-(\ell+1+ik)r} \\ &\times \; {}_2F_1\left(\ell+1+\frac{i}{2}(k+p),\, \ell+1+\frac{i}{2}(k-p);\, 2\ell+2;\, \frac{2}{1+\coth r}\right) \end{aligned}$$

где

$$E = \frac{k^2+1}{2R^2} \qquad p^2 = 2R^2E - 1 - 4R\mu$$

Для значений $\ell = -1/2 + i\rho$ уравнение на собственные функции становится сильно сингулярным и расчёт ортонормированного базиса становится сложной задачей, которую мы тут пропустим

Квантовый осциллятор на H_2^2

В псевдо сферических координатах уравнение Шредингера

$$H\Psi(\mathbf{z}) = \left(-\frac{1}{2}\Delta_{LB} + V(\mathbf{z})\right)\Psi = E\Psi(\mathbf{z})$$

Запишется как

$$\frac{1}{\sinh^2 r}\frac{\partial}{\partial r}\sinh^2 r\frac{\partial \Psi}{\partial r} + \left[2R^2E - \frac{\hat{L}^2}{\sinh^2 r} - \omega^2 R^4 \tanh^2 r\right]\Psi = 0,$$

После подстановки $\Psi(r,\tau,\varphi) = (\sinh r)^{-1}\, R(r)\, \mathcal{Y}_\ell^m(\tau,\varphi)$ приходим к дифференциальному уравнению модифицированного Пешля-Теллера

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \left[\mathcal{E} + \frac{\nu^2 - 1/4}{\cosh^2 r} - \frac{(\ell+1/2)^2 - 1/4}{\sinh^2 r}\right]R = 0$$

где $\mathcal{E} = 2R^2E - \omega^2R^4 - 1$ и $\nu = \sqrt{\omega^2R^4 + \frac{1}{4}}$.Спектр уравнения (20) содержит конечное количество связанных состояний при $\nu > \ell + 3/2$ и описывается волновой функцией нормализованной на $[0,\infty)$:

$$R_{n_r\ell}(r) = N_{n_r\ell}(\sinh r)^{\ell/2}(\cosh r)^{1/2-\nu}\times$$
$$\times\, {}_2F_1\left(-n_r, n_r + \ell + 3/2 - \nu; \ell + 3/2; -\sinh^2\tau\right)$$

где $n_r = 0, 1, ..., [\frac{1}{2}(\nu - \ell - 3/2)]$ это радиальное квантовое число.

Спектр энергии связанных состояний запишется как

$$E_N(\nu, R) = -\frac{(N+1)(N+3)}{2R^2} + \frac{\nu + 1/2}{R^2}\left(N + \frac{3}{2}\right) \qquad (20)$$

Здесь $N = \ell + 2n_r$ главное квантовое число и связанные состояния возникают для $N = 0, 1, ..., N_{max} = [\nu - 3/2]$.Для фиксированного квантового числа N все уровни вырождены по квантовым числам ℓ и n_r, для чётных и нечётных N соответственно $(N+2)/2$ и $(N+1)/2$ число раз. Кроме этого все состояния для фиксированного значения ℓ бесконечно вырождены по азимутальному квантовому числу m: $m = \pm(\ell+1), \pm(\ell+2), \dots$.
Непрерывные состояния описываются волновой функцией

$$\begin{aligned} R_{p\ell}(r) \quad &= \quad N_{p\ell}\,(\sinh r)^{\ell/2}\,(\cosh r)^{1/2-\nu} \\ &\times \quad {}_2F_1\left(\frac{\ell + 3/2 - \nu + ip}{2},\ \frac{\ell + 3/2 - \nu - ip}{2};\ \ell + \frac{3}{2};\ -\sinh^2\tau\right) \end{aligned}$$

где энергия непрерывного спектра равна $E = (\nu^2 + 3/4 + p^2/4)/2R^2$, $p \in \mathbf{R}$.
Таким образом мы получили, что для целых значений квантового числа ℓ спектр энергии положителен и разделяется на две части, дискретную для $3(\nu - 1/2)/2R^2 < E < (\nu^2 + 3/4)/2R^2$ и непрерывную для $E \geq (\nu^2 + 3/4)/2R^2$.
Как и в случае осциллятора мы пропустим случай $\ell = -1/2 + i\rho$

Цилиндрические координаты

$$z_0 = R\cosh\rho\cos\theta \qquad z_2 = R\sinh\rho\cos\varphi$$
$$z_1 = R\cosh\rho\sin\theta \qquad z_3 = R\sinh\rho\sin\varphi$$

$$\rho > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

В цилиндрической системе координат оператор Лапласа-Бельтрами запишется

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2}\left\{\frac{1}{\cosh\rho\sinh\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\cosh\rho\sinh\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\cosh^2\rho}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sinh^2\rho}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}$$

а потенциал осциллятора

$$U(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\omega^2 R^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\cosh^2\rho\cos^2\theta}\right)$$

В уравнении Шредингера выбирая волновую функцию Ψ в виде

$$\Psi(\rho,\theta,\varphi) = (\cosh\rho\sinh\rho)^{-1/2} R(\rho)\, Z(\theta)\, \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$$

после разделения переменных, приходим к системе связанных дифференциальных уравнений вида Пешля-Теллера

$$
Z''(\chi) + \left[4A^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{\sin^2\chi} - \frac{\nu^2 - 1/4}{\cos^2\chi}\right] Z(\chi) = 0, \tag{21}
$$

$$
R''(\rho) + \left[\mathcal{E} + \frac{A^2 - 1/4}{\cosh^2\rho} - \frac{m^2 - 1/4}{\sinh^2\rho}\right] R(\rho) = 0,
$$

где $\chi = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]$, $\mathcal{E} = 2R^2E - \omega^2R^2 - 1$, $\nu = \sqrt{\omega^2R^4 + \frac{1}{4}}$ и A цилиндрическая константа разделения. Квадратично интегрируемое решение уравнения (21) нормализованное в области $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ имеет следующий вид

$$
Z(\theta) \equiv Z_{n_3}(\theta;\, \nu) = \frac{\sqrt{(n_3 + \nu + 1/2)n_3!\Gamma(1 + n_3 + 2\nu)}}{\Gamma(1 + n_3 + \nu)} (\cos\theta)^{\nu + 1/2}\, P_{n_3}^{(\nu,\nu)}(\sin\theta)
$$

с $n_3 = 0, 1, 2......$ Константа разделения квантуется как

$$
A = (n_3 + \nu + 1/2).
$$

Для $R(\rho)$ решения для связанных состояний будут

$$
\begin{aligned}
R(\rho) \equiv R_{n_\rho}^{n_3 m}(\rho) \quad &= \quad N_{n_\rho}^{n_3 m} (\sinh\rho)^{|m|+1/2} (\cosh\rho)^{-(n_3+\nu)} \\
&\times \quad {}_2F_1\left(-n_\rho,\ n_\rho + |m| - n_3 - \nu + 1/2;\ |m| + 1;\ -\sinh^2\rho\right)
\end{aligned}
$$

где $n_\rho = 0, 1, 2, ...n_\rho^{max} = [\frac{1}{2}(\nu + n_3 - |m| - \frac{1}{2})]$. Спектр энергии получается таким же как в (20) с главным квантовым числом $N = |m| + 2n_\rho - n_3 - 1$.

Эквидистантные координаты

$$z_0 = R\cosh\tau_1\cosh\tau_2\cos\theta, \qquad z_2 = R\cosh\tau_1\sinh\tau_2,$$
$$z_1 = R\cosh\tau_1\cosh\tau_2\sin\theta, \qquad z_3 = R\sinh\tau_1,$$

$$\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), \quad (\tau_1,\tau_2)\in(-\infty,\infty)$$

В эквидистанных системе координат оператор Лапласа-Бельтрами запишется

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2}\left\{\frac{1}{\cosh\tau_1^2}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\cosh\tau_1^2\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \frac{1}{\cosh\tau_1^2}\left[\frac{1}{\cosh\tau_2}\frac{\partial}{\partial\tau_2}\cosh\tau_2\frac{\partial}{\partial\tau_2} - \frac{1}{\cosh^2\tau_2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\right\}$$

а потенциал осциллятора

$$U(\tau_1,\tau_2,\theta) = \frac{\omega^2R^2}{2}\left(1-\frac{1}{\cosh^2\tau_1\cosh^2\tau_2\cos^2\theta}\right)$$

В уравнении Шредингера выбирая волновую функцию Ψ в виде

$$\Psi(\tau_1,\tau_2,\theta) = (\cosh\tau_1)^{-1}X(\tau_1)\,(\cosh\tau_2)^{-1/2}\,Y(\tau_2)Z_{n_3}(\theta),$$

где функция $Z_{n_3}(\theta)$ даётся формулой (34), и после разделения переменных, получаем два модифицированных (симметричных) уравнений типа Пешля-Теллера

$$Y''(\tau_2) + \left[-(j+1/2)^2 + \frac{(n_3+\nu+\frac{1}{2})^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_2} \right] Y(\tau_2) = 0$$

$$X''(\tau_1) + \left[\mathcal{E} + \frac{(j+1/2)^2 - 1/4}{\cosh^2 \tau_1} \right] X(\tau_1) = 0$$

и j эквидистантная константа разложения. Норированная в области $(\tau_1, \tau_2) \in (-\infty, \infty)$ связанные волновые функции запишутся

$$Y_{jn_2 n_3}(\tau_2) = 2^j \Gamma(j+1) \sqrt{\frac{(2j+1)(n_2)!}{\pi \Gamma(n_3+j+\nu+3/2)}} \, (\cosh \tau_2)^{-j-\frac{1}{2}} \; C_{n_2}^{j+1}(\tanh \tau_2) \quad (22)$$

$$X_{jn_1}(\tau_1) = \frac{\Gamma(j-n_1+\frac{1}{2})}{2^{n_1-j}} \sqrt{\frac{(j-n_1)n_1!}{\pi \Gamma(2j-n_1+1)}} \, (\cosh \tau_1)^{-j+n_1} \; C_{n_1}^{j-n_1+\frac{1}{2}}(\tanh \tau_1) \quad (23)$$

а константы j и $\sqrt{\mathcal{E}}$ будут

$$j = n_3 - n_2 + \nu - \frac{1}{2}, \qquad \mathcal{E} = -(j-n_1)^2$$

где квантовые числа n_1 и n_2 пробегают значения $n_2 = 0, 1, 2, \ldots.., n_2^{max} = [n_3 + \nu - 1/2]$ и $n_1 = 0, 1, \ldots, n_1^{max} = [j]$. Энергия связанного состояния E_N даётся формулой (20), где здесь главное квантовое число N запишется через эквидистантные квантовые числа (n_1, n_2, n_3) как $N = n_1 + n_2 - n_3 - 1$.

Связь между эквидистантным и цилиндрическим базисами при фиксированном значении квантового числа $N = n_1 + n_2 - n_3 - 1 = 2n_\rho + |m| - n_3 - 1$ и квантового числа n_3 имеет вид разложения

$$\Psi_{j n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, \theta) = \sum_{m=-(n_1+n_2)}^{(n_1+n_2)} W_{j n_1 n_2 n_3}^{n_\rho m} \, \Psi_{n_\rho m n_3}(\rho, \theta, \varphi) \qquad (24)$$

Квантовое число m имеет ту же четность как $n_1 + n_2$ и пробегает значения $m = -(n_1 + n_2), -(n_1 + n_2) + 2, \ldots\ldots (n_1 + n_2) - 2, (n_1 + n_2)$. Коэффициенты разложения выразятся через полиномы Хана:

$$W_{j n_1 n_2 n_3}^{n_\rho m} = \sqrt{\frac{(2\beta + 2n + 1)\,(N - n)!\,(\alpha + n)!\,(\alpha + N - n)!(\alpha + \beta + n)!}{(x)!(N - x)!(\alpha + \beta + n + N + 1)!\,(n)!}}$$
$$\times \frac{(-1)^x e^{i(2N - 2n - x)\frac{\pi}{2}}\,(N)!}{(\alpha)!} Q_n(x; \alpha, \beta, N)$$

Однополостный гиперболоид $H_1^3 = SO(3,1)/SO(2,1)$

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$$

Псевдо-сферические координаты

$$x_0 = R\sinh\tau, \qquad x_1 = R\cosh\tau\sin\theta\cos\phi,$$
$$x_2 = R\cosh\tau\sin\theta\sin\phi, \qquad x_3 = R\cosh\tau\cos\theta,$$

$$\tau\in(-\infty,\infty), \qquad \theta\in[0,\pi], \qquad \phi\in[0,2\pi).$$

Метрика

$$\frac{ds^2}{R^2} = d\tau^2 - \cosh^2\tau\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right).$$

Свободный Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2R^2}\left\{p_\tau^2 - \frac{1}{\cosh^2\tau}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\phi^2\right)\right\} \tag{25}$$

Потенциал

$$V = -\frac{\alpha}{R}\frac{x_0}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = -\frac{\alpha}{R}\tanh\tau$$

А полный Гамильтониан запишется как

$$H = \frac{1}{2R^2}\left\{p_\tau^2 - \frac{1}{\cosh^2\tau}p_\theta^2 - \frac{1}{\cosh^2\tau}\frac{1}{\sin^2\theta}p_\phi^2\right\} - \frac{\alpha}{R}\tanh\tau, \qquad (26)$$

Вектор Рунге-Ленца

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2R}\left([\mathbf{N}\times\mathbf{L}] - [\mathbf{L}\times\mathbf{N}]\right) + \alpha\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad [A_i, H] = 0$$

$$\mathbf{LA} = L_1A_1 + L_2A_2 + L_3A_3 = 0 \quad A^2 = -H(L^2 - 2) + \frac{L^2}{R^2}(L^2 - 2) + \alpha^2$$

$$[A_i, A_j] = \left(\frac{L^2}{R^2} - H\right)\varepsilon_{ijk}L_k \quad [L_i, A_j] = -\varepsilon_{ijk}A_k$$

Уравнение Гамильтона-Якоби связанное с Гамильтонианом (26) получается после подстановки $p_{\mu_i} \to \partial S / \partial \mu_i$, где $\mu_i = (\tau, \theta, \phi)$:

$$H = \frac{1}{2R^2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right\} - \frac{\alpha}{R} \tanh \tau = E.$$

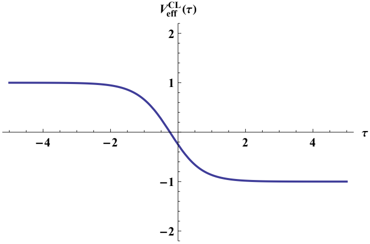
Эо уравнение полностью разделимо, и координата ϕ циклична. Мы ищем решения для классического действия $S(\tau, \theta, \phi, t)$ в виде

$$S(\tau, \theta, \phi, t) = -Et + p_\phi \phi + S_1(\tau) + S_2(\theta),$$

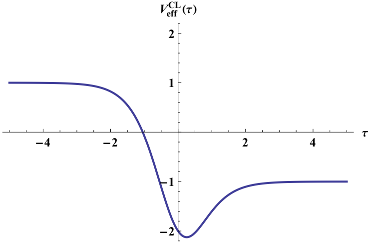
$$\left(\frac{dS_2}{d\theta} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = L^2, \tag{27}$$

$$\left(\frac{dS_1}{d\tau} \right)^2 - 2R\alpha \tanh \tau - \frac{L^2}{\cosh^2 \tau} = 2R^2 E, \tag{28}$$

$$V_{eff}^{Cl}(\tau) = -\frac{\alpha}{R}\tanh\tau - \frac{L^2}{2R^2\cosh^2\tau}.$$



(a) $0 < L^2 < \alpha R$



(b) $L^2 > \alpha R$

Рис.: Потенциал $V_{eff}^{CL}(\tau)$ для $L^2 = 4$ и $L^2 = 1/2$ $(\alpha = R = 1)$

В случае $L^2 > \alpha R$ этот потенциал имеет минимальное значение при $\tau_0 = \tanh^{-1}[\alpha R/L^2]$ и в этой точке

$$V_{eff}^{Cl}(\tau_0) = -\frac{1}{2R^2}\left(L^2 + \frac{\alpha^2 R^2}{L^2}\right)$$

Легко видеть что для фиксированных значений L^2 и p_ϕ^2 движение частицы на однополостном гиперболоиде ограничено дополнительны условием

$$\frac{x_3}{x_1 \sin\phi_0 - x_2 \cos\phi_0} = \sqrt{L^2/p_\phi^2 - 1}$$

Следовательно, без утраты общности мы можем выбрать $\theta = \pi/2$ или $L^2 = p_\phi^2$. Таким образом траектория лежит на двумерном мнимом пространстве Лобачевского или однополостном гиперболоиде: $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -R^2$. Можем записать уравнение траектории в виде

$$\frac{1}{1 - \tanh\tau} = \frac{p}{1 + \varepsilon(R)\cos\varphi}, \tag{29}$$

где мы воспользовались обозначениями

$$p = \left(1 - \frac{\alpha R}{L^2}\right)^{-1} > 0, \qquad \varepsilon(R) = \sqrt{1 + \frac{2\alpha R}{L^2}\frac{(1 + RE/\alpha)}{(1 - \alpha R/L^2)^2}}, \tag{30}$$

A. Рассмотрим эллиптические траектории, которые возможны только для отрицательных значений энергии: для $-\frac{1}{2R^2}\left(L^2 + \frac{\alpha^2 R^2}{L^2}\right) < E < -\frac{\alpha}{R}$ с

$$0 \leq \varepsilon(R) = \sqrt{1 + \frac{2\alpha R}{L^2} \frac{(1 - R|E|/\alpha)}{(1 - \alpha R/L^2)^2}} < 1.$$

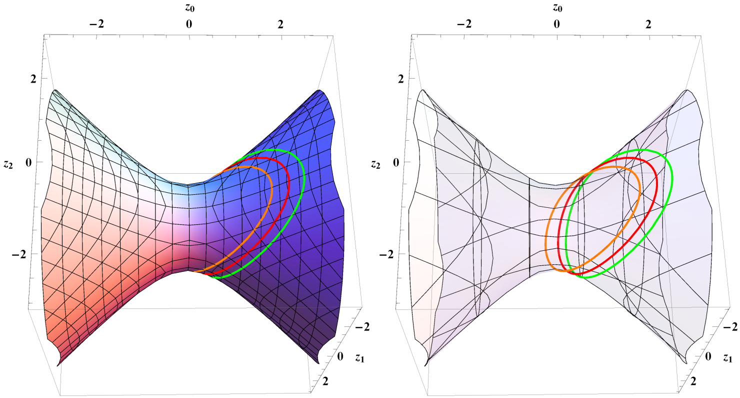


Рис.: Траектории движения для $\epsilon = 0.8$ и $p = 1.5\,,\ 2\,,\ 2.5$

Легко можно посчитать период эллиптического движения.

$$T = \frac{\pi R}{\sqrt{8|E|}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\alpha/R|E|}}+\frac{1}{\sqrt{1-\alpha/R|E|}}\right], \quad (31)$$

которое каки ожидалось зависит только от энергии. Для $E = E_{min}$ имеем $\varepsilon = 0$

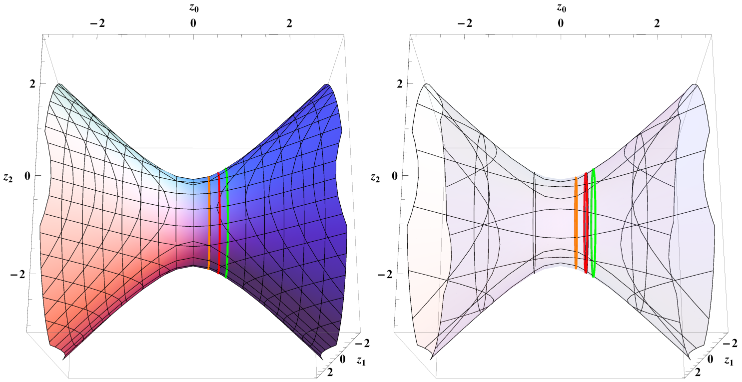


Рис.: Траектории движения для $\epsilon = 0$ и $p = 1.5\,,\,2\,,\,2.5$

В.Для $E = -\alpha/R$ имеем $\varepsilon(R) = 1$

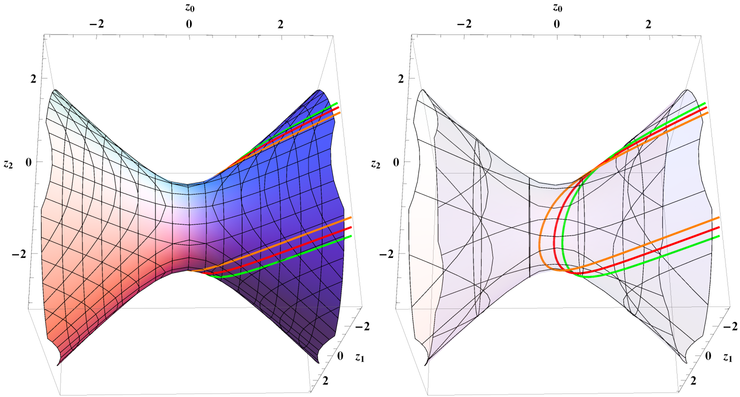


Рис.: Траектория движения для $\epsilon = 1$ и $p = 1.5\,,\,2\,,\,2.5$

C. Для значений энергии $-\alpha/R < E < \alpha/R$ траектория движения будет гиперболой

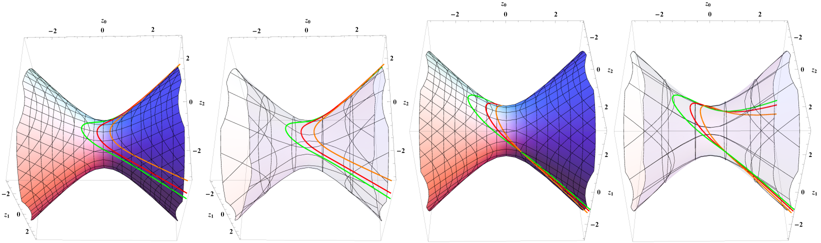


Рис.: Траектория движения для $L^2 = 1/2$ и $E = -1/2\,,\,0\,,\,1/2$ и $L^2 = 2$ и $E = -1/2\,,\,0\,,\,1/2 (\alpha = R = 1)$

D. Для $E \geq \alpha/R$ движение происходит во всей области $\tau \in (-\infty, \infty)$

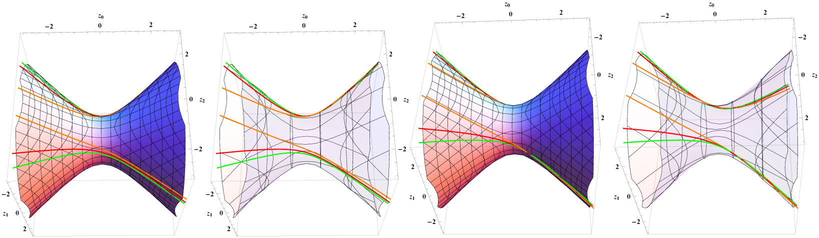


Рис.: Траектория движения для $L^2 = 1/2$ и $E = 1\,,\,2\,,\,3$ и $L^2 = 2$ и $E = 1\,,\,2\,,\,3 (\alpha = R = 1)$

Квантовая задача Кеплера-Кулона на однополостном гиперболоиде $SO(3,1)$

В псевдо-сферических координатах Гамильтониан задачи запишется как

$$H = -\frac{1}{2R^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} + 2\tanh\tau\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{1}{\cosh^2\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right] - \frac{\alpha}{R}\tanh\tau.$$

Подставляя в соответствующее уравнение Шредингера волновую функцию

$$\Psi = S(\tau)Y_l^m(\theta,\phi), \tag{32}$$

где Y_l^m это сферические гармоники, мы получаем уравнение для радиальной функции S

$$\frac{d^2S}{d\tau^2} + 2\tanh\tau\frac{dS}{d\tau} + \left[\frac{l(l+1)}{\cosh\tau^2} + 2\alpha R\tanh\tau + 2ER^2\right]S = 0. \tag{33}$$

Решения для дискретного спектра запишутся как

$$f_{nl}(\tau) = N_{nl}e^{\sigma\tau}(2\cosh\tau)^{-n}{}_2F_1\left(n+l+1, n-l; n+\sigma+1; (1+e^{-2\tau})^{-1}\right), \tag{34}$$

со спектром энергии

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{n^2-1}{2R^2}. \tag{35}$$

где $N = \delta, \delta+1, ..., l$ где $\delta = max\{[\sqrt{\alpha R}], 1\}$.

Эллиптическо-параболические II координаты

$$x_0 = \frac{R(t_1+t_2-2)}{2\sqrt{(1-t_1)(t_2-1)}}, \qquad x_1 = R\sqrt{t_1 t_2}\cos\phi,$$
$$x_2 = R\sqrt{t_1 t_2}\sin\phi, \qquad x_3 = \frac{R(t_1+t_2-2t_1t_2)}{2\sqrt{(1-t_1)(t_2-1)}}. \tag{36}$$

$$t_1 \in [0,1),\ t_2 \in (1,\infty),\ \varphi \in [0,2\pi) \qquad x_0 + x_3 > 0$$

В координатах t_1, t_2, ϕ, Гамильтониан принимает вид

$$H = \frac{2}{R^2}\left[\frac{1-t_1}{t_2-t_1}\frac{\partial}{\partial t_1}t_1(1-t_1)\frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{1-t_2}{t_1-t_2}\frac{\partial}{\partial t_2}t_2(1-t_2)\frac{\partial}{\partial t_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4t_1t_2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] - \frac{\alpha}{R}\frac{t_1+t_2-2}{t_2-t_1}.$$

Замена $\Psi = S_1(t_1)S_2(t_2)e^{im\phi}$ разделяет переменные в уравнении Шредингера и мы получаем уравнения для S_1 и S_2

$$\frac{d}{dt_1}(t_1-1)t_1\frac{dS_1}{dt_1} + \left[\frac{ER^2-\alpha R}{2} - \frac{m^2}{4t_1} + \frac{A}{4(t_1-1)}\right]S_1 = 0, \tag{37}$$

$$\frac{d}{dt_2}(t_2-1)t_2\frac{dS_2}{dt_2} + \left[\frac{ER^2+\alpha R}{2} - \frac{m^2}{4t_2} + \frac{A}{4(t_2-1)}\right]S_2 = 0. \tag{38}$$

Для $E = E_n$ константа разделения A может принимать также и дискретные значения. Это только возможно для $n - \sigma < |m| < n + \sigma$ где $\sigma = \alpha R/n$. Тогда можно записать $A = -[\sigma - (n_1 + n_2 + 1)]^2$, где $n_1 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{1}{2}[n - \sigma - |m| - 1)]$, $n_2 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{1}{2}[|m| - n + \sigma - 1)]$, и $n = |m| + n_1 - n_2$. Для решений же получим В этом случае имеем волновые функции $\Psi_{n_1 n_2 m}(t_1, t_2, \phi)$ нормированные условием

$$\int\int\int_{x_0+x_3>0} \Psi^*_{n_1 n_2 m}(t_1, t_2, \phi)\Psi_{n_1 n_2 m}(t_1, t_2, \phi)dV = \frac{1}{2},$$

принимают вид

$$\Psi_{n_1 n_2 m}(t_1, t_2, \phi) = N^n_{n_1 n_2}\, S^n_{1 n_1 n_2}(t_1)\, S^n_{2 n_1 n_2}(t_2)\, \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{39}$$

где

$$\begin{aligned} S^n_{1 n_1 n_2} &= t_1^{|m|/2}(1 - t_1)^{-n_1 + (n+\sigma-|m|-1)/2}\, {}_2F_1(-n_1,\ n + \sigma - n_1;\ |m| + 1;\ t_1), \\ S^n_{2 n_1 n_2} &= t_2^{n_2 - |m|/2}(t_2 - 1)^{-n_2 + (|m|-n+\sigma-1)/2}\, {}_2F_1(-n_2,\ |m| - n_2;\ n - \sigma + 1;\ 1/t_2), \end{aligned}$$

Для фиксированных значений энергии, волновая функция (39) моут быть разложены волновыми функциями $\Psi_{nlm}(\tau, \theta, \phi)$ (32) как

$$\Psi_{n_1 n_2 m}(t_1,\ t_2, \phi) = \sum_{l=max\{n,|m|\}}^{\infty} W^{nlm}_{n_1 n_2}\ \Psi_{nlm}(\tau, \theta, \phi). \qquad (40)$$

Для нахождения коэффициентов разложения $W^{nlm}_{n_1 n_2}$, выразим координаты $(t_1,\ t_2)$ в левой части (40) через сферические координаты

$$t_1 = \frac{(1-\cos\theta)}{(1+\tanh\tau)} \qquad t_2 = \frac{(1+\cos\theta)}{(1-\tanh\tau)}$$

Мы должны заметить, что волновая функция (39) действительна только на половине пространства где $x_0 + x_3 > 0$, или на языке псевдо-евклидовых координат $\tanh\tau + \cos\theta > 0$ Рассматривая данное разложение в точке $\tau \to \infty$, и исключая переменную τ с обоих сторон окончательно для коэффициента разложения получим

$$W^{nlm}_{n_1 n_2 m} = \frac{(-1)^{l-n+\frac{m-|m|}{2}}}{l!(n+|m|)!} \sqrt{\frac{2(\sigma-n_1-n_2-1)(2l+1)}{\Gamma(l+1+\sigma)\Gamma(l+1-\sigma)}}\, \frac{\Gamma(\sigma-n_1-n_2)(l-n_1-n)!}{\Gamma(\sigma+n_1-n_2)\Gamma(n+\sigma-l-n_1)}$$

$$\times \sqrt{\frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}\, \frac{n_1!(l+n)!(|m|+n_1)!(|m|-n_1-1)!}{n_2!(l-n)!}}\,\Gamma(\sigma-n_1)\Gamma(\sigma-n_2)$$

$$\times\ {}_4F_3\left[\begin{matrix} -l+n\ ,\ -l+|m|\ ,\ n-n_1\ ,\ n+\sigma-n_1\ ; & 1 \\ 1+|m|+n\ ,\ n-l-n_1\ ,\ n+\sigma-n_1-l & \end{matrix}\right]$$

Основные результаты работы

1. Показано что классическая задача о гармоническом осцилляторе и движении в кеплеровском поле может быть определена на гиперболоиде H_2^2 или конфигурационном пространстве анти де Ситтера. Построены дополнительные интегралы движения: аналог тензора Демкова для гармонического осциллятора и вектор Рунге-Ленца-Лапласа для движения в кулоновском поле. Доказано, что обе задачи принадлежат к классу максимально суперинтегрируемых систем.
2. В рамках уравнения Гамильтона-Якоби построены классические траектории движения для разных значений Лоренцевского момента L^2 и энергии E. Показано, что при положительных значениях $L^2 > 0$ орбиты расположены на верхней (нижней) поле двухполостного гиперболоида, в то время как при $L^2 < 0$ движение происходит на поверхности однополостного гиперболоида. Найдены условия при которых все конечные орбиты замкнуты.
3. Показано что при движении в кеплеровском поле на H_2^2 имеют место все три закона Кеплера.
4. Путём разделения переменных в псевдо-сферической системе координат вычислены ортонормированные собственные функции дискретного и непрерывного спектров и собственные значения уравнения Шредингера для потенциалов гармонического осциллятора и Кеплера-Кулона на H_2^2 в псевдо-сферической системе координатах при положительных значениях квантового момента $L^2 > 0$ (дискретная серия представлений). Показано, что существует конечное число уровней энергии вырожденных по угловому квантовому числу и бесконечно-кратно по азимутальному квантовому числу.

5. Найдены решения уравнения Шредингера для гармонического осциллятора в цилиндрической и эквидистантной системах координат. Вычислен полный спектр энергии гармонического осциллятора соответствующий движению на полной поверхности H_2^2 гиперболоида. Построены коэффициенты разложения для переходов между цилиндрическим и эквидистантными базисами в дискретном спектре. Найдена связь межбазисных коэффициентов с полиномами Хана.
6. Сформулирована классическая задача Кеплера на одно - полосом гиперболоиде $SO(3,1)$ и построен аналог вектора Рунге-Ленца-Лапласа. Найдено решение уравнения Гамильтона-Якоби в псевдо-сферической координатной системе. Построены траектории движения для разных значений момента L^2 и энергии E. Показано, что все конечные траектории замкнуты.
7. Решена задача о разложении произвольной функции на однополостном гиперболоиде $SO(3,1)$ по полной системе псевдо-сферических кулоновских волновых функциях. Найдено решение уравнения Шредингера для кулоновского потенциала в эллиптико-параболической системе координат для дискретного спектра энергий. Вычислены коэффициенты межбазисных разложений для переходов между псевдо-сферическими и эллиптико-параболическими волновыми функциями.
8. Решена задача о смешанных межбазисных разложениях для гармонического осциллятора на двухполостном гиперболоиде $SO(3,1)$. Показано что соответствующие коэффициенты разложений выражаются через полиномы Вильсона.

ЛТФ ОИЯИ

1. D.R.Petrosyan, G.S.Pogosyan, The Kepler-Coulomb Problem on SO(2,2) Hyperboloid. *Physics of atomic nuclei*, 75(10):1272-1278, 2012
2. D.R.Petrosyan, G.S.Pogosyan, Classical Kepler-Coulomb Problem on SO(2,2) hyperboloid. *Physics of atomic nuclei*, 76(10):1273-1283, 2013
3. D.R.Petrosyan, G.S.Pogosyan, Quantum Oscillator Problem on SO(2,2) Hyperboloid. *Nonlinear phenomena in complex systemms*, 17(4):405-408, 2014
4. D.R.Petrosyan, G.S.Pogosyan, Harmonic Oscillator on the SO(2,2) Hyperboloid. *SIGMA*, 11(96):1-23, 2015
5. Yu.A.Kurochkin, V.S.Otchik, D.R.Petrosyan, G.S.Pogosyan, Eigenfunction expansion in the imaginary Lobachevsky space. *Proceedings of the IX International conference BGL-9*
6. Yu.A.Kurochkin, L.G.Mardoyan, V.S.Otchik, D.R.Petrosyan, G.S.Pogosyan, Kepler motion on single-sheet hyperboloid., *Proceedings of the IX International conference BGL-9*

Спасибо за внимание