О полях бесконечного спина

Ю. М. Зиновьев, М. В. Хабаров

ОТФ, ИФВЭ

arXiv:1711.08223

План

1. Представления группы Пуанкаре
2. Калибровочно инвариантный формализм
3. Размерности $d \geq 5$

Группа Пуанкаре

- Состоит из трансляций P_μ и Лоренцевских вращений $M_{\mu\nu}$.
- Коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[M_{\mu\nu}, P_\alpha] &= g_{\mu\alpha} P_\nu - g_{\nu\alpha} P_\mu \\
[M_{\mu\nu}, M_{\alpha\beta}] &= g_{\mu\alpha} M_{\nu\beta} - \dots
\end{aligned}$$

- Операторы Казимира

$$P_\mu{}^2, \qquad W_\mu{}^2, \qquad W^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu M_{\alpha\beta}$$

Общий метод построения представлений

- Поскольку трансляции коммутируют будем использовать их собственные вектора

$$P_\mu|k_\mu >= k_\mu|k_\mu >$$

- Из коммутационных соотношений следует, что при Лоренцевских вращениях

$$|k_\mu > \Rightarrow |k'_\mu >= |k_\mu + \eta_{\mu\nu}k^\nu >, \qquad {k_\mu}^2 = inv$$

- Следовательно есть три типа представлений
  - ${P_\mu}^2 > 0$ — массивные
  - ${P_\mu}^2 = 0$ — безмассовые
  - ${P_\mu}^2 < 0$ — тахионные

Массивные представления

- Любой вектор с ${k_\mu}^2 = m^2 > 0$ Лоренцевскими преобразованиями можно привести к каноническому виду

$$k_\mu = (m, 0, 0, 0)$$

- В этом случае малая группа (группа, оставляющая этот вектор инвариантным) это группа $SO(3)$.
- Поэтому массивные представления (помимо массы) характеризуются представлениями этой малой группы (т.е. спином s)

$$ {P_\mu}^2 = m^2, \qquad {W_\mu}^2 = s(s+1)m^2 $$

- Если рассмотреть предел $s \to \infty$, $m \to 0$, $sm = \mu_0 = const$, то получим

$$ {P_\mu}^2 = 0, \qquad {W_\mu}^2 = {\mu_0}^2 $$

Безмассовые представления

- Любой вектор с ${k_\mu}^2 = 0$ Лоренцевскими преобразованиями можно привести к каноническому виду

$$k_\mu = (k, 0, 0, k)$$

- В этом случае малая группа (группа, оставляющая этот вектор инвариантным) это группа E_2 (группа движений плоскости):

$$[T_1, T_2] = 0, \qquad [T_3, T_1] = T_2, \qquad [T_3, T_2] = -T_1$$

- Как у всякой некомпактной группы ее унитарные представления либо тривиальные, либо бесконечномерные
  - ${W_\mu}^2 = 0$, $W_\mu = \lambda k_\mu$, λ — спиральность
  - ${W_\mu}^2 = {\mu_0}^2$ — содержат бесконечное число спиральностей: $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm\infty$ или $\pm 1/2, \pm 3/2, \ldots, \pm\infty$

Тахионные представлений

- Любой вектор с ${k_\mu}^2 = -m^2 < 0$ Лоренцевскими преобразованиями можно привести к каноническому виду

$$k_\mu = (0, 0, 0, m)$$

- В этом случае малая группа (группа, оставляющая этот вектор инвариантным) это группа $SO(1, 2)$.
- Также как и в случае группы движений плоскости ее унитарные представления либо тривиальные, либо бесконечномерные
- При этом бесконечномерные могут начинаться с ненулевой спиральности $\pm m, \pm(m+1), \dots, \pm\infty$

Калибровочно инвариантное описание массивных полей

- Основная идея: начав с "правильного" набора безмассовых полей ввести массовые и перекрестные члены так, чтобы сохранить все (хотя и модифицированные) калибровочные симметрии исходных безмассовых полей.
- Это гарантирует правильное число физических степеней свободы, в том числе и после включения взаимодействия.
- Такое описание имеет несингулярный безмассовый предел и позволяет контролировать роль отдельных степеней свободы.
- Более того, такой формализм прекрасно работает не только в плоском пространстве Минковского, но и в пространствах (Анти) де Ситтера, позволяя исследовать все возможные (частично-)безмассовые пределы.

Массивный фермион со спином $s+1/2$

- Набор полей ${\Phi_\mu}^{a(k)}$, $0 \le k \le s-1$ и ϕ.
- Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{cross}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \sum_{k=0}^{s-1} i(-1)^k \left\{ {}^{\mu\nu\alpha}_{abc} \right\} [{\bar{\Phi}_\mu}{}^{d(k)} \partial_\nu {\Phi_\alpha}^{d(k)} - 6k {\bar{\Phi}_\mu}{}^{ad(k-1)} \partial_\nu {\Phi_\alpha}^{cd(k-1)}] \\
\mathcal{L}_m &= \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^{k+1} b_k \left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} [{\bar{\Phi}_\mu}{}^{c(k)} \Gamma^{ab} {\Phi_\nu}^{c(k)} + 2k {\bar{\Phi}_\mu}{}^{ac(k-1)} {\Phi_\nu}^{bc(k-1)}] \\
\mathcal{L}_{cross} &= \sum_{k1}^{s-1} (-1)^{k+1} i e_k \left\{ {}^{\mu\nu}_{ab} \right\} [{\bar{\Phi}_\mu}{}^{ac(k-1)} \gamma^b {\Phi_\nu}^{c(k-1)} + h.c.]
\end{aligned}$$

Массивный фермион со спином $s + 1/2$

- Иллюстрация к значению коэффициентов e_k:

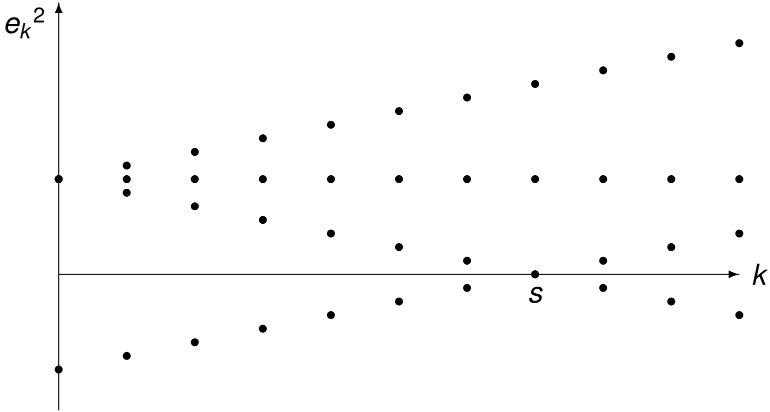
$$\boxed{\phi} \xrightarrow{e_0} \boxed{\Phi_\mu} \xrightarrow{e_1} \boxed{\Phi_\mu{}^a} \xrightarrow{e_2} \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \boxed{\Phi_\mu^{a(s-2)}} \xrightarrow{e_{s-1}} \boxed{\Phi_\mu^{a(s-1)}} \xrightarrow{e_s}$$

- Требование калибровочной инвариантности полного лагранжиана дает ряд рекуррентных соотношений на параметры e_k и b_k.
- Их общее решение зависит от двух произвольных параметров.
- В случае массивного фермиона с конечным спином это спин s и масса m.

Бесконечный спин

- Для того, чтобы реализовать представления с бесконечным спином, рассмотрим предел $s \to \infty$. Рекуррентные соотношения остаются теми же. Их решение по-прежнему зависит от двух произвольных параметров.
- В зависимости от знака космологического члена получаем
  - В пространстве де Ситтера нет решений соответствующих унитарной теории.
  - В пространстве Анти де Ситтера есть целый набор таких решений, однако их соответствие представлениям группы Анти де Ситтера вопрос открытый.
  - В пространстве Минковского есть четыре типа решений, соответствующих унитарным представления группы Пуанкаре.

Бесконечный спин в пространстве Минковского



Безмассовые представления при $d \geq 5$

- В пространстве с размерностью $d \geq 5$ в безмассовом случае

$$k_\mu = (k, 0, \ldots, 0, k), \qquad {k_\mu}^2 = 0$$

малая группа E_{d-2}, которая состоит из (псевдо-)трансляций T_i и вращений $M_{[ij]}$, $1 \leq i \leq d-2$.

- Ее представления строятся также, как и представления самой группы Пуанкаре (с учетом евклидовой сигнатуры) и характеризуются представлениями "короткой малой группы" — $SO(d-3)$.
- При $d = 4$ эта группа тривиальна, поэтому есть только одно бозонное и одно фермионное представления с бесконечным спином.
- При $d = 5, 6$ такие представления характеризуются "спиральностью", т.е. параметром l, который принимает целые (для бозонов) или полуцелые (для фермионов) значения.

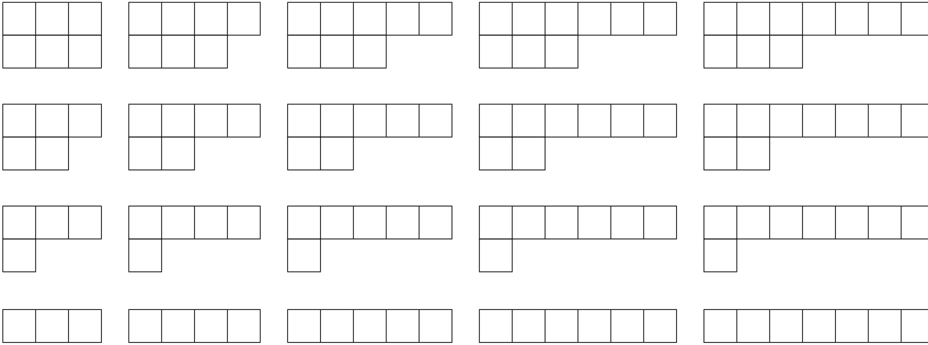
Новая серия представлений с бесконечным спином

- Два известных ранее примера были основаны на полностью симметричных (спин-)тензорах, которых в $d = 4$ достаточно для описания всех представлений.
- При $d > 4$ важную роль начинают играть (спин-)тензоры со смешанной симметрией, которые характеризуются схемами Юнга.
- По аналогии со случаем $d = 4$ мы предположили, что новые серии представлений с бесконечным спином могут быть получены из калибровочно инвариантного описания смешанных (спин-)тензоров, соответствующих схемам Юнга $Y(k, l)$ (Y(k+1/2,l+1/2) для фермионов) в пределе

$$k \to \infty, \qquad m \to 0, \qquad l = const$$

- Предположение оказалось верным.

Пример: спектр представления при $l = 3$



- Унитарные случаи существуют только в пространствах Минковского и Анти де Ситтера.
- Помимо общего случая есть частные, когда система распадается на две или четыре части.

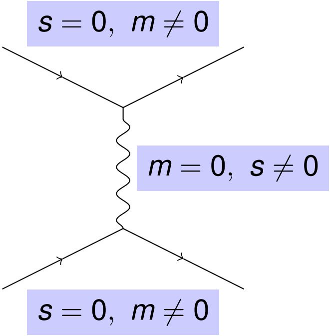
Вместо заключения

- Взаимодействия высших спинов содержат высшие производные и требуют наличия размерного параметра в свободной теории:
  - Безмассовые поля в пространстве Анти де Ситтера — теория Васильева
  - Массивные поля в плоском пространстве — теория струн
  - Безмассовые поля бесконечного спина — ?
- "Tensionless limit" в теории струн
- Кубические вершины взаимодействия (Мецаев 2017)
  - Массивное поле конечного спина и два безмассовых бесконечного
  - Два массивных поля конечного спина и одно безмассовое бесконечного

Нет вершин с безмассовыми полями конечного спина ???

Вместо заключения

- Простейший пример — рассеяние массивных скалярных полей (Bekaet, Joung, Mourad 2009)



$A \sim E^{2s}$

- На высоких энергиях полная амплитуда может убывать
- На низких энергиях доминируют вклады $s \leq 2$