Массивные поля и супермультиплеты в 3D

Ю. М. Зиновьев

ОТФ, ИФВЭ

Symmetry 10 (2018) 9

План

1. Пространство AdS_3
2. Безмассовые поля
3. Массивные поля
4. Супермультиплеты
5. Взаимодействие с (супер)гравитацией

Алгебра AdS_3

- В качестве генераторов удобно использовать ($a, b = 1, 2, 3$):

$$P^a, \quad M^a = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc} M_{bc}$$

- Коммутационные соотношения ($-\Lambda = \lambda^2$):

$$[P^a, P^b] = \frac{\lambda^2}{4}\varepsilon^{abc} M^c, \quad [M^a, P^b] = \varepsilon^{abc} P^c, \quad [M^a, M^b] = \varepsilon^{abc} M^c$$

- Если ввести линейные комбинации $P^a \pm \frac{\lambda}{2} M^a$

$$\begin{aligned} [P^a \pm \frac{\lambda}{2} M^a, P^b \pm \frac{\lambda}{2} M^b] &= \lambda \varepsilon^{abc} (P^c \pm \frac{\lambda}{2} M^c) \\ [P^a \pm \frac{\lambda}{2} M^a, P^b \mp \frac{\lambda}{2} M^b] &= 0 \end{aligned}$$

Это соответствует $SO(2,2) \approx SO(2,1) \otimes SO(1,2)$

Мультиспинорный реперный формализм

- Каждый векторный индекс эквивалентен симметричной паре спинорных $a \Rightarrow (\alpha\beta)$, $\alpha, \beta = 1, 2$
- Симметричный бесследовый тензор ранга n эквивалентен симметричному мультиспинору ранга $2n$:

$$\Phi^{a(n)}, \quad \Phi^{a(n-2)b}{}_{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi^{\alpha(2n)}$$

- Генераторы алгебры AdS_3 — $P^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$
- Пространство AdS_3 описывается фоновыми (не-динамическими) один-формами $e^{\alpha\beta}$ и $\omega^{\alpha\beta}$, где e — репер, а ω — лоренцевская связность, определяющая ковариантную производную.
- Базовые соотношения

$$D \wedge e = 0, \qquad D \wedge D\xi^{\alpha} = -\lambda^2 E^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\beta}, \qquad e^{\alpha\alpha} \wedge e^{\beta\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta} E^{\alpha\beta}$$

Бозонные поля

- Безмассовые бозонные поля со спином $s \geq 2$ не имеют физических степеней свободы
- В реперном формализме они описываются физической один-формой $f^{\alpha(2s-2)}$ и вспомогательной один-формой $\Omega^{\alpha(2s-2)}$.
- Лагранжиан

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= (-1)^s[(s-1)\Omega_{\alpha(2s-3)\beta}e^\beta{}_\gamma\Omega^{\alpha(2s-3)\gamma} + \Omega_{\alpha(2s-2)}Df^{\alpha(2s-2)} \\
&\quad + \frac{(s-1)\lambda^2}{4}f_{\alpha(2s-3)\beta}e^\beta{}_\gamma f^{\alpha(2s-3)\gamma}]
\end{aligned}
$$

- Он инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$
\begin{aligned}
\delta\Omega^{\alpha(2s-2)} &= D\eta^{\alpha(2s-2)} + \frac{\lambda^2}{4}e^\alpha{}_\beta\xi^{\alpha(2s-3)\beta} \\
\delta f^{\alpha(2s-2)} &= D\xi^{\alpha(2s-2)} + e^\alpha{}_\beta\eta^{\alpha(2s-3)\beta}
\end{aligned}
$$

Бозонные поля

- Можно ввести новые комбинации

$$\Omega_\pm = \Omega \pm \frac{\lambda}{2} f, \qquad \eta_\pm = \eta \pm \frac{\lambda}{2} \xi$$

- Тогда лагранжиан распадается на сумму двух независимых частей

$$\mathcal{L}(\Omega, f) = \mathcal{L}(\Omega_+) - \mathcal{L}(\Omega_-)$$

  каждая из которых инвариантна относительно своего калибровочного преобразования $\eta_\pm$
- При этом поля $\Omega_\pm$ преобразуются только относительно "левой" или "правой" группы $SO(2,1)$ соответственно
- Это тесно связано с тем, что они не имеют локальных степеней свободы

Фермионные поля

- Безмассовые фермионные поля со спином $s \geq 3/2$ также не имеют физических степеней свободы
- фермионное поле со спином $s + 1/2$ описывается один-формой $\Phi^{\alpha(2s-1)}$
- Лагранжиан

$$\mathcal{L} = i\frac{(-1)^s}{2}[\Phi_{\alpha(2s-1)} D\Phi^{\alpha(2s-1)} \pm \frac{(2s-1)\lambda}{2}\Phi_{\alpha(2s-2)\beta} e^{\beta}{}_{\gamma}\Phi^{\alpha(2s-2)\gamma}]$$

- Инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$\delta\Phi^{\alpha(2s-1)} = D\xi^{\alpha(2s-1)} \pm \frac{\lambda}{2} e^{\alpha}{}_{\beta}\xi^{\alpha(2s-2)\beta}$$

- Знаки $\pm$ соответствуют преобразованию по "левой" или "правой" группе соответственно.

Бозонные поля

- В четырехмерном пространстве массивное бозонное поле со спином s содержит спиральности $(\pm s, \pm(s-1), \cdots \pm 1, 0)$
- Калибровочно инвариантное описание массивного поля строится из набора безмассовых полей

$$\Phi_s, \Phi_{s-1}, \ldots, \Phi_1, \Phi_0$$

  с сохранением всех калибровочных симметрий, которыми обладали исходные безмассовые поля
- В трех измерениях массивное бозонное поле со спином s имеет только две физические степени свободы
- Калибровочно инвариантное описание строится так же, как и в размерности $d \geq 4$, при этом свободный лагранжиан заменой переменных разделяется на сумму двух независимых частей

Фермионные поля

- В четырехмерном пространстве массивное фермионное поле со спином $s+1/2$ содержит спиральности $(\pm(s+1/2), \pm(s-1/2), \cdots \pm 3/2, \pm 1/2)$
- Калибровочно инвариантное описание массивного поля строится из набора безмассовых полей

$$\Phi_{s+1/2}, \Phi_{s-1/2}, \ldots, \Phi_{3/2}, \Phi_{1/2}$$

  с сохранением всех калибровочных симметрий, которыми обладали исходные безмассовые поля
- В трех измерениях массивное фермионное поле со спином $s = 1/2$ имеет только одну физическую степень свободы
- Калибровочно инвариантное описание строится так же, как и в размерности $d \geq 4$, при этом есть произвол, связанный со знаком массового члена.

Суперсимметрии в трех измерениях

- В трех измерениях суперсимметрии также делятся на "левые" и "правые", причем их число не обязано быть одинаковым.
- В пространстве AdS_3 глобальным суперсимметриям соответствуют преобразования с ковариантно постоянными параметрами:
$$D\zeta^\alpha \pm \frac{\lambda}{2} e^\alpha{}_\beta \zeta^\beta = 0$$
- Общему случаю (p,q)-суперсимметрии $(p,q = 0,1,2,\dots)$ соответствует супералгебра связанная с прямым произведением:
$$OSp(p,2) \otimes OSp(q,2)$$
- Простейший случай — (1,0) или (0,1) суперсимметрия
$$\{Q^\alpha, Q^\beta\} = P^{\alpha\beta} \pm \frac{\lambda}{2} M^{\alpha\beta}$$
- Соответственно и число бозонных и фермионных физических степеней свободы не обязано быть одинаковым

Безмассовые супермультиплеты

- Как и в четырех измерениях есть два типа супермультиплетов $(s, s+1/2)$ и $(s, s-1/2)$
- В случае мультиплета $(s, s+1/2)$ лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\Omega^{\alpha(2s-2)}, f^{\alpha(2s-2)}) + \mathcal{L}(\Phi^{\alpha(2s-1)}) \\ &= \mathcal{L}(\Omega_+) - \mathcal{L}(\Omega_-) + \mathcal{L}(f) \end{aligned}$$

инвариантен относительно суперпреобразований

$$\begin{aligned} \delta\Omega_+^{\alpha(2s-2)} &= i(2s-1)\lambda\Phi^{\alpha(2s-2)\beta}\zeta_\beta, \qquad \delta\Omega_-^{\alpha(2s-2)} = 0 \\ \delta\Phi^{\alpha(2s-1)} &= \Omega_+^{\alpha(2s-2)}\zeta^\alpha \end{aligned}$$

- Для супермультиплета $(s, s-1/2)$ все аналогично.

Массивные супермультиплеты в 4D

- В четырех измерениях есть два типа массивных супермультиплетов

$$\begin{pmatrix} & s+1/2 & \\ s & & s' \\ & s-1/2 & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & s+1 & \\ s+1/2 & & s+1/2 \\ & s & \end{pmatrix}$$

- При использовании калибровочно инвариантного описания в безмассовом пределе получаем сумму безмассовых супермультиплетов

$$\begin{pmatrix} & s+1 & \\ s+1/2 & & s+1/2 \\ & s & \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{k=1}^{s} \begin{pmatrix} & k+1/2 & \\ k & & k' \\ & k-1/2 & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0, 0' \end{pmatrix}$$

- Ключевую роль играет дуальное смешивание тензорных и псевдотензорных полей (Зиновьев 2007)

Массивные супермультиплеты в 3D

- Для (1,0) суперсимметрии есть два типа массивных супермультиплетов

$$\begin{pmatrix} s+1/2 \\ s \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} s \\ s-1/2 \end{pmatrix}$$

- Такой супермультиплет имеет две бозонные и одну фермионную степени свободы
- Аналогом смешивания тензорных и псевдотензорных полей явилась возможность строить "длинные" безмассовые супермультиплеты

$$(s+1/2, s, s-1/2, s-1, \ldots, 2, 3/2, 1, 1/2, 0)$$

Взаимодействия безмассовых полей

- В реперном формализме возможные взаимодействия безмассовых полей ограничены кубическими вершинами. Все они известны.
- Есть примеры замкнутых теорий (типа Черна-Саймонса) содержащие конечное число полей с высшими спинами:

$$(2,3,4,\dots,N-1,N) \quad \Leftrightarrow \quad SL(N)$$

$$(2,4,6,\dots,2n-2,2n) \quad \Leftrightarrow \quad Sp(2n)$$

- Есть реализации не только суперсимметрии, но и гиперсимметрии и т.д. (Зиновьев 2014)

$$(2,4,5/2) \quad \Leftrightarrow \quad OSp(1,4)$$

$$(2,4,6,\dots,2n-2,2n,n+1/2) \quad \Leftrightarrow \quad OSp(1,2n)$$

Взаимодействие массивных полей с гравитацией

- В размерностях $d \geq 4$ включение стандартного минимального взаимодействия с гравитацией

$$e_\mu{}^a \Rightarrow e_\mu{}^a + h_\mu{}^a, \qquad \omega_\mu{}^{ab} \Rightarrow \omega_\mu{}^{ab} + \Omega_\mu{}^{ab}$$

  нарушает калибровочную инвариантность полей высших спинов

$$[D_\mu, D_\nu]\xi^a = R_{\mu\nu}{}^{ab}\xi^b$$

- Это требует введения неминимальных взаимодействий число производных в которых растет со спином (Фрадкин-Васильев)
- В трех измерениях тензор Вейля (бесследовая часть тензора кривизны) тождественно равен нулю и необходимость введения неминимальных членов не возникает даже для массивных полей произвольного целого или полуцелого спина

Взаимодействие массивных супермультиплетов с супергравитацией

- Лагранжевая формулировка массивных супермультиплетов инвариантная относительно глобальных суперпреобразований означает существование сохраняющегося супертока J
- При переходе от глобальных суперпреобразований к локальным первый шаг Неттеровской процедуры — включение минимального взаимодействия с гравитино

$$\mathcal{L}_{int} \sim gJ\Psi$$

- В размерностях $d \geq 4$ это также требует введения неминимальных взаимодействий с высшими производными
- В трех измерениях такой необходимости не возникает