О фазовой структуре вектор-матричной скалярной модели

В. Е. Рочев

2018 г.

Содержание

J. Phys. A: Math. Theor. 46, 185401 (2013)

ЯФ, 78, 443 (2015)

hep-th 1802.01903

Лагранжиан и $1/N$–разложение

Лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\partial_\mu \phi_a^* \partial_\mu \phi_a - m^2 \phi_a^* \phi_a - \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi_{ab})^2 + \frac{g}{\sqrt{N}} \phi_a^* \phi_b \chi_{ab} \qquad (1)$$

$(a, b = 1, \cdots, N)$.

$1/N$–разложение для вектор-матричных моделей:

G.'t Hooft, Nucl. Physics B 75 (1974) 461
А.А. Славнов, ТМФ 51 (1982) 307

Уравнения главного порядка $1/N$–разложения

Уравнение для пропагатора фиона $\Delta_{ab} = \delta_{ab}\Delta$:

$$\Delta^{-1}(p) = m^2 + p^2 - g^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \, D_c(p-q)\Delta(p), \tag{2}$$

Здесь $p \in E_4$ и $D_c = -1/\partial^2$.
Вершинная функция:

$$\Gamma_{ab,\,cc} \equiv \Gamma_{ab} = \delta_{ab}\Gamma,$$

где $\Gamma(p|k)$ есть решение уравнения

$$\Gamma(p|k) = \frac{g}{\sqrt{N}} + g^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \, D_c(p-q)\Delta(q)\Gamma(q|k)\Delta(q-k). \tag{3}$$

Перенормировка

Для перенормировки главного приближения нужно ввести три контрчлена δm^2 (перенормировка массы фиона), z (перенормировка поля фиона) and z_g (перенормировка заряда), Мы будем использовать нормировку в нуле

$$\Delta^{-1}(0) = m^2, \ \left.\frac{d\Delta^{-1}}{dp^2}\right|_{p^2=0} = 1. \tag{4}$$

(Далее Δ и m^2 – перенормированные величины.)
Перенормированное уравнение для пропагатора фиона:

$$\Delta^{-1}(p^2) = m^2 + p^2 + \Sigma_r(p^2), \tag{5}$$

где

$$\Sigma_r(p^2) = \Sigma(p^2) - \Sigma(0) - p^2\Sigma'(0), \ \Sigma(p^2) = -\bar{g}^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{\Delta(p)}{(p-q)^2},$$

Здесь

$$\bar{g} \equiv g z_g.$$

Перенормировка

Вершинная функция также нормируется при нулевых импульсах:

$$\Gamma(0|0) = \frac{g}{\sqrt{N}} = \frac{\bar{g}}{\sqrt{N}} + \bar{g}^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2} \Delta(q)\Gamma(q|0)\Delta(q), \tag{6}$$

и перенормированное уравнение для вершины есть

$$\Gamma(p|k) = \frac{g}{\sqrt{N}} + \tag{7}$$

$$+\bar{g}^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(p-q)^2} \Delta(q)\Gamma(q|k)\Delta(q-k) - \frac{1}{q^2} \Delta(q)\Gamma(q|0)\Delta(q) \right].$$

Пропагатор фиона

Интегральное уравнение для пропагатора фиона

$$\Delta^{-1}(p^2) = m^2 + (1-\lambda)p^2 + 2\lambda m^2 \int_0^{p^2} \Delta(q^2)\left(1 - \frac{q^2}{p^2}\right) dq^2. \qquad (8)$$

Здесь

$$\lambda \equiv \frac{\bar{g}^2}{32\pi^2 m^2}.$$

Это уравнение сводится к нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{(dp^2)^2}\left(p^2 \Delta^{-1}(p^2)\right) = 2(1-\lambda) + 2\lambda m^2 \Delta(p^2). \qquad (9)$$

Мы ищем положительные решения ($\Delta^{-1}(p) > 0$) в евклидовой области импульсов.
Отрицательные решения содержат сингулярности Ландау и физически неприемлемы.
Вводя безразмерную переменную $t = p^2/m^2$ и безразмерную функцию $y(t) = \frac{t}{m^2}\Delta^{-1}$ получаем уравнение

$$y\ddot{y} - 2(1-\lambda)y = 2\lambda t \tag{10}$$

с начальными условиями

$$y(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 1. \tag{11}$$

В зависимости от величины λ возможны три разных типа положительных решений.
1. Слабая связь: $\lambda < 1$. В этом случае положительное асимптотическое решение в области больших p^2 имеет вид

$$\Delta^{-1} = (1 - \lambda)p^2 + o(p^2). \tag{12}$$

В этой области пропагатор обладает асимптотически свободным поведением.

2. Критическая связь: $\lambda = 1$. Дифференциальное уравнение (10) при $\lambda = 1$

$$\ddot{y} = 2ty^{-1}, \tag{13}$$

является сингулярным уравнением Эмдена – Фаулера.
Для этого уравнения с данными начальными условиями доказана теорема существования и единственности:
Т.В. Лысова, Дифференциальные уравнения, 39 (2016) 857

Это дифференциальное уравнение имеет точное решение

$$y_{ex} = \sqrt{\frac{8}{3}}\, t^{3/2}, \tag{14}$$

которому соответствует пропагатор

$$\Delta_{ex} = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{3}{8p^2}}. \tag{15}$$

Δ_{ex} есть асимптотика решения уравнения для пропагатора при больших импульсах.

3. Сильная связь: $\lambda > 1$. В этом случае дифференциальное уравнение имеет положительное точное решение

$$y_0 = \frac{\lambda}{\lambda - 1} t, \tag{16}$$

и, соответственно, уравнение для Δ имеет решение

$$\Delta_0 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} \frac{1}{m^2}. \tag{17}$$

Δ_0 есть асимптотика решения при $p^2 \to \infty$:

$$\Delta(\infty) = \Delta_0. \tag{18}$$

Линеаризация

Приближенное аналитическое решение, применимое во всей евклидовой области импульсов, можно найти с помощью процедуры линеаризации:

$$y = y_0 + y_1, \; y\ddot{y} \approx y_0\ddot{y}_0 + y_0\ddot{y}_1 + \ddot{y}_0 y_1, \tag{19}$$

где на функции y_0 и y_1 накладываются следующие условия:
i) $y_1 = o(y_0)$ при $t \to \infty$, т.е. y_0 есть асимптотическое решение;
ii) При $t = 0$ выполняются начальные условия.
Решение линеаризованной задачи в области слабой связи имеет вид

$$\Delta^{-1}(p^2) = (1-\lambda)p^2 + \frac{1-3\lambda}{1-\lambda}m^2 + \tag{20}$$

$$+\frac{2\lambda}{(1-\lambda)^2}\,\frac{m^2}{p^2}\left(m^2 + (1-\lambda)p^2\right)\ln\frac{m^2+(1-\lambda)p^2}{m^2}.$$

Для критической связи $\lambda = 1$ решение линеаризованной задачи есть

$$\Delta^{-1}(p^2) = \sqrt{\frac{8m^2p^2}{3}} + m^2 F\left(1 + i\sqrt{2}, 1 - i\sqrt{2}; 3; -\sqrt{\frac{8p^2}{3m^2}}\right). \qquad (21)$$

(F – гипергеометрическая функция Гаусса.)

В области сильной связи $\lambda > 1$ линеаризованная задача имеет решение

$$\Delta^{-1}(p^2) = \frac{m^2}{\lambda - 1}\left[\lambda - \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m^2}{p^2}}\, J_1\left(2a\sqrt{\frac{p^2}{m^2}}\right)\right]. \qquad (22)$$

Здесь $a = (\lambda - 1)\sqrt{\frac{2}{\lambda}}$, J_1 – функция Бесселя.

Оболочечная (полостная) структура в x – пространстве

Пропагатор в x - пространстве:

$$\Delta^{-1}(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \Delta^{-1}(p) = \frac{\lambda m^2}{\lambda - 1} \delta^4(x) - \frac{m^2}{\pi^2 x_0^2} \delta(x^2 - x_0^2), \quad (23)$$

Здесь

$$x_0 = (\lambda - 1)\sqrt{\frac{8}{\lambda m^2}}$$

– “евклидов радиус” фиона.

Вершина при нулевой передаче

Уравнение для вершины при $k = 0$

$$\Gamma(p^2) \equiv \Gamma(p|0) = \frac{g}{\sqrt{N}} + 2\lambda m^2 \{ \frac{1}{p^2} \int_0^{p^2} q^2 dq^2 \Delta^2(q^2)\Gamma(q^2) - \tag{24}$$

$$- \int_0^{p^2} dq^2\, \Delta^2(q^2)\Gamma(q^2) \}$$

можно свести к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{d(p^2)^2} (p^2 \Gamma(p^2)) = -2\lambda m^2 \Delta^2(p^2)\Gamma(p^2) \tag{25}$$

с соответствующими начальными условиями.

Нормировка заряда и конечность z_g

Условие нормировки

$$\frac{g}{\sqrt{N}} = \frac{g z_g}{\sqrt{N}} + 2\lambda m^2 \int_0^\infty dq^2 \Delta^2(q^2)\Gamma(q^2). \tag{26}$$

Сходимость интеграла зависит от асимптотического поведения Δ и Γ при $p^2 \to \infty$, поэтому для решения этого вопроса можно аппроксимировать Δ асимптотикой.

Результаты:

1) при $\lambda < 1$ $\Gamma(p^2) \sim const$;

2) при $\lambda = 1$ $\Gamma(p^2) \sim \frac{1}{\sqrt{p^2}} \sin\left(\frac{\ln(p^2/m^2)}{\sqrt{2}}\right)$;

3) при $\lambda > 1$ $\Gamma(p^2) = \frac{gm}{a\sqrt{Np^2}} J_1(\frac{2a}{m}\sqrt{p^2})$ (точное решение с $\Delta = \Delta_0 = \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{m^2}$).

Во всех трех случаях интеграл сходится и z_g конечно.

Полостная структура вершины

В x-пространстве при $\lambda > 1$:

$$\Gamma(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-px} \Gamma(p^2) = \frac{g}{\sqrt{N} x_0^2} \delta(x^2 - x_0^2) \tag{27}$$

– та же оболочечная (полостная) структура, как и у пропагатора. Поскольку никакой линеаризации для вершины не было, то можно сделать вывод о том, что эта структура не является артефактом линеаризации, а связана с ультрафиолетовым поведением.

Неэрмитово взаимодействие

Весьма существенным моментом при построении решения в области сильной связи является наличие положительного точного решения

$$\Delta_0 = \frac{\lambda - 1}{\lambda}\frac{1}{m^2}.$$

Обращает на себя внимание тот факт, что это решение существует также и при $\lambda < 0$.

Такие значения λ соответствуют теории с неэрмитовым взаимодействием, в которой

$$g \to ig,\ g^2 \to -g^2.$$

Такого рода модели могут приводить к разумным физическим результатам и широко обсуждаются в узких кругах в последние годы (см. обзор:

C.M. Bender, J.Phys: Conf. Ser. 631, 012002 (2015)

Этот случай требует отдельного рассмотрения.

Критический заряд в кулоновском поле

Энергия нижнего уровня $1S_{1/2}$ в кулоновском поле точечного заряда Ze:

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \zeta^2}$$

где $\zeta = Z\alpha = Z/137$ – сингулярность при $Z = 137$.

A. Sommerfeld (1915)

P.A.M. Dirac (1928)

Причина: наличие в релятивистском уравнении члена, соответствующему потенциалу $1/r^2$ – “падение на центр”:

Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, “Квантовая механика”, $ 35.

Критический заряд в кулоновском поле

I. Pomeranchuk, J. Smorodinsky, J. of Phys. USSR, 9, 97 (1945)

Для ядра с конечным радиусом энергия нижнего дискретного уровня с возрастанием Z продолжает уменьшаться до тех пор, пока он не достигнет границы нижнего континуума решений уравнения Дирака при некотором критическом значении заряда $Z = Z_{cr}$. Если поместить электрон в поле сверхкритического ядра, то электрон исчезает и заряд вакуума уменьшается на заряд одного электрона – падение электрона на ядро.

Вычисление Z_{cr}:
В.С. Попов, ЖЭТФ, 59, 965 (1970): $Z_{cr} = 177$.

Критический заряд в кулоновском поле

С.С. Герштейн, Я.Б. Зельдович, ЖЭТФ, 57, 654 (1969)

При $Z > Z_{cr}$ возможно рождение e^+e^- - пар из вакуума, причем позитроны уходят на бесконечность, а остающиеся электроны экранируют заряд ядра, который уменьшается на две единицы, образуя сверхкритический атом.

Обзоры:
Я.Б. Зельдович, В.С. Попов, УФН, 105, 403 (1971)

W. Greiner, B. Muller, J. Rafelski, Quantum Electrodynamics of Strong Fields, Springer-Verlag (1985)

В.М. Кулешов и др., УФН, 185, 845 (2015) (новая интерпретация)

Пропагатор и потенциал

Потенциал U, соответствующий заданной функции распространения, определяется в нерелятивистском пределе путем сравнения борновского приближения нерелятивистской квантовой теории с низшим приближением релятивистской теории.

Г. Бете, Ф Моррисон, "Элементарная теория ядра", М., 1958

F. Gross, "Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory", N.Y., 1999

$$U(r) \sim -\frac{g^2}{m^2}\Phi(r),$$

где $r = |\mathbf{x}|$, а Φ есть отклик классического поля

$$\Phi(x) = \int dx_1 \Delta(x - x_1) J(x_1)$$

на статический источник

$$J(x) = \delta^3(\mathbf{x}).$$

Для свободного пропагатора $\Delta_c = 1/(m^2 - p^2)$ эти формулы дают потенциал Юкавы

$$U(r) \sim -\frac{g^2}{m^2}\frac{e^{-mr}}{r}$$

При критическом значении $\lambda = 1$ для пропагатора $\Delta_{ex} = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{3}{8p^2}}$ получим

$$U(r) \sim -\frac{1}{m}\frac{1}{r^2}.$$

Это потенциал “падения на центр”.

В области сильной связи $\lambda > 1$ пропагатор $\Delta_0 = \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{1}{m^2}$ дает

$$U(r) \sim -\frac{g^2}{m^4}\,\delta^3(\mathbf{x}).$$

Для пропагатора в линеаризованном приближении формула для статического источника может записана в виде

$$\Phi(r) = \frac{\lambda-1}{m^2}\frac{1}{2\pi r}\mathrm{R}e\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \xi d\xi \frac{e^{i\xi r}}{\lambda - \frac{m}{a\xi}J_1(\frac{2a}{m}\xi)}\right],$$

где контур интегрирования замыкает верхнюю полуплоскость $(a = (\lambda-1)\sqrt{\frac{2}{\lambda}})$.

Подынтегральное выражение имеет простой полюс в точке $\xi = i\omega$, где ω есть решение уравнения

$$\frac{\lambda a}{m}\omega = I_1(\frac{2a}{m}\omega)$$

Этот полюс дает вклад $\sim \frac{e^{-\omega r}}{r}$ в $\Phi(r)$, соответствующий юкавскому потенциалу притяжения.