

Приближенная формула для полного сечения в случае умеренно малой эйконоальной функции

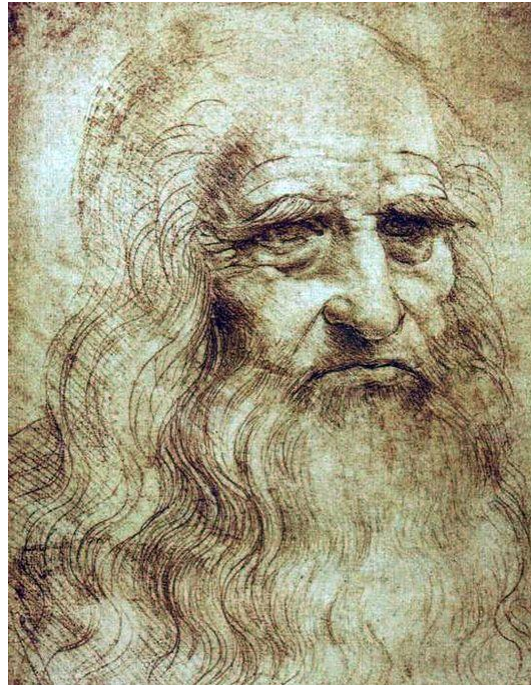
А.В. Киселев

**Институт физики высоких энергий
им. А.А. Логунова, НИЦ
«Курчатовский институт»**

**Статья принята к публикации:
ТМФ, т. 201, № 1 (октябрь, 2019)**

Семинар ОТФ, 10 сентября 2019 года

Никакой достоверности нет в науках там, где нельзя приложить ни одной из математических наук, и в том, что не имеет связи с математикой.



ОСНОВНАЯ ИДЕЯ РАБОТЫ: в эйкональном приближении вывести приближенную формулу для полного сечения, численно аппроксимирующую сечение с большой относительной точностью, в случае умеренно малой эйкональной функции.

План доклада

- Полное сечение в эйконоальном приближении. Представление его через борновскую амплитуду в виде ряда.
- Асимптотика эйконоальной функции при больших значениях прицельного параметра.
- Связь этой асимптотики с аналитическими свойствами борновской амплитуды. Две новых теоремы для преобразования Ханкеля.
- Проверка эффективности полученных формул. Численные оценки полного сечения.
- Заключение.

Полное сечение рассеяния в эйкональном приближении

Полное сечение (b – прицельный параметр)

$$\sigma_{\text{tot}}(s) = 4\pi \int_0^{\infty} db b \{1 - \exp[-\text{Im}\chi(s, b)] \cos[\text{Re}\chi(s, b)]\}$$

Эйкональная функция ($q^2 = -t$)

$$\chi(s, b) = \frac{1}{4\pi s} \int_0^{\infty} dq q J_0(qb) A_B(s, q)$$

Борновская амплитуда

$$A_B(s, q) = 4\pi s \int_0^{\infty} db b J_0(qb) \chi(s, b)$$

Преобразования
Ханкеля

The diagram consists of two orange arrows pointing in opposite directions between the eikonal function equation and the Born amplitude equation. These arrows converge towards an oval containing the text 'Преобразования Ханкеля' (Hankel transformations).

Умеренно малая эйкональная функция, $|\chi| \leq 0.1-0.2$

$$1 - e^{-\text{Im}\chi} \cos(\text{Re}\chi) = \text{Im}\chi + \frac{1}{2} [\text{Re}\chi^2 - \text{Im}\chi^2] - \frac{1}{6} \text{Im}\chi [3\text{Re}\chi^2 - \text{Im}\chi^2] + \dots$$



**Ряд для полного сечения
(основная формула)**

$$\sigma_{\text{tot}} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \dots,$$

где σ_n ($n=2,3,\dots$) выражаются через интегралы вида

$$F_n(a_1, \dots, a_n) = \int_0^\infty dx x \prod_{k=1}^n J_0(a_k x), \quad a_k > 0,$$

**Быстрые осцилляции
функций Бесселя**



**Плохая сходимость
интегралов ?!**

Имеют место формулы:

$$F_2(a, b) = \int_0^{\infty} dx x J_0(ax) J_0(bx) = \frac{1}{a} \delta(a - b)$$

$$F_3(a, b, c) = \int_0^{\infty} dx x J_0(ax) J_0(bx) J_0(cx)$$

$$F_3(a, b, c) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\Delta_3}, & \Delta_3^2 > 0, \\ 0, & \Delta_3^2 < 0, \end{cases}$$

$$16\Delta_3^2 = [c^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - c^2]$$

F_n ($n > 3$) выражаются через интегралы от алгебраических функций

(А.К. , ТМФ 188 (2016) 273)



Нет осциллирующих подынтегральных выражений

В частности, получаем:

борновская

$$\sigma_1(s) = \frac{\text{Im}A_B(s, 0)}{s}$$

$$\sigma_2(s) = \frac{1}{2^3\pi s^2} \int_0^\infty dq q \{ [\text{Re}A_B(s, q)]^2 - [\text{Im}A_B(s, q)]^2 \}$$

$$\sigma_3(s) = \frac{1}{2^5\pi^2 s^3} \prod_{i=1}^3 \int_0^\infty dq_i q_i F_3(q_1, q_2, q_3) \left[\frac{1}{3} \prod_{i=1}^3 \text{Im}A_B(s, q_i) - \text{Im}A_B(s, q_1) \prod_{i=2}^3 \text{Re}A_B(s, q_i) \right],$$

и т. д.

Эйкональная функция при больших значениях прицельного параметра

Для оценки эффективности выведенных формул
- ограничить класс борновских амплитуд



Требуем: борновская амплитуда должна приводить к правильной асимптотике эйкональной функции

Разложение амплитуды по парциальным волнам

$$A(s, t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) A_l(s) P_l(\cos \theta)$$

Последние имеют асимптотику

$$A_l(s) \Big|_{l, s \rightarrow \infty} = f(s) \exp(-2lm/\sqrt{s})$$

При малых углах рассеяния: $\theta = \frac{2q}{\sqrt{s}} = \frac{bq}{l}$

$$P_l(\cos \theta)|_{\theta \ll 1} = P_l\left(\cos \frac{bq}{l}\right)|_{l \gg 1}$$

Используем формулу $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[\nu^\mu P_\nu^{-\mu}\left(\cos \frac{x}{\nu}\right) \right] = J_\mu(x) \quad (x > 0)$

$$16\pi \sum_{l=l_0 \gg 1}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(\cos \theta) = 8\pi s \int_{b_0(s)}^{\infty} db b A(b, s) J_0(qb)$$

С другой стороны, $A(s, t) = 4\pi i s \int_0^{\infty} db b [1 - e^{i\chi(b, s)}] J_0(qb)$

 $|\chi(b, s)| \Big|_{\substack{s \gg m^2 \\ bm \gg 1}} = 2f(s) \exp(-bm)$

**Борновская амплитуда должна
давать такую асимптотику**

Аналитические свойства борновской амплитуды и асимптотика эйкональной функции

Ранее доказанные релевантные теоремы для преобразования Ханкеля нулевого порядка

(Frenzen & Wong , Math. Comp. 45 (1985) 537)

Теорема 1:

$$I_f(w) = \int_0^{\infty} x e^{-x^2} f(x^2) J_0(wx) dx$$

Пусть $f(z^2)$ – мероморфная функция в верхней полуплоскости с конечным числом полюсов в точках $a_1, \dots, a_n$, с условием роста

$$|f(z)| \leq M e^{\xi \operatorname{Re} z + \eta |\operatorname{Im} z|}, \quad M > 0, \eta \geq 0, \xi < 1$$

Тогда при $w \rightarrow \infty$ $I_f(w) = O(e^{-\delta w})$,

где $\delta = \min(\operatorname{Im} a_1, \dots, \operatorname{Im} a_k)$

Пример:

$$A_{\text{Born}}(s, t) = g(s) \frac{e^{ct}}{m^2 - t} \quad c > 0$$



$$\chi(b, s) \Big|_{bm \gg 1} = G(s) \sqrt{\frac{\pi}{2bm}} e^{-bm} \quad G(s) = g(s)/(4\pi s)$$

Теорема 2:

Пусть $f(z^2)$ – целая функция в верхней полуплоскости с тем же условием роста

Тогда при $\omega \rightarrow \infty$ $I_f(w) = O\left(e^{-w^2/\alpha}\right),$

где $\alpha = 1 - \xi + \eta^2/(1 - \xi)$

Две новые теоремы для преобразования Ханкеля нулевого порядка

(А.К. , ТМФ 201 (2019))

Теорема I:
$$J_g(w) = \int_0^{\infty} x g(x^2) J_0(wx) dx$$

Пусть $g(z^2)$ – мероморфная функция в верхней полуплоскости с конечным числом полюсов в точках $c_1, \dots, c_k$, с условием роста

$$|g(z)| = O(|z|^{-c}), \quad c > 1/4$$

для достаточно больших z

Тогда
$$J_g(w) = \pi i \sum_{i=1}^k \text{Res} \left[z g(z^2) H_0^{(1)}(wz); c_i \right]$$

где $H_\nu^{(1)}(z)$ - функция Ханкеля первого рода

Доказательно: $J_0(z) = \frac{1}{2} \left[H_0^{(1)}(z) - H_0^{(1)}(ze^{i\pi}) \right] .$

(Ватсон , Теория бесселевых функций, 1949)

→ $J_g(w) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} z g(z^2) H_0^{(1)}(wz) dz$



Следствие I: $J_g(w) = O(e^{-\gamma w}) , \quad w \rightarrow \infty ,$

где $\gamma = \min(\text{Im}c_1, \dots, \text{Im}c_k)$

Пример:

$$g(x^2) = \frac{1}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

 $J_g(w) = \frac{1}{n!} \left(\frac{w}{2a} \right)^n K_n(wa)$

Использована связь $H_\nu^{(1)}(ze^{i\pi/2}) = \frac{2}{\pi i} e^{i\nu\pi/2} K_\nu(z)$

где $K_\nu(z)$ - функция Макдональда

Теорема II:

Пусть $g(z^2)$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, имеющая там конечное число точек ветвления $a_1 + ib_1, \dots, a_k + ib_k$, с тем же условием роста

Тогда
$$J_g(w) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_{C_i} z g(z^2) H_0^{(1)}(wz) dz ,$$

где контур C_i огибает разрез с номером i по часовой стрелке

Следствие II:

$$g(z^2) = (z^2 - z_1^2)^{\alpha_1} \dots (z^2 - z_k^2)^{\alpha_k} f(z^2),$$

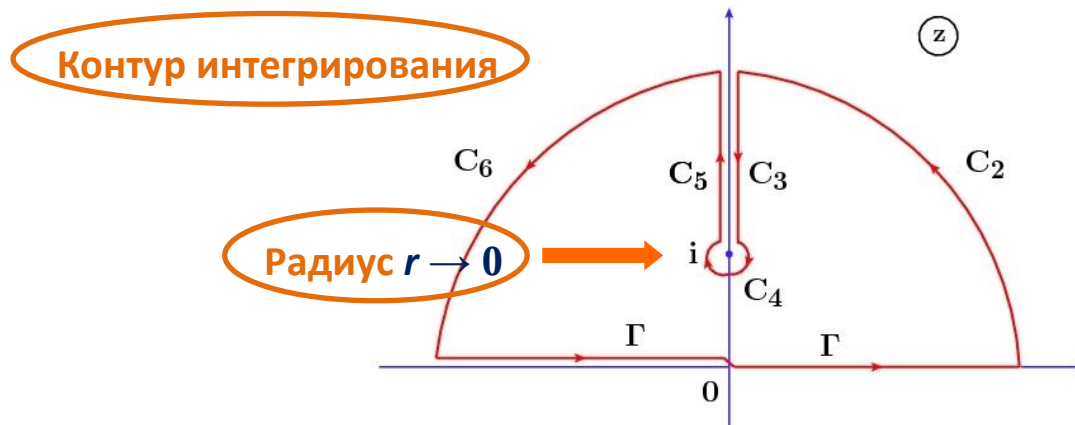
$$z_i = a_i + ib_i \quad \alpha_i > -1,$$

где $f(z^2)$ - голоморфная в верхней полуплоскости функция

→ $J_g(w) = O(e^{-\lambda w}), \quad w \rightarrow \infty, \quad \lambda = \min(b_1, \dots, b_k)$

Пример:

$$g(x^2) = \frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$$



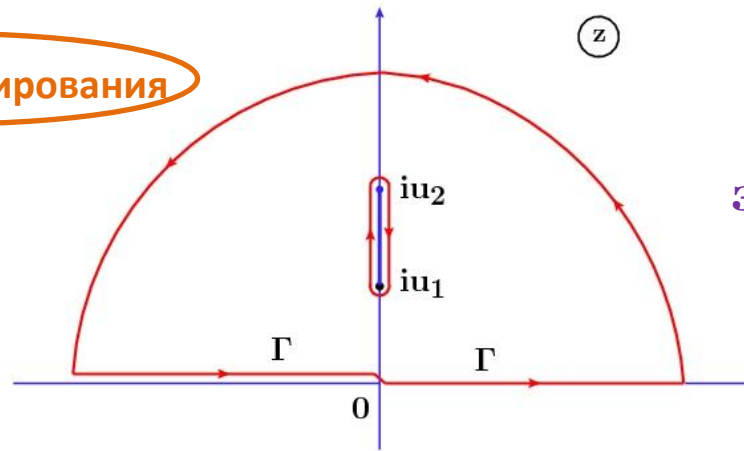
замена $z=iu$:
 $H_v^{(1)}(iu) \rightarrow K_v(u)$

→ $J_g(w) = \frac{2w}{\pi} \int_1^\infty \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} K_1(wu) du = e^{-w}$

Пример:

$$g(x^2) = \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2a^2x^2 + b^4}}, \quad 0 < b < a$$

Контур интегрирования



замена $z=iu$:

где $u_1 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$

→
$$J_g(w) = \frac{2}{\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{u}{\sqrt{(u_2^2 - u^2)(u^2 - u_1^2)}} K_0(wu) du$$

$$= I_0\left(\frac{w(u_2 - u_1)}{2}\right) K_0\left(\frac{w(u_2 + u_1)}{2}\right),$$

Численные оценки полного сечения

Чтобы иметь дело с безразмерными величинами, считаем, что переданный импульс $q = \sqrt{-t}$ и энергия $\sqrt{s}$ измерены в единицах массового параметра m_o , а прицельный параметр – в единицах $1/m_o$

1. Чисто мнимая борновская амплитуда

$$\operatorname{Re} A_B = 0, \quad \operatorname{Im} A_B = \frac{4\pi a s}{(1-t)^2}$$


$$\operatorname{Re} \chi(b) = 0, \quad \operatorname{Im} \chi(b) = \frac{a}{2} b K_1(b)$$

Эйконоальное полное сечение $\sigma_{\text{tot}} = 0.979627 \pi$

Вычисления по основной формуле:

$$\sigma_1 = 4\pi a, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{3} \pi a^2, \quad \sigma_3 = 0.0014746$$

Определим относительную ошибку: $\varepsilon^{(n)} = \frac{|\sigma_{\text{tot}} - \sum_{i=1}^n \sigma_i|}{\sigma_{\text{tot}}}$

Тогда $\varepsilon^{(2)} = 4.7 \times 10^{-4}$, $\varepsilon^{(3)} = 8.3 \times 10^{-6}$

2. Чисто действительная борновская амплитуда

$$\text{Re}A_B = \frac{\pi s}{(1-t)^2}, \quad \text{Im}A_B = 0.$$

→ $\text{Re}\chi(b) = bK_1(b)/8, \quad \text{Im}\chi(b) = 0$

$$\varepsilon^{(2)} = 1.7 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon^{(4)} = 5.0 \times 10^{-5} \quad (\sigma_1 = \sigma_3 = \dots = 0)$$

3. Мнимая и действительная части борновской амплитуды отличны от нуля и равны

$$\text{Re}A_B = \text{Im}A_B = \frac{\pi s}{(1-t)^2}$$

$$\varepsilon^{(1)} = 9.0 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon^{(3)} = 3.7 \times 10^{-5} \quad (\sigma_2 = 0)$$

4. Борновская амплитуда - целая функция переменной q

$$\operatorname{Re} A_B = 0, \quad \operatorname{Im} A_B = \pi s e^{t/2}.$$


$$\operatorname{Re} \chi(b) = 0, \quad \operatorname{Im} \chi(b) = \frac{1}{4} e^{-b^2/2}$$

Вспоминая, что прицельный параметр измерен в единицах $1/m_o$, имеем:

$$\operatorname{Im} \chi(b) = \frac{1}{4} e^{-(m_o b)^2/2}$$

*Поскольку m_o может зависеть от s ,
эйкональная функция в общем случае
не имеет факторизованного вида*

(m_o - не масса!)

$$\varepsilon^{(2)} = 3.5 \times 10^{-3}, \quad \varepsilon^{(3)} = 1.6 \times 10^{-4}$$

Заключение

- В рамках эйконоального приближения выведена формула для полного сечения для случая, когда эйконоальная функция χ является умеренно малой.
- Формула представляет собой ряд из многократных несобственных интегралов от борновской амплитуды A_B .
- Её преимущество в том, что указанные интегралы не содержат быстро осциллирующих функций Бесселя, что очень важно для численных оценок.
- Доказана две теоремы, позволяющие связать асимптотику χ с аналитическими свойствами A_B .
- Проверена эффективность полученной формулы для численных расчетов полного сечения.
- В качестве выражения для A_B выбирались те, которые приводят к правильной асимптотике χ при больших значениях прицельного параметра.



„Запомнилась последняя фраза“ — это Штирлиц вывел для себя, словно математическое доказательство.

ТАКИМ ОБРАЗОМ, если нам известна борновская амплитуда при некоторой фиксированной энергии как функция переданного импульса, полученная формула позволяет с высокой точностью численно рассчитать полное сечение при той же энергии.

Спасибо за внимание!



Back-up slides



***“Запоминается последняя фраза” —
это Штирлиц вывел для себя, словно
математическое доказательство.***

***ТАКИМ ОБРАЗОМ, если нам известна борновская
амплитуда при некоторой фиксированной энергии
как функция переданного импульса, полученная
формула позволяет с высокой точностью численно
рассчитать полное сечение при той же энергии.***

**С учетом интегрального представления
для функции Бесселя нулевого порядка:**

$$\int q dq \int b db J_0(bq) A_B(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \vec{q} A_B(s, q) \int d^2 \vec{b} \exp(i \vec{q} \vec{b})$$

