Зиновьев Ю.М., Хабаров М.В.

Массивные поля с высшими спинами в реперном мультиспинорном формализме

arXiv:1906.03438

"Massive higher spin fields in the frame-like multispinor formalism"

Мультиспинорный формализм и используемые обозначения

1. Локальный базис - e^a_μ, мировой индекс μ, локальный индекс a.
2. Поля - дифференциальные формы по мировым индексам
3. $\Phi^{a_1 a_2 \dots a_s} = \Phi^{a(s)}$
4. Локальный векторный индекс заменяется на пару спинорных ($d = 4$): $A^a \sim A^{\alpha\dot{\alpha}}$, $a = 1,2,3,4, \alpha, \dot{\alpha} = 1,2$
5. Тензор $\Phi^{a(k),b(m)} \sim Y(k,m) \sim \Phi^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} \bigoplus \Phi^{\alpha(k-m)\dot{\alpha}(k+m)}$
6. Спин-тензор $\Psi^{a(k),b(m)} \sim Y(k+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2})$ $\sim \Psi^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m)} \bigoplus \Psi^{\alpha(k-m)\dot{\alpha}(k+m+1)}$
7. $\left(\Psi^{\alpha(k)\dot{\alpha}(m)}\right)^\dagger \sim \Psi^{\alpha(m)\dot{\alpha}(k)}$
8. Базисные формы - $e^{\alpha\dot{\alpha}}$,$E^{\alpha(2)} + h.c.$,$E^{\alpha\dot{\alpha}}$,E
9. $D^2\Phi^{\alpha(k)\dot{\alpha}(m)} = -2k\lambda^2 E^\alpha{}_\beta \Phi^{\alpha(k-1)\beta\dot{\alpha}(m)} - 2m\lambda^2 E^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \Phi^{\alpha(k)\dot{\beta}\dot{\alpha}(m-1)}$

Безмассовый бозон со спином s: лагранжиан

1. Физическое поле $\Phi_\mu{}^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$
2. Вспомогательное поле $\Omega_\mu{}^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} + h.c.$
3. Лагранжиан $\mathcal{L} \sim -i(-1)^{s+1}\left[\Omega^2 + \Omega D\Phi\right]$
4. Калибровочные преобразования:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= D\xi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + (s-1)e^\alpha{}_{\dot\alpha}\eta^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)} + h.c. \\
\delta\Omega^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)} &= D\eta^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)} + s\lambda^2 e_\alpha{}^{\dot\alpha}\xi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} \\
&\quad + (s-2)e^\alpha{}_{\dot\alpha}\zeta^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)}
\end{aligned}$$

Безмассовый бозон со спином s: кривизны

1. Кручение $T \sim D\Phi \oplus e\Omega$ и кривизна $R \sim D\Omega \oplus e\Phi$
2. Кручение обобщается на произвольный спин
3. Кривизна теряет симметрию, параметризованную $\zeta^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)} + h.c.$
4. Восстановить инвариантность можно, добавив калибровочное экстраполе $\Sigma^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)}$
5. $R^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)} = D\Omega^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)} + s\lambda^2 e_\alpha{}^{\dot\alpha}\Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + (s-2)e^\alpha{}_{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)}$
6. $\delta\Sigma^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)} = D\zeta^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)} + (s+1)\lambda^2 e_\alpha{}^{\dot\alpha}\eta^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)} + (s-3)e^\alpha{}_{\dot\alpha}\zeta^{\alpha(s-4)\dot\alpha(s+2)}$

Безмассовый бозон со спином s: кривизны

1. Кривизна с производной экстраполя требует нового экстраполя
2. ...
3. Набор замыкается при s полях (без учета $h.c.$)
4. $$
\begin{aligned}
R^{\alpha(s+m-1)\dot\alpha(s-m-1)} &= D\Sigma^{\alpha(s+m-1)\dot\alpha(s-m-1)} \\
&+ (s-m-1)\lambda^2 e_\alpha{}^{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-m-2)} \\
&+ (s+m-1)e^\alpha{}_{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s+m-2)\dot\alpha(s-m)} \\
\delta\Sigma^{\alpha(s+m-1)\dot\alpha(s-m-1)} &= D\zeta^{\alpha(s+m-1)\dot\alpha(s-m-1)} \\
&+ (s-m-1)\lambda^2 e_\alpha{}^{\dot\alpha}\zeta^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-m-2)} \\
&+ (s+m-1)e^\alpha{}_{\dot\alpha}\zeta^{\alpha(s+m-2)\dot\alpha(s-m)}
\end{aligned}
$$
5. Экстраполя не входят в свободный лагранжиан, но появляются при введении взаимодействия
6. Лагранжиан удается выразить через все кривизны после введения полного набора экстраполей

Безмассовый бозон со спином s: кривизны

Выполняется следующее соотношение для кривизн:

$$DR^{\alpha(s+m-1)\dot{\alpha}(s-m-1)} = -(s-m-1)\lambda^2 e_\alpha{}^{\dot{\alpha}} R^{\alpha(s+m)\dot{\alpha}(s-m-2)}$$
$$-(s+m-1)e^\alpha{}_{\dot{\alpha}} R^{\alpha(s+m-2)\dot{\alpha}(s-m)}$$

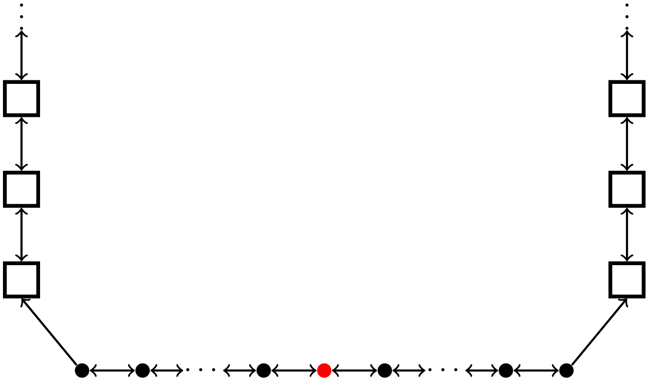
Безмассовый бозон со спином s: развернутые уравнения

1. Обнулим кручение $T^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} = 0$
2. Продифференцируем кручение: $e^{\alpha}{}_{\dot\alpha} R^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)} + h.c. = 0.$
3. Слагаемое с $\Sigma^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)}$ выпадает
4. Соответствие между оставшимися степенями свободы $R^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)}$ $\Sigma^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)}$ однозначное
5. Выбором $\Sigma^{\alpha(s-3)\dot\alpha(s+1)}$ можно обнулить $R^{\alpha(s-2)\dot\alpha(s)}$
6. ...

Безмассовый бозон со спином s: развернутые уравнения

1. Выбором поля $\Sigma^{\alpha(s-m-2)\dot{\alpha}(s+m)}$ обнуляется кривизна $R^{\alpha(s-m-1)\dot{\alpha}(s+m-1)}$
2. Каждое уравнение имеет вид $-(s-m-1)e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}\Sigma^{\alpha(s-m-2)\dot{\alpha}(s+m)} = D\Sigma^{\alpha(s-m-1)\dot{\alpha}(s+m-1)} + O(\lambda^2)$
3. n-е поле выражает n-ые производные физического, не обнуляющиеся на массовой поверхности
4. Для кривизны $R^{\alpha(2s-2)}$ полей не осталось
5. $e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}}R^{\alpha(2s-2)} \sim DR^{\alpha(2s-3)\dot{\alpha}} \oplus eR^{\alpha(2s-4)\dot{\alpha}(2)} = 0 \Leftrightarrow R^{\alpha(2s-2)} = E_{\alpha(2)}W^{\alpha(2s)}$
6. 0-форма $W^{\alpha(2s)}$ - аналог тензора Вейля
7. Продолжим параметризовать производные
8. $E_{\alpha(2)}DW^{\alpha(2s)} = 0 \Leftrightarrow DW^{\alpha(2s)} + e_{\alpha\dot{\alpha}}W^{\alpha(2s+1)\dot{\alpha}} = 0$
9. ...
10. $(2s+m)m\lambda^2 e^{\alpha\dot{\alpha}}W^{\alpha(2s+m-1)\dot{\alpha}(m-1)} + DW^{\alpha(2s+m)\dot{\alpha}(m)} + e_{\alpha\dot{\alpha}}W^{\alpha(2s+m+1)\dot{\alpha}(m+1)} = 0$

Безмассовый бозон со спином s: Полный набор полей



Массивные поля в реперном лагранжевом формализме

1. Лагранжиан строится как сумма безмассовых, с перекрестными и массовыми слагаемыми
2. Итоговый лагранжиан имеет те же симметрии, что и все безмассовые лагранжианы
3. Калибровочные преобразования также приобретают перекрестные слагаемые
4. Коэффициенты при перекрестных и массовых слагаемых однозначно определяются с точностью до двух параметров
5. В пределе $s \to +\infty$ описывает частицу с бесконечным числом степеней свободы (безмассовую или тахион)

Набор полей

Бозоны

1. Физические поля $\Phi_{\mu}{}^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(k-1)}$, $k \in \overline{2,s}$
2. Вспомогательные поля $\Omega_{\mu}{}^{\alpha(k)\dot{\alpha}(k-2)} + h.c.$, $k \in \overline{2,s}$
3. A_{μ}, $B^{\alpha(2)} + h.c.$ для компоненты со спином 1
4. ϕ, $\pi^{\alpha\dot{\alpha}}$ для компоненты со спином 0

Фермионы

1. Только физические поля $\Psi_{\mu}{}^{\alpha(k)\dot{\alpha}(k-1)} + h.c$, $k \in \overline{2,s}$
2. $\psi^{\alpha} + h.c.$ для компоненты со спином $\frac{1}{2}$

Лагранжианы

Бозоны

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$$

$$-i\mathcal{L}_0 \sim \sum_k (-1)^k \left[\Omega_k^2 + \Omega_k D\Phi_k\right]$$

$$-i\mathcal{L}_1 \sim \sum_k (-1)^k \mu_{k(-1)}\Omega_k \Phi_{k\pm1}$$

$$-i\mathcal{L}_2 \sim \sum_k (-1)^k \beta_k \Phi_k^2$$

Фермионы

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$$

$$\mathcal{L}_0 \sim \sum_k (-1)^k \left[\Psi_k D\Psi_k\right]$$

$$\mathcal{L}_1 \sim (-1)^k \left[\alpha_{k(+1)}\Psi_k \Psi_{k\pm1} + \beta_k \Psi_k^2\right]$$

Лагранжианы

$$\boxed{0} \overset{\mu_1}{\longleftrightarrow} \cdots \overset{\mu_{k-1}}{\longleftrightarrow} \boxed{k-1} \overset{\mu_k}{\longleftrightarrow} \boxed{k} \overset{\mu_{k+1}}{\longleftrightarrow} \cdots \overset{\mu_s}{\longleftrightarrow} \boxed{s}$$

$$\boxed{1/2} \underset{\alpha_1}{\longleftrightarrow} \cdots \underset{\alpha_{k-1}}{\longleftrightarrow} \boxed{k-1/2} \underset{\alpha_k}{\longleftrightarrow} \boxed{k+1/2} \underset{\alpha_{k+1}}{\longleftrightarrow} \cdots \underset{\alpha_s}{\longleftrightarrow} \boxed{s+1/2}$$

Калибровочные преобразования

Бозоны (кроме $k = 0, 1$)

Фермионы (кроме $k = 0$)

$$\delta\Phi^{\alpha(k)\dot{\alpha}(k)} = D\xi^{\alpha(k)\dot{\alpha}(k)} \oplus e\xi \oplus e\eta$$

$$\delta\Psi^{\alpha(k+1)\dot{\alpha}(k)} = D\eta^{\alpha(k+1)\dot{\alpha}(k)} \oplus e\eta$$

$$\delta\Omega^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(k+1)} = D\eta^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(k+1)}$$

$$\oplus\, e\xi \oplus e\eta \oplus e\zeta$$

Калибровочные преобразования

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{A^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m-1)}} & \\
\boxed{A^{\alpha(k+m-1)\dot{\alpha}(k-m-1)}} & \boxed{A^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}} \arrow[l, "\mu_{k+1}/\alpha_{k+1/2}"'] \arrow[u] \arrow[r, "\mu_k/\alpha_{k-1/2}"] \arrow[d] & \boxed{A^{\alpha(k+m+1)\dot{\alpha}(k-m+1)}} \\
 & \boxed{A^{\alpha(k+m-1)\dot{\alpha}(k-m+1)}} &
\end{tikzcd}
$$

Коэффициенты лагранжианов

1. Решение зависит от двух свободных параметров
2. В случае конечного спина - $s, M^2 \propto M_{flat}^2 \oplus \lambda^2$
3. В случае бесконечного спина - младшие коэффициенты в лагранжиане

Безмассовые и частично безмассовые пределы

$$\boxed{0} \xleftrightarrow{\mu_1} \cdots \xleftrightarrow{\mu_{k-1}} \boxed{k-1} \qquad \mu_k = 0 \qquad \boxed{k} \xleftrightarrow{\mu_{k+1}} \cdots \xleftrightarrow{\mu_s} \boxed{s}$$

$$\boxed{1/2} \xleftrightarrow[\alpha_1]{} \cdots \xleftrightarrow[\alpha_{k-1}]{} \boxed{k-1/2} \qquad \alpha_k = 0 \qquad \boxed{k+1/2} \xleftrightarrow[\alpha_{k+1}]{} \cdots \xleftrightarrow[\alpha_s]{} \boxed{s+1/2}$$

Эрмитовость лагранжианов

1. Условие унитарности - все коэффициенты действительны
2. В плоском пространстве и AdS при конечном спине $M^2 \geq 0$
3. В dS при конечном спине $M^2 \geq s(s-1)|\lambda^2|$ ($M^2 \geq s^2|\lambda^2|$); возможны частично безмассовые пределы $M^2 = (s+k-1)(s-k)|\lambda^2|$, унитарные в случае бозонов.
4. Бесконечный спин возможен только в AdS и плоском пространстве.
5. Частично безмассовые пределы при бесконечном спине могут быть унитарны как для бозонов, так и для фермионов.

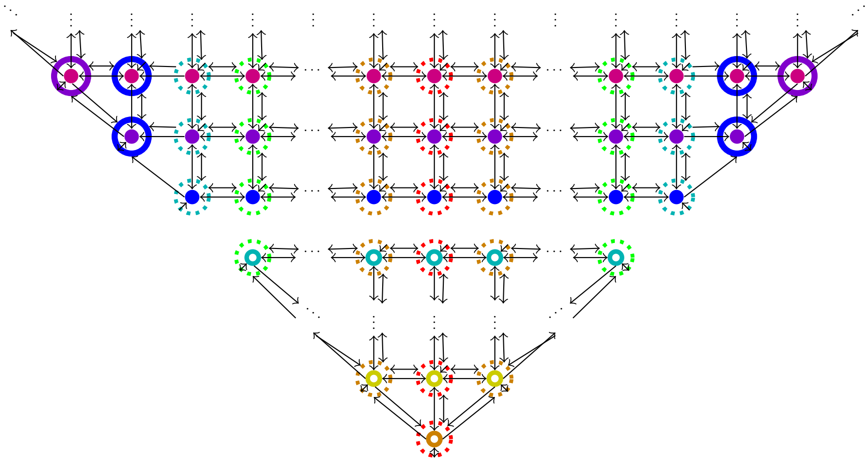
Кривизны: Полный набор полей

1. Все 1-формы $\Omega^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}, |m| \leq k \leq s-1$
2. Все 0-формы $W^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}, |m| \leq k \leq s-1$ (т.к. 0-формы присутствуют в лагранжиане)
3. Безмассовой компоненте со спином s соответствуют поля $\Omega^{\alpha(s-1+m)\dot{\alpha}(s-1-m)}, W^{\alpha(k\pm s)\dot{\alpha}(k\mp s)}$

Кривизны

$$R^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} = D\Omega^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} \oplus e\Omega^{\alpha(k+m\pm1)\dot{\alpha}(k-m\pm1)},$$
$$(0 \le m < k)$$
$$R^{\alpha(2k)} = D\Omega^{\alpha(2k)} \oplus e\Omega^{\alpha(2k\pm1)\dot{\alpha}} \oplus EW^{\alpha(2k\pm2)} \oplus EW^{\alpha(2k)}$$
$$C^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} = DW^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} - \Omega^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$$
$$\oplus\, eW^{\alpha(k+m\pm1)\dot{\alpha}(k-m\pm1)}$$

Кривизны



Выражение лагранжиана через кривизны

1. Лагранжиан квадратичен по кривизнам
2. Условие отсутствия экстраполей полностью определяет выражение (с точностью до нормировки)
3. Из-за соотношений для кривизн некоторые комбинации кривизн равны полной производной
4. Общий анзац может быть значительно упрощен
5. Коэффициенты содержат полюса при частично безмассовых пределах

Выражение лагранжиана через кривизны

$$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{m=0}^{k} (-1)^{k+1} a_{k,m} R^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} R_{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$$
$$+ \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{m=-k+1}^{k} (-1)^{k+1} e_{k,k} C^{\alpha(2k)} E^{\beta}{}_{\alpha} C_{\alpha(2k-1)\beta}$$
$$+ \sum_{k=0}^{s-2} \sum_{m=-k}^{k} (-1)^{k+1} f_{k,k} C^{\alpha(2k)} E^{\alpha(2)} C_{\alpha(2k+2)} + h.c.$$

Выражение лагранжиана через кривизны: частично безмассовый предел

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{L} = & -i\mathcal{L}^{(0,n-2)} \\
& + \sum_{k=n-1}^{s-1} \sum_{m=-n+1}^{n-1} (-1)^{k+1} a_{k,m} R^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} R_{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \\
& + \sum_{k=n}^{s-1} (-1)^{k+1} d_{k,n-1} \left[R^{\alpha(k+n-1)\dot\alpha(k-n+1)} e^{\beta}{}_{\dot\alpha} C_{\alpha(k+n-1)\beta\dot\alpha(k-n)} - h.c. \right] \\
& + \sum_{k=n}^{s-1} (-1)^{k+1} e_{k,n} \left[C^{\alpha(k+n)\dot\alpha(k-n)} E^{\beta}{}_{\alpha} C_{\alpha(k+n-1)\beta\dot\alpha(k-n)} - h.c. \right] \\
& + \sum_{k=n}^{s-1} (-1)^{k+1} e_{k,-n} \left[C^{\alpha(k+n)\dot\alpha(k-n)} E^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} C_{\alpha(k+n-1)\beta\dot\alpha(k-n)} - h.c. \right]
\end{aligned}
$$

Развернутые уравнения

1. Начальные уравнения имеют вид условий отсутствия кривизн
2. Необходимо ввести набор калибровочно-инвариантных 0-форм $W^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}$, $|m| \leq s < k$
3. Старшие кривизны параметризуются через младшие калибровочно-инвариантные 0-формы
4. Появляется бесконечная цепочка развернутых уравнений для калибровочно-инвариантных 0-форм

Развернутые уравнения

$$0 = R^{\alpha(2s-2)} - 2E_{\alpha(2)}W^{\alpha(2s)}$$
$$0 = C^{\alpha(s+m-1)\dot\alpha(s-m-1)} + e_{\alpha\dot\alpha}W^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-m)}$$

$$0 = DW^{\alpha(k+m)\dot\alpha(k-m)} \oplus eW^{\alpha(k+m\pm1)\dot\alpha(k-m\pm1)}$$

Связь с формализмом Васильева-Скворцова

1. Описание частично-безмассовых полей вида $\overline{n,s}$ с помощью 1-форм
2. Соответствует фиксации калибровки, обнуляющей 0-формы
3. 1-формы с $|m| \geq n-1$ становятся калибровочно-инвариантными и отцепляются
4. Набор кривизн сокращается до $R^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}, |m| < n-1$
5. В кривизнах $R^{\alpha(k+n-2)\dot{\alpha}(k-n+2)}$ отсутствует слагаемое с $\Omega^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n+1)}$ ($\hat{R}^{\alpha(k+n-2)\dot{\alpha}(k-n+2)} = R^{\alpha(k+n-2)\dot{\alpha}(k-n+2)} + (k-n+2)e_{\alpha}{}^{\dot{\alpha}} C^{\alpha(k+n-1)\dot{\alpha}(k-n+1)}$).

Связь с формализмом Васильева-Скворцова: лагранжиан

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{L} = {} & -i\mathcal{L}^{(0,n-2)} \\
& + \sum_{k=n-1}^{s-1} \sum_{m=-n+1}^{n-1} (-1)^{k+1} a_{k,m} R^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} R_{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)}
\end{aligned}
$$

Связь с формализмом Васильева-Скворцова: развернутые уравнения

$$0 = R^{\alpha(s+n-3)\dot{\alpha}(s-n+1)} - 2E_{\alpha(2)}W^{\alpha(s+n-1)\dot{\alpha}(s-n+1)}$$
$$0 = DW^{\alpha(k+m)\dot{\alpha}(k-m)} \oplus eW^{\alpha(k+m\pm1)\dot{\alpha}(k-m\pm1)}$$