# Кубические вершины для безмассовых полей с высшими спинами в 4-мерном пространстве Минковского

*По работе "Massless higher spin cubic vertices in flat four dimensional space" (Khabarov, Zinoviev, JHEP, 08 (2020), 112, arXiv:2005.09851)*

1. В теории высших спинов приходится работать с (спин-)тензорами со смешанной симметрией
2. $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ - векторный индекс может быть превращен в пару спинорных
3. (Спин-)тензоры со смешанной симметрией сводятся к полностью симметричным мультиспинорам:

$$\Phi^{a(k),b(l)} \to \Phi^{\alpha(k+l)\dot{\alpha}(k-l)} \oplus \Phi^{\alpha(k-l)\dot{\alpha}(k+l)}$$

$$\Psi^{a(k),b(l)} \to \Psi^{\alpha(k+l+1)\dot{\alpha}(k-l)} \oplus \Psi^{\alpha(k-l)\dot{\alpha}(k+l+1)}$$

4. Для действительного поля $(\Phi^{\alpha(k+l)\dot{\alpha}(k-l)})^{\dagger} = \Phi^{\alpha(k-l)\dot{\alpha}(k+l)}$

# Введение: пространство (A)dS и тетрадный формализм

1. Для описания гравитационного поля в тетрадном формализме используются репер $e_\mu{}^a \sim e_\mu{}^{\alpha\dot{\alpha}}$ и связность - $\omega_\mu{}^{[ab]} \sim \omega_\mu{}^{\alpha(2)} + h.c.$. Поля - дифференциальные формы по мировым индексам.
   Мы далее опускаем мировые индексы, а локальные индексы всегда записываем в мультиспинорном формализме, например:
   $$\Phi_{[\mu}{}^{a(s-1)} R_{\nu\lambda]}{}^{[bc]} \to \Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} R^{\beta(2)}$$
2. Уравнение для гравитационного поля с ненулевой космологической постоянной $\Lambda = -\lambda^2$:
   $$T^{\alpha\dot{\alpha}} = De^{\alpha\dot{\alpha}} = de^{\alpha\dot{\alpha}} + e_\beta{}^{\dot{\alpha}}\omega^{\alpha\beta} + e^\alpha{}_{\dot{\beta}}\omega^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0$$
   $$R^{\alpha(2)} = D\omega^{\alpha(2)} + \lambda^2 e^\alpha{}_{\dot{\alpha}} e^{\alpha\dot{\alpha}} = 0$$
   Его решение - пространство (A)dS.
   Здесь $\lambda$ имеет размерность массы.

# Введение: линеаризованная гравитация

1. Линеаризованная гравитация описывается малым возмущением фоновых репера и связности: $h^{\alpha\dot{\alpha}} = \delta e^{\alpha\dot{\alpha}}, \Omega^{\alpha(2)} = \delta\omega^{\alpha(2)}$
2. Лагранжиан имеет порядок 1 по производным:

$$\mathcal{L} \propto -2i(\Omega^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} E_{\dot{\gamma}\dot{\beta}} \Omega^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} + \Omega^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} e_{\beta\dot{\gamma}} Dh^{\beta}{}_{\dot{\alpha}} + \lambda^2 h^{\alpha\dot{\alpha}} E_{\alpha}{}^{\beta} h_{\beta\dot{\alpha}}) + h.c.$$

3. Лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований:

$$\begin{aligned} \delta h^{\alpha\dot{\alpha}} &= D\xi^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta}{}^{\dot{\alpha}} \eta^{\alpha\beta} + e^{\alpha}{}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \\ \delta\Omega^{\alpha(2)} &= D\eta^{\alpha(2)} + \lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}} \xi^{\alpha\dot{\alpha}} \end{aligned}$$

4. Линеаризованные уравнения для возмущения:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\dot{\alpha}} &= Dh^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta}{}^{\dot{\alpha}} \Omega^{\alpha\beta} + e^{\alpha}{}_{\dot{\beta}} \Omega^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \\ R^{\alpha(2)} &= D\Omega^{\alpha(2)} + \lambda^2 e^{\alpha}{}_{\dot{\alpha}} h^{\alpha\dot{\alpha}} = -E_{\alpha(2)} W^{\alpha(4)} \end{aligned}$$

5. При $\lambda \neq 0$ лагранжиан может быть выражен через тензор Римана:

$$\mathcal{L} \propto \frac{1}{\lambda^2} R^{\alpha(2)} R_{\alpha(2)} + h.c.$$

## Введение: реперный формализм

1. Для описания безмассового бозона со спином $s$ используются физическое поле $\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}$ и вспомогательное поле $\Omega^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-2)}$
Они являются калибровочными 1-формами.
2. Лагранжиан имеет вид:
$$\mathcal{L} \propto \Omega^2 + \Omega D\Phi + \lambda^2\Phi^2$$
3. Для замкнутого набора калибровочно-инвариантных объектов необходимо также $s-2$ калибровочных экстраполя $\Sigma^{\alpha(s-1+m)\dot{\alpha}(s-1-m)}$:

$$\begin{aligned}
R^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} &= D\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} + e_\beta{}^{\dot{\alpha}}\Omega^{\alpha(s-1)\beta\dot{\alpha}(s-2)} + e^\alpha{}_{\dot{\beta}}\Omega^{\alpha(s-2)\dot{\beta}\dot{\alpha}(s-1)} \\
R^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-2)} &= D\Omega^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-2)} + e_\beta{}^{\dot{\alpha}}\Sigma^{\alpha(s)\beta\dot{\alpha}(s-3)} + \lambda^2 e^\alpha{}_{\dot{\beta}}\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\beta}\dot{\alpha}(s-2)} \\
&\vdots \\
R^{\alpha(2s-2)} &= D\Sigma^{\alpha(2s-2)} + \lambda^2 e^\alpha{}_{\dot{\beta}}\Sigma^{\alpha(2s-3)\dot{\beta}}
\end{aligned}$$

# Введение: реперный формализм

1. Условия массовой поверхности имеют вид:

$$
\begin{aligned}
R^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= 0 \\
R^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} &= 0 \\
&\vdots \\
R^{\alpha(2s-3)\dot\alpha} &= 0 \\
R^{\alpha(2s-2)} &= -E_{\alpha(2)} W^{\alpha(2s)}
\end{aligned}
$$

2. Т.е. на массовой поверхности $\Sigma^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} \sim D^m \Phi^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$
3. При $\lambda \neq 0$ лагранжиан выражается через кривизны:

$$\mathcal{L} = (i)^{2s-1} \sum_{m>0} \frac{c_m}{\lambda^{2m}} R^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} R_{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} + h.c.$$

Коэффициенты $c_m$ с точностью до нормировки определяются требованием отсутствия в лагранжиане экстраполей - $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Sigma} \equiv 0$

# Классификация вершин ($d > 4$)

Рассмотрим три частицы со спинами $s_1 \geq s_2 \geq s_3$. Общая классификация вершин в пространстве Минковского, $d > 4$:

| Название | Число производных | Алгебра калибровочных преобразований | Выражение |
|---|---|---|---|
| Неабелевы | $N_{min} = s_1 + s_2 - s_3$ $(BBB)$<br>$N_{min} = s_1 + s_2 - s_3 - 1$ $(BFF)$ | Изменяется | $R\Phi\Phi$ |
| Абелевы | $N_{min}+2, N_{min}+4, \ldots, N_{max}-2$ | Сохраняется, но изменяются сами преобразования | $RR\Phi$ |
| Тривиально к.-инв. | $N_{max} = s_1 + s_2 + s_3$ | Сохраняется | $RRR$ |

# Классификация вершин (d=4)

В пространстве Минковского, $d = 4$, вершин всего две для заданных $s_1, s_2, s_3$:

1. Тривиально калибровочно-инвариантная, с числом производных $s = s_1 + s_2 + s_3$. Для описания требует 0-формы (производные обобщенного тензора Вейля)
2. Неабелева - число производных $N_{min} = s = s_1 + s_2 - s_3$ ($N_{min} = s - 1$ для BFF). При выполнении строгого неравенства треугольника $s_1 < s_2 + s_3$ может быть описана без использования 0-форм.

Данная классификация получена в light-cone формализме. Мы рассматриваем три безмассовые частицы со спинами $s_1 \geq s_2 \geq s_3$, удовлетворяющие строгому неравенству треугольника $s_1 < s_2 + s_3$, и строим для них неабелеву вершину (т.е. в точности те, для которых не требуются 0-формы)

# Конструктивный подход к построению взаимодействия

*Конструктивный* подход (в метрическом формализме) основан на идее разложить лагранжиан и калибровочные преобразования по степеням полей и строить поправки порядок за порядком:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(3)} + \dots$$
$$\delta\Phi = \delta^{(0)}\Phi + \delta^{(1)}\Phi + \dots$$

Поправки в каждом порядке должны удовлетворять требованию калибровочной инвариантности:

$$\begin{aligned} \delta^{(0)}\mathcal{L}^{(2)} &= 0 \\ \delta^{(1)}\mathcal{L}^{(2)} + \delta^{(0)}\mathcal{L}^{(3)} &= 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Второе решение соответствует кубическому приближению. Его решение выполняется в два шага:

1. Строится вершина $\mathcal{L}^{(3)}$ такая, что $\delta^{(0)}\mathcal{L}^{(3)} = 0$ на уравнениях движения свободной частицы
2. Строятся поправки к калибровочным преобразованиям $\delta^{(1)}\phi$, удовлетворяющие второму уравнению

# Подход Фрадкина-Васильева

Подход Фрадкина-Васильева - аналог конструктивного подхода для реперного формализма.
Поскольку экстраполя не входят в свободный лагранжиан, в реперном формализме вместо следующих из лагранжиана уравнений движения необходимо использовать понятие *массовой поверхности*. Условия массовой поверхности выражаются через кривизны, а потому построение кубического приближения начинается с деформации кривизн. Деформация выполняется независимо для каждой частицы.

1. Наиболее общая квадратичная деформация кривизн $\Delta R^A = g^{ABC}\Phi^B\Phi^C$ (ср. с $G^a = dA^a + igf^{abc}A^bA^c$ в теории Янга-Миллса).
2. Деформация кривизн определяет деформацию калибровочных преобразований $\Delta(\delta\Phi)^A = g^{BAC}\eta^B\Phi^C$ (ср. с $\delta A^a = d\xi^a + igf^{bac}\xi^bA^c$ в теории Янга-Миллса)
3. Требование ковариантности деформированных кривизн $\delta R^A = g^{BAC}\eta^B R^C$ (ср. с $\delta G^a = igf^{bac}\xi^bG^c$ в теории Янга-Миллса) определяет $g^{ABC}$ однозначно с точностью до общего множителя.

## Подход Фрадкина-Васильева: лагранжиан

1. Деформированные кривизны подставляются в лагранжиан $\mathcal{L} \propto R^A R_A$ вместо линеаризованных (ср. с $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(G_a G^a)$ в теории Янга-Миллса).
2. Требование калибровочной инвариантности лагранжиана на массовой поверхности связывает коэффициенты $g^{ABC}$ для разных частиц, оставляя один общий множитель $g$:
$$\delta\mathcal{L} = R^A \delta R_A = g^{ABC} \eta^A R^B R^C$$
(ср. с $\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2} f^{abc} \xi^a G^b G^c = 0$ в теории Янга-Миллса) Здесь $R^A$ - только старшие кривизны $R^{\alpha(2s-2)}$.
3. Кубическая имеет вид:
$$\Delta\mathcal{L} = R^A \Delta R_A = g^{ABC} R^A \Phi^B \Phi^C$$
Ее форма характерна для неабелевых вершин.

# Переход к плоскому пределу

Поскольку константы связи определяются единственным размерным параметром $g$, то степень $\lambda$ определяется числом производных $N$. Обозначим за $g_{flat}$ константу при слагаемых с правильным числом производных, т.е. $N_{min}$, и разложим лагранжиан по степеням $\lambda$:

$$\Delta\mathcal{L} = \underbrace{\sum_{N>N_{min}} \frac{g_{flat}}{\lambda^{|N_{min}-N|}}\mathcal{L}^{(N)}}_{\approx D(\ldots)} + g_{flat}\mathcal{L}^{(N_{min})} + \underbrace{g_{flat}\sum_{N_{min}<N} \lambda^{|N-N_{min}|}\mathcal{L}^{(N)}}_{\to 0}$$

У сингулярных при $\lambda \to 0$ слагаемых $N \in \overline{N_{min}+2, s_1+s_2+s_3-2}$ - т.е. это абелевы вершины, отсутствующие в плоском 4-мерном пространстве. С учетом условий массовой поверхности они собираются в полную производную.
Т.е. предельный переход $\lambda \to 0$ хорошо определен и позволяет получить плоскую вершину.

# Плоский предел

Используя условия массовой поверхности, удается привести вершину к очень простому виду при невырожденном младшем спине $s_1 \geq s_2 > s_3$:

$$\mathcal{L} \propto g_{flat} \Sigma^{\alpha(\hat{s}_{\mathbf{2}})\dot{\alpha}(\hat{s}_{\mathbf{3}})} \Sigma^{\alpha(\hat{s}_{\mathbf{1}})}{}_{\dot{\alpha}(\hat{s}_{\mathbf{3}})} R_{\alpha(2s_{\mathbf{3}}-2)} + h.c. + [1 \leftrightarrow 2, \text{ если } s_1 = s_2]$$

Здесь $\hat{s}_i = s_1 + s_2 + s_3 - 2s_i - 1$. Младший спин входит в данную вершину в виде калибровочно-инвариантного объекта. При $s_1 \geq s_2 = s_3$ также появляются *алгебраические* слагаемые вида $e\Phi\Phi$.

# Планы на будущее

1. Построить кубическую вершину для безмассовых супермультиплетов с суперспинами $S_1, S_2, S_3 > 1$
2. Построить кубическую вершину взаимодействия массивных полей с высшими спинами с гравитацией