

Эффекты высших поправок теории возмущений в КХД и их теоретические и феноменологические следствия

Молокоедов В. С.

ИЯИ РАН, МФТИ

ИФВЭ, Протвино

27 октября 2020

По материалам кандидатской диссертации

Доклад выполнен на основе работ, опубликованных в Phys. Rev. D92 (2015) no.5; Eur. Phys. J. Plus 131 (2016) no.8; JETP Lett. 108 (2018) no.12; Theor. Math. Phys. 200 (2019) no.3 (Kataev A.L. and Molokoedov V.S.), JHEP 1802 (2018) (Garkusha A.V., Kataev A.L., Molokoedov V.S.)

- Выявление характерных особенностей в зависимости результатов аналитических расчётов теории возмущений в КХД для функции Адлера и $R(s)$ -отношения e^+e^- аннигиляции в адроны, правила сумм Бьёркена процесса глубококонепругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах в порядке $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ от выбора схем перенормировок (на примере калибровочно-инвариантной V-схемы, связанной с видом статического кулоновского потенциала КХД, а также калибровочно-неинвариантной схемы импульсных вычитаний mMOM с учётом явной зависимости от калибровочного параметра ξ)
- Изучение статуса обобщённого соотношения Крютера, связывающего произведение рядов теории возмущений для функции Адлера и Бьёркена с константным членом (пропорциональным амплитуде распада $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$) и конформно-нарушающим вкладом, в котором, начиная с $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ уровня, факторизуется $\beta(\alpha_s)$ -функция в калибровочно-инвариантных (отличных от $\overline{\text{MS}}$) и в калибровочно-неинвариантных схемах перенормировок по крайней мере в $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ приближении
- Исследование асимптотического поведения рядов теории возмущений для соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков в КХД (в первую очередь для b и t -кварков)

- Функция Адлера и $R(s)$ -отношение e^+e^- аннигиляции в адроны, функция Бёркена процесса глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах
- Эффективная V -схема
- Рассмотрение mMOM-схемы импульсных вычитаний
- Схемная и калибровочная зависимость рядов теории возмущений исследуемых функций в 4-ом порядке
- КЭД предел
- Схемная и калибровочная зависимость обобщённого соотношения Крютера
- Условия наличия факторизации $\beta(a_s)$ -функции в обобщённом соотношении Крютера
- Исследование асимптотической структуры соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков
- Заключение
- Краткий список используемой литературы

Функция Адлера однофотонной e^+e^- аннигиляции в адроны

Коррелятор векторных адронных токов $j_\mu = \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_f$ равен

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T j_\mu(x) j_\nu(0) | 0 \rangle = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi(q^2).$$

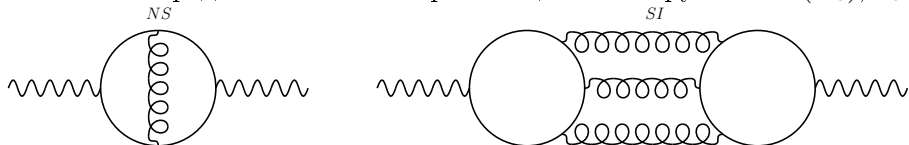
Функция Адлера $D(Q^2)$ определяется в евклидовой области с $Q^2 = -q^2 > 0$

$$D(Q^2) = -12\pi^2 Q^2 \frac{d\Pi(Q^2)}{dQ^2}.$$

В рамках теории возмущений в безмассовой КХД функция Адлера имеет следующий вид:

$$D(a_s) = d_R \left(\sum_f Q_f^2 D^{NS}(a_s) + \left(\sum_f Q_f \right)^2 D^{SI}(a_s) \right),$$

где NS и SI — несинглетные и синглетные вклады в $D(a_s(Q^2))$; d_R — размерность фундаментального представления алгебры Ли цветовой группы $SU(N_c)$, $a_s = \alpha_s/\pi$.



Ряд ТВ для функции Адлера в $\overline{\text{MS}}$ -схеме

Несинглетный вклад:

$$D^{NS}(a_s(Q^2)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{NS} a_s^k(Q^2),$$

$$d_1^{NS} = \frac{3}{4} C_F \quad (73),$$

$$d_2^{NS} = -\frac{3}{32} C_F^2 + \left(\frac{123}{32} - \frac{11}{4} \zeta_3 \right) C_F C_A + \left(-\frac{11}{8} + \zeta_3 \right) C_F T_F n_f \quad (79), \quad \dots$$

Синглетный вклад:

$$D^{SI}(a_s(Q^2)) = \sum_{k=3}^{\infty} d_k^{SI} a_s^k(Q^2),$$

$$d_3^{SI} = \left(\frac{11}{192} - \frac{\zeta_3}{8} \right) \frac{d^{abc} d^{abc}}{d_R} \quad (91), \quad \left(\frac{d^{abc} d^{abc}}{d_R} = \frac{(N_c^2 - 4)(N_c^2 - 1)}{N_c^2} \right), \quad \dots$$

Здесь n_f — количество активных ароматов кварков, $\zeta_n = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-n}$, индекс Дынкина $T_F = 1/2$ для группы $SU(N_c)$, C_F и C_A — квадратичный оператор Казимира в фундаментальном и присоединённом представлении:

$$C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}, \quad C_A = N_c.$$

Известные на сегодняшний момент времени поправки более высоких порядков (3 (91) и 4 (08, 10) для NS и 4 (12) для SI вклада) имеют более громоздкий вид. В $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении NS-поправки содержат вклады типа рассеяния света на свете, пропорциональные структурам $d_F^{abcd} d_F^{abcd}$, $d_F^{abcd} d_A^{abcd}$, где $d_F^{abcd} = \text{Tr}(T^a T^b T^c T^d)/6$, а $d_A^{abcd} = \text{Tr}(C^a C^b C^c C^d)/6$.

$R(s)$ -отношение e^+e^- аннигиляции в адроны

$R(s)$ -отношение определяется во времениподобной минковской области энергий $s > 0$:

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow hadrons)}{\sigma_{Born}(e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 12\pi \operatorname{Im} \Pi(s + i\varepsilon).$$

Пользуясь аналитичностью функции $\Pi(q^2)$, можно получить следующее дисперсионное соотношение между функцией Адлера и $R(s)$ -отношением:

$$D(Q^2) = Q^2 \int_0^\infty ds \frac{R(s)}{(s + Q^2)^2}.$$

Учтя бег константы связи

$$\beta(a_s) = \mu^2 \frac{\partial a_s}{\partial \mu^2} = - \sum_{i \geq 0} \beta_i a_s^{i+2},$$

находим следующую связь этих функций:

$$R(s) = D(s) - \frac{\pi^2}{3} d_1 \beta_0^2 a_s^3(s) - \pi^2 \left(d_2 \beta_0^2 + \frac{5}{6} d_1 \beta_1 \beta_0 \right) a_s^4(s) + \mathcal{O}(a_s^5),$$

с характерными π^2 эффектами аналитического продолжения.

Правило сумм Бьёркена процесса глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах

Адронный тензор $W_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
 W_{\mu\nu}(p, q, s) &= \frac{1}{4\pi} \int d^4z e^{iqz} \langle p, s | [j_\mu(z), j_\nu(0)] | p, s \rangle \\
 &= \left(\frac{q_\mu q_\nu}{q^2} - g_{\mu\nu} \right) F_1(x, Q^2) + \frac{1}{(pq)} \left(p_\mu - \frac{(pq)}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{(pq)}{q^2} q_\nu \right) F_2(x, Q^2) \\
 &- i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{p_\lambda q_\rho}{2(pq)} F_3(x, Q^2) + i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{q^\lambda}{(pq)} \left(s^\rho g_1(x, Q^2) + \left(s^\rho - \frac{(sq)}{(pq)} p^\rho \right) g_2(x, Q^2) \right) + \dots
 \end{aligned}$$

Структурная функция $g_1(x, Q^2)$ входит в правило сумм Бьёркена:

$$\int_0^1 \left(g_1^{lp}(x, Q^2) - g_1^{ln}(x, Q^2) \right) dx = \frac{1}{6} \left| \frac{g_A}{g_V} \right| C_{Bjp}(a_s(Q^2)),$$

где $0 \leq x = Q^2/(2pq) \leq 1$ — бьёркеновская переменная, константа

$g_A/g_V = -1.2723 \pm 0.0023$ определяется из процесса β -распада нейтрона. Функция Бьёркена $C_{Bjp}(a_s(Q^2))$ может быть вычислена из рассмотрения T -произведения токов

$$T_{\mu\nu}^{ab}(q) = i \int d^4z e^{iqz} T V_\mu^a(z) V_\nu^b(0) \Big|_{q^2 \rightarrow \infty} \simeq C_{\mu\nu\lambda}^{abc}(q) A_\lambda^c(0) + \dots,$$

$$V_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu T^a \psi, \quad A_\mu^a = \bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 T^a \psi, \quad C_{\mu\nu\lambda}^{abc}(q) = i d^{abc} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \frac{q^\rho}{q^2} C_{Bjp}(a_s(Q^2)).$$

Как и функция Адлера, функция Бьёркена содержит несинглетные и синглетные вклады:

$$C_{Bjp}(a_s(Q^2)) = C_{Bjp}^{NS}(a_s(Q^2)) + d_R \sum_f Q_f C_{Bjp}^{SI}(a_s(Q^2)),$$

$$C_{Bjp}^{NS}(a_s(Q^2)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{NS} a_s^k(Q^2),$$

$$c_1^{NS} = -\frac{3}{4}C_F \quad (79),$$

$$c_2^{NS} = \frac{21}{32}C_F^2 - \frac{23}{16}C_F C_A + \frac{1}{2}C_F T_F n_f \quad (86), \quad c_3^{NS} = \dots \quad (91), \quad c_4^{NS} = \dots \quad (10),$$

$$C_{Bjp}^{SI}(a_s(Q^2)) = \frac{1}{9}\beta_0 d^{abc} d^{abc} a_s^4 + \mathcal{O}(a_s^5) \quad (13, 15),$$

где $\beta_0 = 11C_A/12 - T_F n_f/3$ – первый схемно-независимый коэффициент ренормгрупповой β -функции КХД.

Статический кулоновский потенциал КХД. К вопросу исследования эффективной V-схемы

$$V(r) = \int \frac{d^3 \vec{q}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{q}\vec{r}} V(\vec{q}^2),$$

$$V(\vec{q}^2) = -\frac{4\pi C_F \alpha_s(\vec{q}^2)}{\vec{q}^2} \left(1 + a_1 a_s(\vec{q}^2) + a_2 a_s^2(\vec{q}^2) + a_3 a_s^3(\vec{q}^2) \right),$$

$$a_1 = \frac{31}{36} C_A - \frac{5}{9} T_F n_f \quad (77; 80),$$

$$a_2 = \left(\frac{4343}{2592} + \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^4}{64} + \frac{11}{24} \zeta_3 \right) C_A^2 - \left(\frac{899}{648} + \frac{7}{6} \zeta_3 \right) C_A T_F n_f - \left(\frac{55}{48} - \zeta_3 \right) C_F T_F n_f + \left(\frac{5}{9} T_F n_f \right)^2 \quad (97; 99),$$

$$a_3 = a_3^{(3)} n_f^3 + a_3^{(2)} n_f^2 + a_3^{(1)} n_f + a_3^{(0)} \quad (08; 16).$$

Коэффициенты $a_3^{(1)}$ и $a_3^{(0)}$ помимо ζ -функций и степеней π^2 содержат более сложные трансцендентные члены типа $\pi^2 \text{Li}_4(1/2)$ ($\text{Li}_n(x)$ – полилогарифмическая функция) и $\zeta_{-5,-1}$. Кратное значение дзета-функции $\zeta_{-5,-1}$ выражается через следующее интегральное представление:

$$\zeta_{-5,-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^5} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(-1)^i}{i} = \frac{15}{16} \zeta_5 \ln 2 - \zeta_6 + \int_0^1 dx \frac{\text{Li}_5(x)}{x+1}.$$

Осуществляя переход к случаю $U(1)$ группы, можно убедиться в справедливости соотношения:

$$V_{QED}(\vec{q}^2) = -\frac{4\pi}{\vec{q}^2} \frac{\alpha(\mu^2)}{1 + \Pi_{QED}(\vec{q}^2/\mu^2, \alpha)} \left(1 + N \cdot C \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots \right), \quad (*)$$

где N – количество заряженных лептонов, C – поправка, связанная с появлением диаграмм типа рассеяния света на свете.

$$C = \frac{5}{96} \pi^6 - \pi^4 \left(\frac{23}{24} - \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln^2 2}{2} \right) + \pi^2 \left(\frac{79}{36} - \frac{61}{12} \zeta_3 + \ln 2 + \frac{21}{2} \zeta_3 \ln 2 \right) \approx -0.888062.$$

В рамках V-схемы все высшие поправки ТВ к статическому потенциалу КХД включаются в определение эффективной константы связи $\alpha_{s,V}$ и её масштаба таким образом, что потенциал приобретает кулоновский вид:

$$V(\vec{q}^2) = -4\pi C_F \frac{\alpha_{s,V}(\vec{q}^2)}{\vec{q}^2},$$

$$\alpha_{s,V}(\vec{q}^2) = \alpha_s(\mu^2) \sum_{n=0}^3 P_n(L) \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \right)^n,$$

$$P_0 = 1, \quad P_1 = a_1 + \beta_0 L, \quad P_2 = a_2 + (2a_1\beta_0 + \beta_1)L + \beta_0^2 L^2,$$

$$P_3 = a_3 + (3a_2\beta_0 + 2a_1\beta_1 + \beta_2)L + (3a_1\beta_0^2 + 5\beta_0\beta_1/2)L^2 + \beta_0^3 L^3,$$

$$\text{где } L = \ln(\mu^2/\vec{q}^2).$$

Следуя методу эффективных зарядов и определяя $\mu_V^2 = \mu^2 \exp(a_1/\beta_0)$, получаем:

$$\alpha_{s,V}(\mu_V^2) = a_s(\mu_V^2)(1 + a_1 a_s(\mu_V^2) + a_2 a_s^2(\mu_V^2) + a_3 a_s^3(\mu_V^2) + \mathcal{O}(a_s^4)),$$

$$\text{где } \vec{q}^2 = \mu_V^2.$$

$$\beta^V(\alpha_{s,V}) = \mu_V^2 \frac{\partial}{\partial \mu_V^2} \left(\frac{\alpha_{s,V}(\mu_V^2)}{\pi} \right) = - \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^V \left(\frac{\alpha_{s,V}(\mu_V^2)}{\pi} \right)^{i+2},$$

Связь β^V -функции в V-схеме с β -функцией в $\overline{\text{MS}}$ -схеме:

$$\begin{aligned} \beta^V(a_{s,V}(a_s(\mu_V^2))) &= \beta(a_s(\mu_V^2)) \frac{da_{s,V}(a_s(\mu_V^2))}{da_s(\mu_V^2)}, \\ \beta_0^V = \beta_0 &= \frac{11}{12} C_A - \frac{1}{3} T_F n_f, \quad \beta_1^V = \beta_1 = \frac{17}{24} C_A^2 - \frac{1}{4} C_F T_F n_f - \frac{5}{12} C_A T_F n_f, \\ \beta_2^V &= \beta_2 - a_1 \beta_1 + (a_2 - a_1^2) \beta_0 \\ &= \left(\frac{103}{96} + \frac{121}{288} \zeta_3 + \frac{11}{48} \pi^2 - \frac{11}{768} \pi^4 \right) C_A^3 - \left(\frac{445}{576} + \frac{11}{9} \zeta_3 + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^4}{192} \right) C_A^2 T_F n_f \\ &\quad - \left(\frac{343}{288} - \frac{11}{12} \zeta_3 \right) C_A C_F T_F n_f + \frac{1}{32} C_F^2 T_F n_f + \left(\frac{1}{288} + \frac{7}{18} \zeta_3 \right) C_A T_F^2 n_f^2 + \left(\frac{23}{72} - \frac{1}{3} \zeta_3 \right) C_F T_F^2 n_f^2, \\ \beta_3^V &= \beta_3 - 2a_1 \beta_2 + a_1^2 \beta_1 + (2a_3 - 6a_1 a_2 + 4a_1^3) \beta_0. \end{aligned}$$

Используя аналитические результаты трёхпетлевых расчётов статического потенциала, выполненные учёными из Карлсруэ, НИЯФ МГУ, Москва и ИЯФ Новосибирск, находим

Аналитическое выражение для четырёхпетлевого коэффициента β^V -функции

$$\begin{aligned}
 \beta_3^V = & \left[-\frac{3871}{2592} + \frac{1463}{432} \zeta_3 - \frac{21197}{2304} \zeta_5 - \frac{1573}{768} \zeta_3^2 + \frac{33}{8} s_6 - \frac{50831}{1161216} \pi^6 + \pi^4 \left(\frac{45023}{207360} - \frac{55}{864} \ln 2 - \frac{55}{432} \ln^2 2 \right) \right. \\
 & - \pi^2 \left(\frac{35035}{20736} - \frac{1925}{768} \zeta_3 - \frac{803}{144} \alpha_4 + \frac{5071}{1728} \ln 2 - \frac{2387}{1152} \zeta_3 \ln 2 \right) \left. \right] C_A^4 + \left[\frac{731}{192} - \frac{13}{3} \zeta_3 + \frac{19709}{2304} \zeta_5 + \frac{1199}{768} \zeta_3^2 \right. \\
 & - \frac{23}{8} s_6 + \frac{10189}{414720} \pi^6 - \pi^4 \left(\frac{2419}{11520} - \frac{25}{3456} \ln 2 - \frac{259}{3456} \ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{14477}{10368} - \frac{1259}{1152} \zeta_3 - \frac{53}{18} \alpha_4 + \frac{889}{864} \ln 2 \right. \\
 & \left. \left. - \frac{665}{576} \zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_A^3 T_{F n_f} - \left[\frac{7645}{1152} - \frac{61}{24} \zeta_3 - \frac{55}{24} \zeta_5 \right] C_A^2 C_F T_{F n_f} + \left[\frac{143}{576} + \frac{143}{48} \zeta_3 - \frac{55}{12} \zeta_5 \right] C_A C_F^2 T_{F n_f} \\
 & + \frac{23}{128} C_F^3 T_{F n_f} + \left[-\frac{1171}{432} + \frac{89}{72} \zeta_3 - \frac{1091}{576} \zeta_5 - \frac{19}{64} \zeta_3^2 + \frac{1}{2} s_6 - \frac{761}{241920} \pi^6 + \pi^4 \left(\frac{529}{8640} + \frac{5}{864} \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{96} \right) \right. \\
 & \left. - \pi^2 \left(\frac{737}{2592} - \frac{19}{288} \zeta_3 - \frac{1}{3} \alpha_4 - \frac{\ln 2}{72} - \frac{7}{48} \zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_A^2 T_F^2 n_f^2 + \left[\frac{583}{144} - \frac{7}{4} \zeta_3 - \frac{5}{6} \zeta_5 \right] C_A C_F T_F^2 n_f^2 - \left[\frac{29}{288} \right. \\
 & \left. + \frac{4}{3} \zeta_3 - \frac{5}{3} \zeta_5 \right] C_F^2 T_F^2 n_f^2 + \left[\frac{293}{648} + \frac{\zeta_3}{54} - \frac{2}{405} \pi^4 \right] C_A T_F^3 n_f^3 + \left[-\frac{1}{2} + \frac{\zeta_3}{3} \right] C_F T_F^3 n_f^3 - \left[\frac{5}{144} - \frac{11}{12} \zeta_3 \right] \frac{d^{abcd} d^{abcd}}{N_A} \\
 & + \left[\frac{2}{9} - \frac{13}{6} \zeta_3 \right] \frac{d^{abcd} d^{abcd}}{N_A} n_f + \left[\frac{55}{576} \pi^6 - \pi^4 \left(\frac{253}{144} - \frac{11}{36} \ln 2 + \frac{11}{12} \ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{869}{216} - \frac{671}{72} \zeta_3 + \frac{11}{6} \ln 2 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{77}{4} \zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_A \frac{d^{abcd} d^{abcd}}{N_A} n_f + \left[-\frac{1511}{4320} \pi^6 + \pi^4 \left(\frac{13}{8} - \frac{35}{18} \ln 2 - \frac{31}{18} \ln^2 2 \right) - \pi^2 \left(\frac{929}{108} - \frac{827}{36} \zeta_3 - \frac{148}{3} \alpha_4 \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{461}{9} \ln 2 - \frac{217}{6} \zeta_3 \ln 2 \right) \right] \frac{d^{abcd} d^{abcd}}{N_A} T_{F n_f} + \left[-\frac{5}{144} \pi^6 + \pi^4 \left(\frac{23}{36} - \frac{\ln 2}{9} + \frac{1}{3} \ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(-\frac{79}{54} + \frac{61}{18} \zeta_3 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{3} \ln 2 - 7 \zeta_3 \ln 2 \right) \right] \frac{d^{abcd} d^{abcd}}{N_A} T_{F n_f}^2 + \left[\frac{16621}{17280} \pi^6 + \pi^4 \left(-\frac{143}{32} + \frac{385}{72} \ln 2 + \frac{341}{72} \ln^2 2 \right) + \pi^2 \left(\frac{10219}{432} \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{9097}{144} \zeta_3 - \frac{407}{3} \alpha_4 + \frac{5071}{36} \ln 2 - \frac{2387}{24} \zeta_3 \ln 2 \right) \right] C_A \frac{d^{abcd} d^{abcd}}{N_A} - \left[\frac{11}{36} - \frac{2}{3} \zeta_3 \right] \frac{d^{abcd} d^{abcd}}{N_A} n_f^2.
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

Коэффициенты функции Адлера и $R(s)$ -отношения в V-схеме

Пользуясь ренорминвариантностью функции Адлера и $R(s)$ -отношения, находим (аналогичные выражения могут быть получены и для $C_{Bjp,V}(a_s, V)$):

$$\begin{aligned}
 d_{1,V}^{NS} &= \frac{3}{4}C_F, \\
 d_{2,V}^{NS} &= -\frac{3}{32}C_F^2 + \left(\frac{307}{96} - \frac{11}{4}\zeta_3\right)C_F C_A + \left(-\frac{23}{24} + \zeta_3\right)C_F T_F n_f, \quad (*) \\
 d_{3,V}^{NS} &= -\frac{69}{128}C_F^3 + \left(-\frac{175}{96} - \frac{143}{16}\zeta_3 + \frac{55}{4}\zeta_5\right)C_F^2 C_A + \left(\frac{621}{32} - \frac{1403}{96}\zeta_3 - \frac{55}{24}\zeta_5 - \frac{3}{16}\pi^2 + \frac{3}{256}\pi^4\right)C_F C_A^2 \\
 &+ \left(\frac{3}{2} - \zeta_3\right)C_F T_F^2 n_f^2 + \left(-\frac{375}{32} + \frac{205}{24}\zeta_3 + \frac{5}{6}\zeta_5\right)C_F C_A T_F n_f + \left(\frac{29}{96} + 4\zeta_3 - 5\zeta_5\right)C_F^2 T_F n_f, \\
 d_{4,V}^{NS} &= \dots \\
 d_{3,V}^{SI} &= d_3^{SI}, \\
 d_{4,V}^{SI} &= \left[\left(-\frac{13}{64} - \frac{\zeta_3}{4} + \frac{5}{8}\zeta_5 \right) C_F + \left(\frac{3211}{4608} - \frac{383}{384}\zeta_3 - \frac{11}{32}\zeta_3^2 + \frac{45}{64}\zeta_5 \right) C_A \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{47}{288} + \frac{19}{96}\zeta_3 - \frac{5}{16}\zeta_5 + \frac{\zeta_3^2}{8} \right) T_F n_f \right] \frac{d^{abc} d^{abc}}{d_R}, \\
 r_{1,V}^{NS} &= d_{1,V}^{NS}, \quad r_{2,V}^{NS} = d_{2,V}^{NS}, \\
 r_{3,V}^{NS} &= d_{3,V}^{NS} - \frac{\pi^2}{3} d_1 \beta_0^2, \quad r_{3,V}^{SI} = d_{3,V}^{SI}, \\
 r_{4,V}^{NS} &= d_{4,V}^{NS} - \pi^2 \left(d_{2,V}^{NS} \beta_0^2 + \frac{5}{6} d_1 \beta_1 \beta_0 \right), \quad r_{4,V}^{SI} = d_{4,V}^{SI}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрение mMOM-схемы импульсных вычитаний

$$A_{B,\mu}^a = \sqrt{Z_A} A_\mu^a, \quad c_B^a = \sqrt{Z_c} c^a, \quad g_{s,B} = \mu^\varepsilon Z_g g_s, \quad \xi_B = Z_\xi \xi,$$

где A_μ^a, c^a — поля глюонов и духов соответственно, ξ — калибровочный параметр, входящий в лагранжиан в форме калибровки Лоренца $(\partial_\mu A_\mu^a)^2/(2\xi)$.

Связь констант перенормировок полей и g_s с константой перенормировки глюон–дух–антидуховой вершины:

$$Z_{cg} = Z_g Z_c \sqrt{Z_A}.$$

В калибровочно–неинвариантной схеме импульсных вычитаний **minimal MOM** (mMOM) константа перенормировки глюон–дух–антидуховой вершины Z_{cg} полагается равной её аналогу в $\overline{\text{MS}}$ -схеме (09):

$$Z_{cg}^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}) = Z_{cg}^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}})$$

В таком случае соотношение между константами связи в этих двух схемах будет иметь вид:

$$a_s^{\text{mMOM}}(\mu^2) = \frac{Z_A^{\text{mMOM}}}{Z_A^{\overline{\text{MS}}}} \left(\frac{Z_c^{\text{mMOM}}}{Z_c^{\overline{\text{MS}}}} \right)^2 a_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2).$$

Перенормированные двухточечные функции Грина полей глюонов и духов равны:

$$G_{ab}^{\mu\nu}(q) = \frac{i\delta_{ab}}{q^2} \left[\left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) \frac{1}{1 + \Pi_A(q^2)} - \xi \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right],$$

$$\Delta^{ab}(q) = \frac{i\delta^{ab}}{q^2} \frac{1}{1 + \Pi_c(q^2)},$$

где $\Pi_A(q^2)$ и $\Pi_c(q^2)$ — их собственно-энергетические функции.

С учётом условий перенормировки на поляризационные операторы глюонов и духов в MOM-подобных схемах ($\Pi_A^{\text{mMOM}}(q^2 = -\mu^2) = 0$, $\Pi_c^{\text{mMOM}}(q^2 = -\mu^2) = 0$) и

$$1 + \Pi_A(a_s, \xi) = Z_A(a_s, \xi, \epsilon) \left(1 + \Pi_A^B(a_s^B(a_s), \xi^B(\xi), \epsilon) \right),$$

$$1 + \Pi_c(a_s, \xi) = Z_c(a_s, \xi, \epsilon) \left(1 + \Pi_c^B(a_s^B(a_s), \xi^B(\xi), \epsilon) \right),$$

получаем следующие соотношения между константами связи и калибровочными параметрами:

$$\begin{cases} a_s^{\text{mMOM}}(\mu^2) = \left(1 + \Pi_A^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2) \right)^{-1} \left(1 + \Pi_c^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2) \right)^{-2} a_s^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2), \\ \xi^{\text{mMOM}}(\mu^2) = \left(1 + \Pi_A^{\overline{\text{MS}}}(\mu^2) \right) \xi^{\overline{\text{MS}}}. \end{cases} \iff a_s^{\overline{\text{MS}}}(\xi^{\text{mMOM}}, a_s^{\text{mMOM}}) \quad (*)$$

$$\beta^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}, \xi^{\text{mMOM}}) = \beta^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}) \frac{\partial a_s^{\text{mMOM}}}{\partial a_s^{\overline{\text{MS}}}} + \xi^{\overline{\text{MS}}} \gamma_\xi^{\overline{\text{MS}}}(a_s^{\overline{\text{MS}}}, \xi^{\overline{\text{MS}}}) \frac{\partial a_s^{\text{mMOM}}}{\partial \xi^{\overline{\text{MS}}}} \Big|_{\overline{\text{MS}} \rightarrow \text{mMOM}}$$

$$\beta_0^{\text{mMOM}} = \frac{11}{12} C_A - \frac{1}{3} T_{F n_f},$$

$$\beta_1^{\text{mMOM}} = \left[\frac{17}{24} - \frac{13}{192} \xi - \frac{5}{96} \xi^2 + \frac{1}{64} \xi^3 \right] C_A^2 + \left[-\frac{5}{12} + \frac{1}{24} \xi + \frac{1}{24} \xi^2 \right] C_A T_{F n_f} - \frac{1}{4} C_F T_{F n_f}, \dots$$

$$\gamma_\xi = \partial \ln \xi / \partial \ln \mu^2 = \gamma_A = -\partial \ln Z_A / \partial \ln \mu^2, \quad \text{где } \xi = \xi^{\text{mMOM}}.$$

$$d_{1, \text{mMOM}}^{NS} = \frac{3}{4} C_F,$$

$$d_{2, \text{mMOM}}^{NS} = \left[\frac{569}{192} - \frac{11}{4} \zeta_3 - \frac{3}{32} \xi - \frac{3}{64} \xi^2 \right] C_F C_A - \frac{3}{32} C_F^2 - \left[\frac{23}{24} - \zeta_3 \right] C_F T_{F n_f} \quad (*)$$

$$d_{3, \text{mMOM}}^{NS} = -\frac{69}{128} C_F^3 + \left[-\frac{1355}{768} - \frac{143}{16} \zeta_3 + \frac{55}{4} \zeta_5 + \frac{3}{128} \xi + \frac{3}{256} \xi^2 \right] C_F^2 C_A$$

$$+ \left[-\frac{2033}{192} + \frac{89}{12} \zeta_3 + \frac{5}{6} \zeta_5 + \left(\frac{23}{96} - \frac{\zeta_3}{4} \right) \xi + \left(\frac{23}{192} - \frac{\zeta_3}{8} \right) \xi^2 \right] C_F C_A T_{F n_f}$$

$$+ \left[\frac{29}{96} + 4\zeta_3 - 5\zeta_5 \right] C_F^2 T_{F n_f} + \left[\frac{3}{2} - \zeta_3 \right] C_F T_{F n_f}^2 + \left[\frac{50575}{3072} - \frac{18929}{1536} \zeta_3 \right.$$

$$\left. - \frac{55}{24} \zeta_5 - \left(\frac{2063}{3072} - \frac{143}{256} \zeta_3 \right) \xi - \left(\frac{1273}{3072} - \frac{185}{512} \zeta_3 \right) \xi^2 - \frac{9}{1024} \xi^3 \right] C_F C_A^2, \dots$$

(18)

$R(s)$ -отношение в mMOM-схеме

$$r_{1,\text{mMOM}}^{NS} = d_{1,\text{mMOM}}^{NS}, \quad r_{2,\text{mMOM}}^{NS} = d_{2,\text{mMOM}}^{NS},$$

$$r_{3,\text{mMOM}}^{NS} = d_{3,\text{mMOM}}^{NS} - \frac{\pi^2}{3} d_1 \beta_0^2,$$

$$r_{4,\text{mMOM}}^{NS} = d_{4,\text{mMOM}}^{NS} - \pi^2 \left[d_{2,\text{mMOM}}^{NS} \beta_0^2 + \frac{5}{6} d_1 \beta_0 \left(\beta_1^{\text{mMOM}} + \xi \gamma_0 \frac{\partial b_1^{\text{mMOM}}}{\partial \xi} \right) \right], \quad (*)$$

$$r_{3,\text{mMOM}}^{SI} = d_{3,\text{mMOM}}^{SI}, \quad r_{4,\text{mMOM}}^{SI} = d_{4,\text{mMOM}}^{SI}.$$

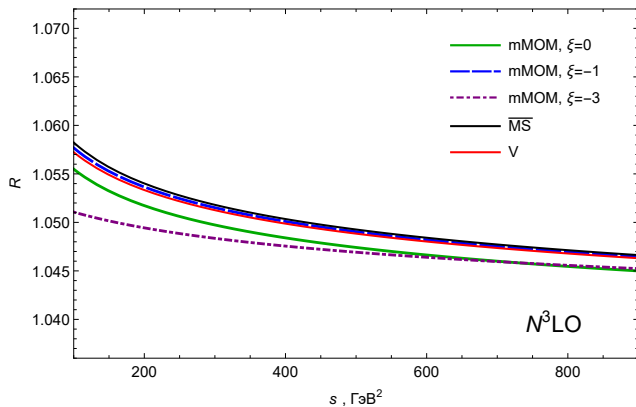
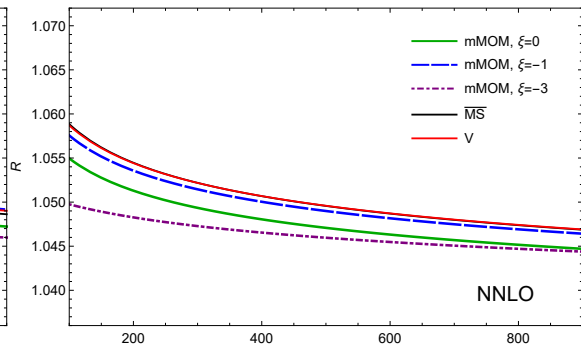
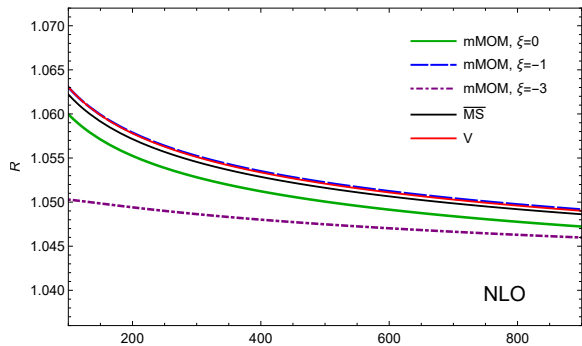
$$\delta_f = (\sum Q_f)^2 / \sum Q_f^2, \quad \delta_f = 2/5 \text{ для } n_f = 4 \text{ и } \delta_f = 1/11 \text{ для } n_f = 5.$$

Схема	n_f	$R(s)$ -отношение
$\overline{\text{MS}}$	4	$1 + a_s + 1.53a_s^2 - 11.520a_s^3 - 93.1255a_s^4 - \delta_f(0.413a_s^3 + 5.1757a_s^4)$
	5	$1 + a_s + 1.41a_s^2 - 12.767a_s^3 - 80.0085a_s^4 - \delta_f(0.413a_s^3 + 4.9841a_s^4)$
V	4	$1 + a_{s,V} + 0.05a_{s,V}^2 - 24.867a_{s,V}^3 - 33.8458a_{s,V}^4 - \delta_f(0.413a_{s,V}^3 + 3.3509a_{s,V}^4)$
	5	$1 + a_{s,V} + 0.22a_{s,V}^2 - 23.021a_{s,V}^3 - 25.0038a_{s,V}^4 - \delta_f(0.413a_{s,V}^3 + 3.5035a_{s,V}^4)$
mMOM $\xi = 0$	4	$1 + a_{s,M} - 0.89a_{s,M}^2 - 20.092a_{s,M}^3 - 5.1307a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.1888a_{s,M}^4)$
	5	$1 + a_{s,M} - 0.72a_{s,M}^2 - 18.690a_{s,M}^3 + 6.2668a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.3415a_{s,M}^4)$
mMOM $\xi = -1$	4	$1 + a_{s,M} - 0.69a_{s,M}^2 - 19.565a_{s,M}^3 - 12.1346a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.4212a_{s,M}^4)$
	5	$1 + a_{s,M} - 0.54a_{s,M}^2 - 18.102a_{s,M}^3 - 0.1252a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 2.5739a_{s,M}^4)$
mMOM $\xi = -3$	4	$1 + a_{s,M} - 1.45a_{s,M}^2 - 15.631a_{s,M}^3 + 30.2423a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 1.4915a_{s,M}^4)$
	5	$1 + a_{s,M} - 1.29a_{s,M}^2 - 14.411a_{s,M}^3 + 37.0659a_{s,M}^4 - \delta_f(0.413a_{s,M}^3 + 1.6442a_{s,M}^4)$

В N³LO приближении $\alpha_s(M_Z^2) \approx 0.1181$ при $M_Z \approx 91.1876$ ГэВ PDG(18). Полагаем $\xi^{\text{mMOM}}(M_Z^2) = 0, -1, -3$, что (помимо схемной зависимости) вносит дополнительную неопределённость при изучении поведения физических величин в калибровочно-неинвариантных схемах перенормировок.

Бег константы связи $a_s^{\text{mMOM}}(\mu^2)$ определяется из системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial a_s^{\text{mMOM}}}{\partial \ln \mu^2} = \beta^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}, \xi^{\text{mMOM}}), \\ \frac{\partial \ln \xi^{\text{mMOM}}}{\partial \ln \mu^2} = \gamma_\xi^{\text{mMOM}}(a_s^{\text{mMOM}}, \xi^{\text{mMOM}}). \end{cases}$$



$$C_A = 0, C_F = 1, T_F = 1, d_A^{abcd} = 0, d_F^{abcd} = 1, N_A = 1, d^{abc} = 1, d_R = 1, n_f = N.$$

$$\beta_{QED}^V(a_V) = \frac{1}{3}Na_V^2 + \frac{1}{4}Na_V^3 + \left[-\frac{1}{32}N + \left(\frac{1}{3}\zeta_3 - \frac{23}{72} \right)N^2 \right] a_V^4 + \left[-\frac{23}{128}N + \left(\frac{13}{32} + \frac{2}{3}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_5 + \frac{2}{3}C \right)N^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\zeta_3 \right)N^3 \right] a_V^5, \quad (*)$$

$$a_s^{\text{mMOM}}(\mu^2) \rightarrow a^{\text{MOM}}(\mu^2) = a_{inv} = \frac{a(\mu^2)}{1 + \Pi_{QED}(\mu^2)} \implies$$

$$\beta^{\text{MOM}}(a_s^{\text{mMOM}}) \rightarrow \Psi(a^{\text{MOM}}) = \frac{1}{3}Na_{\text{MOM}}^2 + \frac{1}{4}Na_{\text{MOM}}^3 + \left[-\frac{1}{32}N + \left(\frac{1}{3}\zeta_3 - \frac{23}{72} \right)N^2 \right] a_{\text{MOM}}^4 + \left[-\frac{23}{128}N + \left(\frac{13}{32} + \frac{2}{3}\zeta_3 - \frac{5}{3}\zeta_5 \right)N^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\zeta_3 \right)N^3 \right] a_{\text{MOM}}^5, \quad (91)$$

где Ψ — функция Гелл-Манна-Лоу.

$$\beta_{0,QED}^V = \Psi_0, \quad \beta_{1,QED}^V = \Psi_1, \quad \beta_{2,QED}^V = \Psi_2,$$

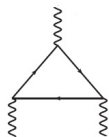
$$\beta_{3,QED}^V = \Psi_3 + \frac{2}{3}CN^2, \quad \boxed{a_V = a_{\text{MOM}} + CN a_{\text{MOM}}^4 + \mathcal{O}(a_{\text{MOM}}^5)} \quad (*)$$

$$C = \frac{5}{96}\pi^6 - \pi^4 \left(\frac{23}{24} - \frac{\ln 2}{6} + \frac{\ln^2 2}{2} \right) + \pi^2 \left(\frac{79}{36} - \frac{61}{12}\zeta_3 + \ln 2 + \frac{21}{2}\zeta_3 \ln 2 \right) \approx -0.888062.$$

Исходя из полученных равенств следует, что V-схему в КЭД можно рассматривать как аналог схемы импульсных вычитаний MOM.

$$d_{4,V}^{NS, QED} = d_{4,\text{MOM}, QED}^{NS} - \frac{3}{4}CN, \quad c_{4,V}^{NS, QED} = c_{4,\text{MOM}, QED}^{NS} + \frac{3}{4}CN.$$

К соотношению Крютера



$$T_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q) = i \int d^4x d^4y \langle 0 | T(A_\mu^a(y) V_\nu^b(x) V_\rho^c(0)) | 0 \rangle e^{i(px+qy)},$$

$$V_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu T^a \psi(x), \quad A_\mu^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \gamma_5 T^a \psi(x).$$

В конформно-инвариантном пределе AVV трёхточечная функция Грина пропорциональна треугольной однопетлевой фермионной петле (аналог $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$).

В этом пределе в безмассовой КХД выполняется соотношение Крютера (72), следующее из применения операторного разложения к T -произведению токов:

$$\boxed{D^{NS} C_{Bjp}^{NS} \Big|_{c-i \text{ limit}} = 1} \quad \text{– соотношение Крютера}$$

Явными вычислениями было показано, что начиная с трёхпетлевого уровня, трёхточечная функция Грина AVV токов перенормируется (кроме формфактора, связанного с аксиальной аномалией) и её поправки прямо пропорциональны первому коэффициенту β -функции (13).

В случае нарушения конформной симметрии обобщение соотношения Крютера, обнаруженное на трёхпетлевом уровне в (93) и подтверждённое на четырёхпетлевом в (10), в калибровочно-инвариантной $\overline{\text{MS}}$ -схеме имеет следующий вид:

$$\boxed{D^{NS}(a_s) C_{Bjp}^{NS}(a_s) = 1 + \Delta_{csb}(a_s) = 1 + \left(\frac{\beta(a_s)}{a_s} \right) \sum_{i \geq 1} K_i a_s^i}$$

Факторизация β -функции в обобщённом соотношении Крютера в V -схеме

Перейдём теперь к изучению вопроса о том, **факторизуется ли β -функция в ОСК в схемах, отличных от $\overline{\text{MS}}$ (калибровочно-инвариантных и неинвариантных)?**

Используя полученные результаты в V -схеме, приходим к выводу, что факторизация β^V -функции в ОСК выполняется.

$$K_1^V = K_1^{\overline{\text{MS}}} = \left(-\frac{21}{8} + 3\zeta_3 \right) C_F, \quad (*)$$

$$K_2^V = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{1453}{96} + \frac{53}{4}\zeta_3 \right) C_F C_A + \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3 \right) C_F T_F n_f,$$

$$K_2^{\overline{\text{MS}}} = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{629}{32} + \frac{221}{12}\zeta_3 \right) C_F C_A + \left(\frac{163}{24} - \frac{19}{3}\zeta_3 \right) C_F T_F n_f,$$

$$K_3^V = \dots, \quad K_3^V \neq K_3^{\overline{\text{MS}}}.$$

Факторизация β -функции в ОСК в КХД в mMOM-схеме

Используя полученные результаты в mMOM-схеме находим, что в $\mathcal{O}(a_s^2)$ приближении **факторизация β -функции** в конформно-нарушающем члене $\Delta_{csb}(a_s) = (\beta(a_s)/a_s) \sum_{i \geq 1} K_i a_s^i$ в mMOM-схеме возможна

при любом значении ξ :

$$K_1^{\text{mMOM}} = K_1^{\overline{\text{MS}}} = \left(-\frac{21}{8} + 3\zeta_3 \right) C_F, \quad (*)$$

В $\mathcal{O}(a_s^3)$ порядке теории возмущений факторизация возможна **только для трёх значений** калибровочного параметра $\xi = -3, -1, 0$:

Landau gauge $\xi = 0$:

$$K_2^{\text{mMOM}} = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{2591}{192} + \frac{91}{8}\zeta_3 \right) C_F C_A + \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3 \right) C_F T_F n_f,$$

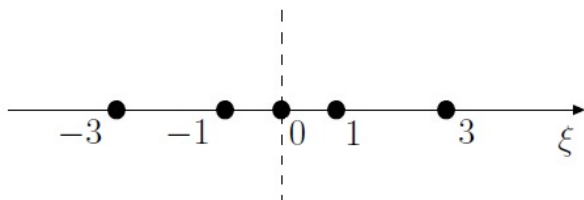
anti-Feynman gauge $\xi = -1$:

$$K_2^{\text{mMOM}} = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{1327}{96} + \frac{47}{4}\zeta_3 \right) C_F C_A + \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3 \right) C_F T_F n_f,$$

anti-Yennie gauge $\xi = -3$:

$$K_2^{\text{mMOM}} = \left(\frac{397}{96} + \frac{17}{2}\zeta_3 - 15\zeta_5 \right) C_F^2 + \left(-\frac{695}{48} + \frac{25}{2}\zeta_3 \right) C_F C_A + \left(\frac{31}{8} - 3\zeta_3 \right) C_F T_F n_f.$$

β -факторизация в mMOM-схеме



В $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении свойство факторизации β -функции в обобщённом соотношении Крютера остаётся справедливым **только для случая калибровки Ландау $\xi = 0$** .

Являются ли значения $\xi = -3, -1, 0$ выделенными во всех схемах импульсных вычитаний в $\mathcal{O}(a_s^3)$ приближении?

Используя представление $a_s^{\overline{\text{MS}}} = a_s^{\text{MOMx}} + \sum_{k=1} b_k^{\text{MOMx}} (a_s^{\text{MOMx}})^{k+1}$ и ренорминвариантность физических величин, входящих в ОСК, приходим к соотношениям (MOMx — произвольная MOM-подобная схема):

$$K_1^{\text{MOMx}} = K_1^{\overline{\text{MS}}}, \quad K_2^{\text{MOMx}} = K_2^{\overline{\text{MS}}} + \left(\frac{\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{MOMx}}}{\beta_0} + 2b_1^{\text{MOMx}} \right) K_1^{\overline{\text{MS}}}, \quad (*)$$

$$K_3^{\text{MOMx}} = K_3^{\overline{\text{MS}}} + \left(\frac{\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{MOMx}}}{\beta_0} + 3b_1^{\text{MOMx}} \right) K_2^{\overline{\text{MS}}} + \left(2b_2^{\text{MOMx}} + (b_1^{\text{MOMx}})^2 \right. \\ \left. + \frac{\beta_2^{\overline{\text{MS}}} - \beta_2^{\text{MOMx}}}{\beta_0} + \frac{(3\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - 2\beta_1^{\text{MOMx}})b_1^{\text{MOMx}}}{\beta_0} + \frac{\beta_1^{\text{MOMx}}(\beta_1^{\text{MOMx}} - \beta_1^{\overline{\text{MS}}})}{\beta_0^2} \right) K_1^{\overline{\text{MS}}}.$$

Таким образом, приходим к заключению, что вопрос о факторизации β -функции сводится к

условиям **деления без остатка** слагаемых типа $(\beta_1^{\overline{\text{MS}}} - \beta_1^{\text{MOMx}})/\beta_0$ и т. д.

$$\beta_1^{\overline{MS}} - \beta_1^{\text{MOMx}} = \xi \gamma_0^{\overline{MS}}(\xi) \frac{\partial b_1(\xi)}{\partial \xi},$$

где $\gamma_0^{\overline{MS}} = (-13/24 + \xi^{\overline{MS}}/8)C_A + T_{F n_f}/3$.

В калибровке Ландау $\xi = 0$ $\beta_1^{\text{MOMx}} = \beta_1^{\overline{MS}}$, и деление на β_0 выполняется в $\mathcal{O}(a_s^3)$ приближении.

Калибровка $\xi = -1$ является **спецификой mMOM-схемы**, т. к. в ней $\beta_1^{\text{MOM}} = \beta_1^{\overline{MS}}$.

При $\xi = -3$: $\gamma_0^{\overline{MS}} = -\beta_0$ и деление без остатка также выполняется.

Выражая в следующем порядке ТВ β_2^{MOMx} через $\beta_2^{\overline{MS}}$, находим, что в $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении факторизация β -функции в ОСК останется только в **калибровке Ландау**. (*)

$$K_3^{\text{MOMx}} = K_3^{\overline{MS}} + 3b_1(0)K_2^{\overline{MS}} + 3b_2(0)K_1^{\overline{MS}}.$$

Продолжая подобные рассуждения, можно, например, получить

$$K_4^{\text{MOMx}} = K_4^{\overline{MS}} + 4b_1(0)K_3^{\overline{MS}} + \left(4b_2(0) + 2b_1^2(0)\right)K_2^{\overline{MS}} + 4b_3(0)K_1^{\overline{MS}}, \dots$$

Т.о. при наличии факторизации β -функции в ОСК в \overline{MS} -схеме во всех порядках ТВ, данное свойство будет сохраняться также и во всех калибровочно-инвариантных схемах, и во всех неинвариантных MOM-подобных схемах в КХД в калибровке Ландау также во всех порядках ТВ.

Итак, **калибровочная инвариантность схем перенормировок является достаточным условием для факторизации RG β -функции в ОСК, но не является необходимым условием.**

Исследование асимптотических рядов ТВ. Соотношение между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков

В исследуемых выше рядах ТВ для физических величин асимптотический характер не проявляется на четырёхпетлевом уровне. Перейдём к изучению рядов ТВ для соотношения между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков в КХД, где этот характер может наблюдаться даже в более низких порядках.

$$\hat{S}_F(p) = \frac{i}{\hat{p} - m_{0,q} + \hat{\Sigma}(p)},$$

где одночастично-неприводимый оператор собственной энергии кварков $\hat{\Sigma}(p)$ может быть представлен в виде суммы двух независимых слагаемых:

$$\hat{\Sigma}(p) = m_{0,q}\Sigma_1(p^2) + (\hat{p} - m_{0,q})\Sigma_2(p^2).$$

Полюсная масса M_q определяется положением полюса перенормированного пропагатора на массовой поверхности (ON-SHELL)

$$m_{0,q} = Z_m^{\text{OS}} M_q, \quad Z_m^{\text{OS}} = 1 + \Sigma_1(p^2) \Big|_{p^2=M_q^2}.$$

Соотношение между голой массой и бегущей $\bar{m}_q(\mu^2)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме:

$$m_{0,q} = Z_m^{\overline{\text{MS}}} \bar{m}_q(\mu^2),$$

$$\frac{\bar{m}_q(\tilde{\mu}^2)}{\bar{m}_q(\mu^2)} = \exp \left(\int_{\alpha_s(\mu^2)}^{\alpha_s(\tilde{\mu}^2)} dx \frac{\gamma_m(x)}{\beta(x)} \right), \quad \gamma_m(\alpha_s) = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \ln \bar{m}_q(\mu^2) = - \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^{i+1}.$$

Соотношение между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков в КХД

$$\frac{M_q}{\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)} = \frac{Z_m^{\overline{\text{MS}}}}{Z_m^{\text{OS}}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n^M a_s^n(\bar{m}_q^2),$$

Для случая $SU(3)$ -группы с n_l безмассовыми ароматами (в петлях) и одним тяжёлым:

$$t_1^M = \frac{4}{3} \quad (81)$$

$$t_2^M = \frac{307}{32} - \frac{\zeta_3}{6} + \left[\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2 \ln 2}{9} \right] - \left(\frac{71}{144} + \left[\frac{\pi^2}{18} \right] \right) n_l \quad (90; 97)$$

$$t_3^M = \frac{8481925}{93312} + \frac{58}{27} \zeta_3 + \left[\frac{652841}{38880} \pi^2 - \frac{575}{162} \pi^2 \ln 2 - \frac{22}{81} \pi^2 \ln^2 2 - \frac{1439}{432} \pi^2 \zeta_3 - \frac{695}{7776} \pi^4 \right. \\ \left. + \frac{1975}{216} \zeta_5 - \frac{55}{162} \ln^4 2 - \frac{220}{27} \text{Li}_4 \left(\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{231847}{23328} - \frac{241}{72} \zeta_3 + \frac{\ln^4 2}{81} + \frac{8}{27} \text{Li}_4 \left(\frac{1}{2} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{991}{648} \pi^2 - \frac{11}{81} \pi^2 \ln 2 + \frac{2}{81} \pi^2 \ln^2 2 + \frac{61}{1944} \pi^4 \right) \right] n_l + \left(\frac{2353}{23328} + \frac{7}{54} \zeta_3 + \left[\frac{13}{324} \pi^2 \right] \right) n_l^2 \quad (00)$$

Начиная с 2-петлевого уровня t_n^M содержат пропорциональные π^2 члены, возникающие при вычислении Z_m^{OS} в Минковской области.

Четырехпетлевая поправка к $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношению

$$t_2^M = -1.0414n_l + 13.443,$$

$$t_3^M = +0.6527n_l^2 - 26.655n_l + 190.60,$$

$$t_4^M = -0.6781n_l^3 + 43.396n_l^2 - (745.72 \pm 0.15)n_l + (3567.61 \pm 1.34),$$

где коэффициенты $t_{4,3}^M$ и $t_{4,2}^M$ были вычислены в аналитическом виде (13). Коэффициенты $t_{4,1}^M$ и $t_{4,0}^M$ неизвестны в аналитическом виде и определены из численных значений поправки t_4^M (15; 16) при фиксированном количестве $3 \leq n_l \leq 5$ (и $3 \leq n_l \leq 15$) при помощи метода наименьших квадратов (15; 16) (*):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \\ 1 & 7 \\ 1 & 8 \\ 1 & 9 \\ 1 & 10 \\ 1 & 11 \\ 1 & 12 \\ 1 & 13 \\ 1 & 14 \\ 1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{4,0}^M \\ t_{4,1}^M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1330.44 \pm 1.74 \\ 584.72 \pm 1.77 \\ -160.99 \pm 1.80 \\ -906.72 \pm 1.84 \\ -1652.44 \pm 1.87 \\ -2398.16 \pm 1.91 \\ -3143.88 \pm 1.94 \\ -3889.61 \pm 1.98 \\ -4635.32 \pm 2.01 \\ -5381.04 \pm 2.05 \\ -6126.77 \pm 2.08 \\ -6872.49 \pm 2.12 \\ -7618.21 \pm 2.16 \end{pmatrix}$$

$$\Phi(t_{4,0}^M, t_{4,1}^M) = \sum_{s=1}^{13} (t_{4,0}^M + t_{4,1}^M n_{l_s} - y_{l_s})^2,$$

где y_{l_s} – числа в столбце свободных членов.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_{4,0}^M} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_{4,1}^M} = 0.$$

Т.о. вплоть до 4-го порядка ТВ поправки t_k^M имеют знакопеременную по n_l структуру.

Асимптотическая ренормалонная формула

Борелевский образ соотношения между M_q и $\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ содержит ИК ренормалонный полюс $u = 1/2$. При больших $k \gg 1$ поведение коэффициентов ряда борелевского образа определяется из разложения вблизи первого лидирующего полюса. Это приводит к следующему факториальному росту коэффициентов t_k^M :

$$t_k^{M, r-n} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pi N_m (2\beta_0)^{k-1} \frac{\Gamma(k+b)}{\Gamma(1+b)} \left(1 + \frac{s_1}{k+b-1} + \frac{s_2}{(k+b-1)(k+b-2)} + \frac{s_3}{(k+b-1)(k+b-2)(k+b-3)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^4}\right) \right) \quad (95; 99)$$

Эта формула может быть также получена из следующих рассуждений. Поскольку лидирующий ренормалонный вклад в $M_q/\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)$ -отношение не зависит от \overline{m}_q (94), то отсюда следует требование $dM_q/d\overline{m}_q(\overline{m}_q^2) \simeq 1$ (17), которое наряду с производной

$$\frac{dM_q}{d\overline{m}_q(\overline{m}_q^2)} = 1 + t^M + 2\beta(a_s) \frac{\partial t^M}{\partial a_s}, \quad \text{где } t^M = \sum_{k=1}^{\infty} t_k^M a_s^k,$$

приводит к рекуррентному соотношению

$$t_k^M \simeq 2 \left(\beta_0(k-1)t_{k-1}^M + \beta_1(k-2)t_{k-2}^M + \dots + \beta_{k-2}t_1^M \right),$$

решение которого воспроизводит ренормалонную факториальную формулу.

n_l	3	4	5	6	7	8
$N_m, [\mathcal{O}(a_s^3)]$	0.57	0.55	0.52	0.48	0.41	0.27
$N_m, [\mathcal{O}(a_s^4)]$	0.54	0.51	0.46	0.39	0.28	0.06

Метод эффективных зарядов

Оценим вклады 5 и 6-го порядков ТВ при помощи различных теоретических процедур. Рассмотрим “эффективную” спектральную плотность $T(s) = \bar{m}_q(s) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} t_k a_s^k(s) \right)$ в пространстве Минковского и следующее модельное дисперсионное соотношение (97):

$$F(Q^2) = Q^2 \int_0^{\infty} ds \frac{T(s)}{(s + Q^2)^2} = \bar{m}_q(Q^2) \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^E a_s^k(Q^2) \right),$$
$$M_q \approx \frac{1}{2\pi i} \int_{-\bar{m}_q(\bar{m}_q^2) - i\epsilon}^{-\bar{m}_q(\bar{m}_q^2) + i\epsilon} ds' \int_0^{\infty} \frac{\bar{m}_q(s) (1 + \sum_{k=1}^{\infty} t_k^M a_s^k(s))}{(s + s')^2} ds,$$

С точки зрения корректного определения данные дисперсионные соотношения представляются не вполне обоснованными и могут содержать теоретические неопределённости в области низких энергий.

$$\gamma_m(\alpha_s) = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \log \bar{m}_q(\mu^2) = - \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^{i+1},$$

$$\log \frac{\mu^2}{s} = \int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(s)} \frac{dx}{\beta_0 x^2 + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^4 + \beta_3 x^5 + \beta_4 x^6 + \beta_5 x^7}, \quad (*)$$

$$\frac{\bar{m}_q(s)}{\bar{m}_q(\mu^2)} = \exp \left(\int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(s)} dx \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \gamma_4 x^4 + \gamma_5 x^5}{\beta_0 x + \beta_1 x^2 + \beta_2 x^3 + \beta_3 x^4 + \beta_4 x^5 + \beta_5 x^6} \right).$$

$$Q^2 \int_0^\infty ds \frac{\{1; l; l^2; l^3; l^4; l^5; l^6\}}{(s+Q^2)^2} = \left\{ 1; \mathfrak{L}; \mathfrak{L}^2 + \frac{\pi^2}{3}; \mathfrak{L}^3 + \pi^2 \mathfrak{L}; \mathfrak{L}^4 + 2\pi^2 \mathfrak{L}^2 + \frac{7\pi^4}{15}; \right. \\ \left. \mathfrak{L}^5 + \frac{10}{3}\pi^2 \mathfrak{L}^3 + \frac{7}{3}\pi^4 \mathfrak{L}; \mathfrak{L}^6 + 5\pi^2 \mathfrak{L}^4 + 7\pi^4 \mathfrak{L}^2 + \frac{31}{21}\pi^6 \right\},$$

где $l = \log(\mu^2/s)$ и $\mathfrak{L} = \log(\mu^2/Q^2)$. Фиксируя $\mu^2 = Q^2$, получаем соотношения между t_n^M и f_n^E коэффициентами $f_n^E = t_n^M + \Delta_n$:

$$\Delta_0 = 0, \quad \Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = \frac{\pi^2}{6} \gamma_0 (\beta_0 + \gamma_0), \\ \Delta_3 = \frac{\pi^2}{3} \left[t_1^M (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 \right) + \frac{1}{2} \beta_1 \gamma_0 + \gamma_1 \beta_0 + \gamma_1 \gamma_0 \right], \\ \Delta_4 = \frac{\pi^2}{3} \left[t_2^M \left(3\beta_0^2 + \frac{5}{2} \beta_0 \gamma_0 + \frac{1}{2} \gamma_0^2 \right) + t_1^M \left(\frac{3}{2} \beta_1 \gamma_0 + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_0 + 2\gamma_1 \beta_0 + \gamma_1 \gamma_0 \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \beta_2 \gamma_0 + \gamma_1 \beta_1 + \frac{1}{2} \gamma_1^2 + \frac{3}{2} \gamma_2 \beta_0 + \gamma_2 \gamma_0 \right] + \frac{7\pi^4}{60} \gamma_0 (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{3} \gamma_0 \right), \\ \Delta_5 = \pi^2 F_2(\beta_{\{0,1,2,3\}}, \gamma_{\{0,1,2,3\}}, t_{\{1,2,3\}}^M) + \pi^4 F_3(\beta_{\{0,1\}}, \gamma_{\{0,1\}}, t_1^M), \\ \Delta_6 = \pi^2 F_4(\beta_{\{0,1,2,3,4\}}, \gamma_{\{0,1,2,3,4\}}, t_{\{1,2,3,4\}}^M) + \pi^4 F_5(\beta_{\{0,1,2\}}, \gamma_{\{0,1,2\}}, t_{\{1,2\}}^M) \\ + \frac{31\pi^6}{126} \gamma_0 (\beta_0 + \gamma_0) \left(\beta_0 + \frac{1}{2} \gamma_0 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{3} \gamma_0 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{4} \gamma_0 \right) \left(\beta_0 + \frac{1}{5} \gamma_0 \right). \\ \Delta_{2p}^{\max \pi} = 2(1 - 2^{1-2p}) \zeta_{2p} \gamma_0 \beta_0^{2p-1} \frac{\Gamma(2p + \gamma_0/\beta_0)}{\Gamma(1 + \gamma_0/\beta_0)}.$$

Метод эффективных зарядов

Для случая $SU(3)$ группы имеем:

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= 5.894 - 0.2742n_l, \quad (*) \\ \Delta_3 &= 105.62 - 10.045n_l + 0.1980n_l^2, \\ \Delta_4 &= 2272 - 403.949n_l + 20.6767n_l^2 - 0.3159n_l^3, \\ \Delta_5 &= 56304.6 - 13767.27n_l + 1137.178n_l^2 - 37.7453n_l^3 + 0.42752n_l^4, \\ \Delta_6 &= 1633116 \pm 348 + (-518511.7 \pm 56.7)n_l + (61128.17 \pm 4.78)n_l^2 \\ &+ (-3345.082 \pm 0.137)n_l^3 + 85.3794n_l^4 - 0.81845n_l^5.\end{aligned}$$

Численные значения Δ_n -вкладов не являются пренебрежимо малыми - они сравнимы со значениями t_k^M -коэффициентов.

На следующем этапе вводим эффективный заряд $a_s^{eff}(Q^2)$ для величины $F(Q^2)/\overline{m}_q(Q^2)$, определяемой в евклидовой области энергий:

$$\begin{aligned}\frac{F(Q^2)}{\overline{m}_q(Q^2)} &= 1 + f_1^E a_s^{eff}(Q^2), \quad a_s^{eff}(Q^2) = a_s(Q^2) + \sum_{k=2}^{\infty} \phi_k a_s^k(Q^2), \\ \beta_0^{eff} &= \beta_0, \quad \beta_1^{eff} = \beta_1, \quad \beta_2^{eff} = \beta_2 - \phi_2 \beta_1 + (\phi_3 - \phi_2^2) \beta_0, \\ \beta_3^{eff} &= \beta_3 - 2\phi_2 \beta_2 + \phi_2^2 \beta_1 + (2\phi_4 - 6\phi_2 \phi_3 + 4\phi_2^3) \beta_0, \\ \beta_4^{eff} &= \beta_4 - 3\phi_2 \beta_3 + (4\phi_2^2 - \phi_3) \beta_2 + (\phi_4 - 2\phi_2 \phi_3) \beta_1 \\ &+ (3\phi_5 - 12\phi_2 \phi_4 - 5\phi_2^3 + 28\phi_2^2 \phi_3 - 14\phi_2^4) \beta_0, \\ \beta_5^{eff} &= \beta_5 - 4\phi_2 \beta_4 + (8\phi_2^2 - 2\phi_3) \beta_3 + (4\phi_2 \phi_3 - 8\phi_2^3) \beta_2 \\ &+ (2\phi_5 - 8\phi_2 \phi_4 + 16\phi_2^2 \phi_3 - 3\phi_2^3 - 6\phi_2^4) \beta_1 \\ &+ (4\phi_6 - 20\phi_2 \phi_5 - 16\phi_3 \phi_4 + 48\phi_2 \phi_3^2 - 120\phi_2^3 \phi_3 + 56\phi_2^2 \phi_4 + 48\phi_2^5) \beta_0.\end{aligned}$$

где члены ϕ_k равны $\phi_k = f_k^E / f_1^E$.

Если положить $\beta_2^{eff} \approx \beta_2$, тогда можно получить $f_3^E \approx (f_2^E)^2/f_1^E + f_2^E \beta_1/\beta_0$ и, используя соотношение $t_3^M = f_3^E - \Delta_3$, оценить значение коэффициента t_3^M . Аналогично, полагая $\beta_3^{eff} \approx \beta_3$, можно оценить значение вклада f_4^E , а затем и $t_4^M = f_4^E - \Delta_4$:

n_l	$t_3^{M, exact}$	$t_3^{M, ECH}$	$t_4^{M, exact}$	$t_4^{M, ECH}$
3	116.494	124	1702.70	1281
4	94.418	98	1235.66	986
5	73.637	74	839.14	719
6	54.161	52	509.07	483
7	35.991	32	241.37	279
8	19.126	15	31.99	111

Данные таблицы позволяют полагать, что приближённые равенства $\beta_4^{eff} \approx \beta_4$, $\beta_5^{eff} \approx \beta_5$ и $t_5^M = f_5^E - \Delta_5$, $t_6^M = f_6^E - \Delta_6$ позволят нам оценить значения коэффициентов t_5^M и t_6^M с удовлетворительной точностью.

Аналогично можно ввести эффективный заряд для $T(s)/\bar{m}_q(s)$, не используя дополнительных предположений о дисперсионном соотношении.

Численные результаты

n_l	$t_5^{M, ECH}$	$t_5^{M, ECH \text{ direct}}$	$t_5^{M, r-n}$	$t_5^{M, FL}$	$t_5^{M, FL, M \rightarrow \bar{m}}$
3	28435	26871	34048	29864	20432
4	17255	17499	22781	21951	14924
5	9122	10427	13882	15725	10757
6	3490	5320	7466	10929	7693
7	-127	1871	3119	7323	5515
8	-2153	-196	344	4693	4027

n_l	$t_6^{M, ECH}$	$t_6^{M, ECH \text{ direct}}$	$t_6^{M, r-n}$	$t_6^{M, FL}$	$t_6^{M, FL, M \rightarrow \bar{m}}$
3	476522	437146	829993	679654	522713
4	238025	255692	511245	462561	353810
5	90739	133960	283902	304866	233282
6	8412	57920	137256	193449	149601
7	-29701	15798	50520	117284	93225
8	-39432	-2184	4747	67253	56410

Таблица: Оценки коэффициентов t_5 и t_6 , полученные в рамках обоих вариантов ECH метода, асимптотической ренормальной формулы и large β_0 -разложения. Последние два столбца отвечают различным выборам начальных масштабов.

Процедура наивной неабелианизации

Зная значения ведущих по n_l вкладов в соотношение между полюсными и бегущими массами тяжёлых кварков, можно оценить всю поправку рассматриваемого порядка ТВ при помощи процедуры наивной неабелианизации, которая в нашей нормировке эквивалентна замене

$$n_l \rightarrow -6\beta_0 = n_l - 31/2. \text{ В самом деле,}$$

$$t_2^M = -1.0414n_l + 13.443,$$

$$t_2^{M,FL} = -1.0414\left(n_l - \frac{31}{2}\right) = -1.0414n_l + 16.142;$$

$$t_3^M = 0.6527n_l^2 - 26.655n_l + 190.60,$$

$$t_3^{M,FL} = 0.6527\left(n_l - \frac{31}{2}\right)^2 = 0.6527n_l^2 - 20.234n_l + 156.81;$$

$$t_4^M = -0.6781n_l^3 + 43.396n_l^2 - (745.72 \pm 0.15)n_l + (3567.61 \pm 1.34),$$

$$t_4^{M,FL} = -0.6781\left(n_l - \frac{31}{2}\right)^3 = -0.6781n_l^3 + 31.532n_l^2 - 488.74n_l + 2525.2.$$

Численные значения лидирующих по n_l вкладов высших порядков ТВ известны (95).

Применяя к ним вышеописанную процедуру в двух наиболее часто используемых нормировках, находим:

$$t_5^{M,FL} = 0.9n_l^4 - 59n_l^3 + 1469n_l^2 - 16156n_l + 66641,$$

$$t_5^{M,FL, M \rightarrow \bar{m}} = 0.9n_l^4 - 56n_l^3 + 1256n_l^2 - 12383n_l + 47721,$$

$$t_6^{M,FL} = -1.5n_l^5 + 125n_l^4 - 4127n_l^3 + 68088n_l^2 - 561727n_l + 1853698,$$

$$t_6^{M,FL, M \rightarrow \bar{m}} = -1.5n_l^5 + 120n_l^4 - 3779n_l^3 + 58846n_l^2 - 460910n_l + 1468466,$$

Асимптотическая структура: КХД и КЭД ряды ТВ

Для c , b и t -кварков $\overline{\text{MS}}$ -on-shell соотношение содержит **значительно растущие и строго знакопостоянные** коэффициенты ($\bar{a}_s = \alpha_s(\bar{m}_q^2)/\pi$):

$$M_c^{ECH} \approx \bar{m}_c(\bar{m}_c^2)(1 + 1.3333 \bar{a}_s + 10.318 \bar{a}_s^2 + 116.49 \bar{a}_s^3 + (1702.70 \pm 1.41) \bar{a}_s^4 + 28435 \bar{a}_s^5 + 476522 \bar{a}_s^6),$$

$$M_b^{ECH} \approx \bar{m}_b(\bar{m}_b^2)(1 + 1.3333 \bar{a}_s + 9.277 \bar{a}_s^2 + 94.41 \bar{a}_s^3 + (1235.66 \pm 1.47) \bar{a}_s^4 + 17255 \bar{a}_s^5 + 238025 \bar{a}_s^6),$$

$$M_t^{ECH} \approx \bar{m}_t(\bar{m}_t^2)(1 + 1.3333 \bar{a}_s + 8.236 \bar{a}_s^2 + 73.63 \bar{a}_s^3 + (839.14 \pm 1.54) \bar{a}_s^4 + 9122 \bar{a}_s^5 + 90739 \bar{a}_s^6).$$

А что в КЭД? Используя $U(1)$ -предел численных результатов для случая $SU(N_c)$ группы (16) можно получить следующие разложения для e , μ и τ -лептонов ($\bar{a}_s = \alpha_s(\bar{m}_l^2)/\pi$):

$$M_e \approx \bar{m}_e(\bar{m}_e^2)(1 + \bar{a} + 0.1659 \bar{a}^2 - 2.1314 \bar{a}^3 + (7.487 \pm 1.030) \bar{a}^4),$$

$$M_\mu \approx \bar{m}_\mu(\bar{m}_\mu^2)(1 + \bar{a} - 1.3961 \bar{a}^2 - 0.6460 \bar{a}^3 + (3.169 \pm 1.045) \bar{a}^4),$$

$$M_\tau \approx \bar{m}_\tau(\bar{m}_\tau^2)(1 + \bar{a} - 2.9582 \bar{a}^2 + 4.7556 \bar{a}^3 + (-21.238 \pm 1.090) \bar{a}^4).$$

В случае КЭД **отсутствует** какая бы то ни была **знакопостоянная** или **знакопеременная** структура.

Численные результаты

$\bar{m}_c(\bar{m}_c^2) = 1.275_{-0.035}^{+0.025}$ ГэВ, $\bar{m}_b(\bar{m}_b^2) = 4.180_{-0.030}^{+0.040}$ ГэВ, $\bar{m}_t(\bar{m}_t^2) = 164.3 \pm 0.6$ ГэВ PDG (18); для того чтобы определить значения $\alpha_s(\bar{m}_q^2)$ используем $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1181(11)$ при $M_Z = 91.1876(21)$ GeV:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_l=3)} = 292 \text{ МэВ}, \quad \alpha_s(\bar{m}_c^2) = 0.3947,$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_l=4)} = 210 \text{ МэВ}, \quad \alpha_s(\bar{m}_b^2) = 0.2256,$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_l=5)} = 89 \text{ МэВ}, \quad \alpha_s(\bar{m}_t^2) = 0.1085.$$

$$\frac{M_c}{1 \text{ GeV}} \approx 1.275 + 0.214 + 0.208 + 0.295 + 0.541$$

$$+ \left\{ \underbrace{1.135 + 2.389}_{\text{ECH}}; \underbrace{1.072 + 2.192}_{\text{ECH direct}}; \underbrace{1.192 + 3.408}_{\text{FL}}; \underbrace{0.815 + 2.621}_{\text{FL, } M \rightarrow \bar{m}} \right\},$$

$$\frac{M_b}{1 \text{ GeV}} \approx 4.180 + 0.400 + 0.200 + 0.146 + 0.137$$

$$+ \left\{ \underbrace{0.137 + 0.137}_{\text{ECH}}; \underbrace{0.140 + 0.147}_{\text{ECH direct}}; \underbrace{0.175 + 0.265}_{\text{FL}}; \underbrace{0.119 + 0.203}_{\text{FL, } M \rightarrow \bar{m}} \right\},$$

$$\frac{M_t}{1 \text{ GeV}} \approx 164.300 + 7.566 + 1.614 + 0.498 + 0.196$$

$$+ \left\{ \underbrace{0.074 + 0.025}_{\text{ECH}}; \underbrace{0.084 + 0.037}_{\text{ECH direct}}; \underbrace{0.127 + 0.085}_{\text{FL}}; \underbrace{0.087 + 0.065}_{\text{FL, } M \rightarrow \bar{m}} \right\}.$$

Таким образом, асимптотическая структура для полюсной массы t -кварка не проявляется на шестипетлевом уровне.

Заключение

- Получены аналитические четырёхпетлевые выражения для функции Адлера и $R(s)$ -отношения e^+e^- аннигиляции в адроны, функции Бьёркена процесса глубоконеупругого рассеяния заряженных лептонов на поляризованных нуклонах в V и mMOM-схеме в КХД.
- Сделан вывод об уменьшении схемной и калибровочной зависимости данных величин при переходе от NLO к N³LO порядку ТВ.
- Показана аналогия между V и MOM-схемой в КЭД.
- Продемонстрировано, что обобщённое соотношение Крютера в $\mathcal{O}(a_s^4)$ приближении выполняется не только в калибровочно-инвариантных схемах перенормировок, но и в неинвариантных также. Показана выделенность калибровки Ландау во всех порядках.
- Дан точный рецепт для исследования свойства факторизации $\beta(a_s)$ -функции в ОСК в различных схемах перенормировок. Доказано, что калибровочная инвариантность схем вычитаний УФ расходимостей является достаточным, но не является необходимым условием для факторизации β -функции в ОСК во всех порядках ТВ.
- Найдены два неизвестных в аналитическом виде четырёхпетлевых коэффициента в $M_q/\bar{m}_q(\bar{m}_q^2)$ -отношении при помощи метода наименьших квадратов, не применявшегося ранее при изучении структуры коэффициентов рядов ТВ
- Сделан вывод, что асимптотическая природа исследуемого ряда ТВ для случая t -кварка не проявляется на шестипетлевом уровне, а будет наблюдаться после 7-го порядка. Это позволяет применять определение и полюсной, и бегущей массы t -кварка при обработке современных экспериментальных данных (в отличие от c и b -кварка, где асимптотическая структура проявляется во 2-м и 4-м порядке соответственно, а следовательно в этих порядках целесообразнее использовать их бегущие массы).

Краткий список литературы

1. Zee A., *Phys.Rev.D8*, 1973
2. Appelquist T., Georgi H., *Phys.Rev.D8*, 1973
3. Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V., *Phys.Lett.85B*, 1979
4. Dine M., Sapirstein J.R., *Phys.Rev.Lett.43*, 1979
5. Gorishnii S.G., Kataev A.L., Larin S.A., *Phys.Lett.B259*, 1991
6. Surguladze L.R., Samuel M.A., *Phys.Rev.Lett.66*, 1991
7. Baikov P.A., Chetyrkin K.G., Kuhn J.H., *Phys.Rev.Lett.101*, 2008
8. Baikov P.A., Chetyrkin K.G., Kuhn J.H., *Phys.Rev.Lett.104*, 2010
9. Baikov P.A., Chetyrkin K.G., Kuhn J.H., *Phys.Lett.B714*, 2012
10. Kodaira J., Matsuda S., Sasaki K., *Nucl.Phys.B159*, 1979
11. Gorishnii S.G., Larin S.A., *Phys.Lett.B172*, 1986
12. Larin S.A., Vermaseren J.A.M., *Phys.Lett.B259*, 1991
13. Fischler W., *Nucl.Phys.B129*, 1977
14. Billoire A., *Phys.Lett.92B*, 1980
15. Schroder Y., *Phys.Lett.B447*, 1999
16. Peter M., *Phys.Rev.Lett.78*, 1997
17. Smirnov A.V., Smirnov V.A., Steinhauser M., *Phys.Lett.B668*, 2008
18. Lee R., Smirnov A., Smirnov V., Steinhauser M., *Phys.Rev.D94*, 2016
19. Smekal L., Maltman K., Sternbeck A., *Phys.Lett.B681*, 2009
20. Kiselev V.V., Likhoded A.K., Pakhomova O.N., Saleev V.A., *Phys.Rev.D66*, 2002

21. Gracey J.A., *J.Phys.A*46, 2013
22. Ruijl B., Ueda T., Vermaseren J.A.M., *JHEP*.06, 2017
23. Gorishnii S.G., Kataev A.L., Larin S.A., Surguladze L.R., *Phys.Lett.B*256, 1991
24. Crewther R.J., *Phys.Rev.Lett.*28, 1972
25. Schreier E.J., *Phys.Rev.D*3, 1971
26. Gabadadze G.T., Kataev A.L., *JETPLett.*61, 1995
27. Mondejar J., Melnikov K., *Phys.Lett.B*718, 2013
28. Broadhurst D.J., Kataev A.L., *Phys.Lett.B*315, 1993
29. Mikhailov S.V., *Phys.Lett.B*431, 1998
30. Bigi I.Y., Shifman M.A., Uraltsev N.G., *Phys.Rev.D*50, 1994
31. Beneke M., *Phys.Rept.*317, 1999
32. Beneke M., *Phys.Lett.B*434, 1998
33. Pineda A., *JHEP*06, 2001
34. Beneke M., Marquard P., Nason P., Steinhauser M., *Phys.Lett.B*775, 2017
35. Hoang A., Jain A., Lepenik C., Mateu V., Preisser M., *JHEP*04, 2018
36. Tarrach R., *Nucl.Phys.B*183, 1981
37. Gray N., Broadhurst D.J., Grafe W., *Z.Phys.C*48, 1990
38. Melnikov K., Ritbergen T., *Phys.Lett.B*482, 2000
39. Chetyrkin K.G., Steinhauser M., *Nucl.Phys.B*573, 2000
40. Lee R., Marquard P., Smirnov A.V., *JHEP*.03, 2013

41. *Ball P., Beneke M., Braun V.M., Nucl.Phys.B452, 1995*
42. *Marquard P., Smirnov A.V., Smirnov V.A., Phys.Rev.Lett.114, 2015*
43. *Komijani J., JHEP.08, 2017*
44. *Marquard P., Smirnov A.V., Smirnov V.A., Steinhauser M., Wellmann D., Phys.Rev.D94, 2016*
45. *Chetyrkin K.G., Kniehl B.A., Sirlin A., Phys.Lett.B402, 1997*
45. *Kataev A.L., Starshenko V.V., Mod.Phys.Lett.A.10, 1995*
46. *Kataev A.L., Kim V.T., Phys.Part.Nucl.41, 2010*