

# Массивные супермультиплеты высших спинов в развернутом формализме

Ю. М. Зиновьев, М. В. Хабаров

Nucl. Phys. B953 (2020) 114959

# План

- 1 Реперный формализм
- 2 Мультиспинорный формализм
- 3 Бескоординатное описание  $(A)dS_4$
- 4 Развернутый формализм
  - Безмассовые поля
  - Безмассовые супермультиплеты
  - Массивные поля
  - Массивные супермультиплеты

- В общем случае все объекты имеют два вида индексов — мировые  $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$  и локальные  $(a, b, c, d)$ . Два наиболее важных — репер  $e_\mu^a$  и Лоренцевская связность  $\omega_\mu^{ab}$ .
- В дальнейшем все выражения полностью антисимметричны по мировым индексам  $\Rightarrow$  полная ковариантная производная совпадает с Лоренц-ковариантной.
- Как правило мировые индексы указываться не будут, вместо этого используется терминология форм:
  - ▶  $W^A$  — ноль-форма
  - ▶  $\Phi_\mu^A$  — один-форма
  - ▶  $\mathcal{R}_{\mu\nu}^A$  — два-форма
- При этом произведение понимается как внешнее произведение

$$\mathcal{R}_{[\mu\nu}^A \Phi_{\alpha]}^B \Leftrightarrow \mathcal{R}^A \wedge \Phi^B$$

а знак внешнего произведения  $\wedge$  опускается.

- Группа Лоренца (с комплексификацией) изоморфна прямому произведению двух групп вращений

$$O(1, 3) \approx O(3) \otimes O(3)$$

- Поэтому любое неприводимое представление характеризуется двумя параметрами  $(a, b)$ , которые принимают целые или полуцелые значения.
- Такое представление можно реализовать как полностью симметричный мультиспинор  $(\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = 1, 2)$ :

$$\Phi^{(\alpha_1 \dots \alpha_{2a})(\dot{\alpha}_1 \dots \dot{\alpha}_{2b})} = \Phi^{\alpha(2a)\dot{\alpha}(2b)}$$

- ▶ бозон:  $a + b$  - целое,  $2a + 2b$  - четное
- ▶ фермион:  $a + b$  - полуцелое,  $2a + 2b$  - нечетное
- Операция четности  $a \leftrightarrow b \implies \Phi^{\alpha(2a)\dot{\alpha}(2b)} \leftrightarrow \Phi^{\alpha(2b)\dot{\alpha}(2a)}$

- В реперном мультиспинорном формализме гравитация описывается один-формами  $e^{\alpha\dot{\alpha}}$ ,  $\omega^{\alpha(2)}$ ,  $\omega^{\dot{\alpha}(2)}$
- Пространство  $(A)dS_4$  является решением уравнений гравитации с космологическим членом

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\alpha\dot{\alpha}} &= de^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta\dot{\alpha}}\omega^{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}}\omega^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \\ \mathcal{R}^{\alpha(2)} &= D\omega^{\alpha(2)} + \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}}e^{\alpha\dot{\alpha}} = 0 \\ \mathcal{R}^{\dot{\alpha}(2)} &= D\omega^{\dot{\alpha}(2)} + \Lambda e_{\alpha\dot{\alpha}}e^{\alpha\dot{\alpha}} = 0\end{aligned}$$

где  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{R}$  — два-формы кручения и кривизны, а  $\Lambda$  — космологический член

- Калибровочные преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}\delta e^{\alpha\dot{\alpha}} &= D\xi^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta\dot{\alpha}}\eta^{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}}\eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \\ \delta\omega^{\alpha(2)} &= D\eta^{\alpha(2)} + \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}}\xi^{\alpha\dot{\alpha}} = 0 \\ \delta\omega^{\dot{\alpha}(2)} &= D\eta^{\dot{\alpha}(2)} + \Lambda e_{\alpha\dot{\alpha}}\xi^{\alpha\dot{\alpha}} = 0\end{aligned}$$

- В реперном мультиспинорном формализме гравитация описывается один-формами  $e^{\alpha\dot{\alpha}}$ ,  $\omega^{\alpha(2)}$ ,  $\omega^{\dot{\alpha}(2)}$
- Пространство  $(A)dS_4$  является решением уравнений гравитации с космологическим членом

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\alpha\dot{\alpha}} &= de^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta\dot{\alpha}} \omega^{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \omega^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \\ \mathcal{R}^{\alpha(2)} &= D\omega^{\alpha(2)} + \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} e^{\alpha\dot{\alpha}} = 0 \\ \mathcal{R}^{\dot{\alpha}(2)} &= D\omega^{\dot{\alpha}(2)} + \Lambda e_{\alpha}^{\dot{\alpha}} e^{\alpha\dot{\alpha}} = 0\end{aligned}$$

где  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{R}$  — два-формы кручения и кривизны, а  $\Lambda$  — космологический член

- Калибровочные преобразования имеют вид

$$\begin{aligned}\delta e^{\alpha\dot{\alpha}} &= D\xi^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta\dot{\alpha}} \eta^{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0 \\ \delta \omega^{\alpha(2)} &= D\eta^{\alpha(2)} + \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \xi^{\alpha\dot{\alpha}} = 0 \\ \delta \omega^{\dot{\alpha}(2)} &= D\eta^{\dot{\alpha}(2)} + \Lambda e_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \xi^{\alpha\dot{\alpha}} = 0\end{aligned}$$

## Пример со спином 2

- Рассмотрим динамические поля  $e \Rightarrow e + h$ ,  $\omega \Rightarrow \omega + \Omega$  в линейном приближении:

$$0 = Dh^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta}^{\dot{\alpha}} \Omega^{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \Omega^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$$

$$0 = D\Omega^{\alpha(2)} + \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} h^{\alpha\dot{\alpha}} + E_{\beta(2)} W^{\alpha(2)\beta(2)}$$

$$0 = D\Omega^{\dot{\alpha}(2)} + \Lambda e_{\alpha}^{\dot{\alpha}} h^{\alpha\dot{\alpha}} + E_{\dot{\beta}(2)} W^{\dot{\alpha}(2)\dot{\beta}(2)}$$

Здесь  $W^{\alpha(4)}$ ,  $W^{\dot{\alpha}(4)}$  — компоненты тензора Вейля.

- Требование самосогласованности уравнений приводит к бесконечной цепочке ноль-форм  $W^{\alpha(4+k)\dot{\alpha}(k)} + h.c.$ ,  $0 \leq k < \infty$

$$0 = DW^{\alpha(4+k)\dot{\alpha}(k)} + e_{\beta\dot{\beta}} W^{\alpha(4+k)\beta\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} - \Lambda e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(3+k)\dot{\alpha}(k-1)}$$

- Эти ноль-формы описывают все калибровочно инвариантные высших производных гравитационного поля незануляющиеся на массовой поверхности

## Пример со спином 2

- Рассмотрим динамические поля  $e \Rightarrow e + h$ ,  $\omega \Rightarrow \omega + \Omega$  в линейном приближении:

$$0 = Dh^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta}^{\dot{\alpha}} \Omega^{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \Omega^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$$

$$0 = D\Omega^{\alpha(2)} + \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} h^{\alpha\dot{\alpha}} + E_{\beta(2)} W^{\alpha(2)\beta(2)}$$

$$0 = D\Omega^{\dot{\alpha}(2)} + \Lambda e_{\alpha}^{\dot{\alpha}} h^{\alpha\dot{\alpha}} + E_{\dot{\beta}(2)} W^{\dot{\alpha}(2)\dot{\beta}(2)}$$

Здесь  $W^{\alpha(4)}$ ,  $W^{\dot{\alpha}(4)}$  — компоненты тензора Вейля.

- Требование самосогласованности уравнений приводит к бесконечной цепочке ноль-форм  $W^{\alpha(4+k)\dot{\alpha}(k)} + h.c.$ ,  $0 \leq k < \infty$

$$0 = DW^{\alpha(4+k)\dot{\alpha}(k)} + e_{\beta\dot{\beta}} W^{\alpha(4+k)\beta\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} - \Lambda e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(3+k)\dot{\alpha}(k-1)}$$

- Эти ноль-формы описывают все калибровочно инвариантные высших производных гравитационного поля незануляющиеся на массовой поверхности



## Произвольный целый спин

- Описание включает физическое поле  $\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}$  и набор вспомогательных полей  $\Phi^{\alpha(s-1+k)\dot{\alpha}(s-1-k)} + h.c.$ ,  $1 \leq k \leq s-1$
- Калибровочно инвариантные уравнения:

$$0 = D\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \Phi^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)\dot{\beta}} + e_{\beta}^{\dot{\alpha}} \Phi^{\alpha(s-1)\beta\dot{\alpha}(s-2)}$$

$$0 = D\Phi^{\alpha(s-1+k)\dot{\alpha}(s-1-k)} + e_{\beta}^{\dot{\alpha}} \Phi^{\alpha(s-1+k)\beta\dot{\alpha}(s-2-k)} - \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \Phi^{\alpha(s-2+k)\dot{\alpha}(s-1-k)\dot{\beta}}, \quad 1 \leq k \leq s-2$$

$$0 = D\Phi^{\alpha(2s-2)} - \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \Phi^{\alpha(2s-3)\dot{\beta}} + E_{\beta(2)} W^{\alpha(2s-2)\beta(2)}$$

- Бесконечный набор ноль-форм  $W^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)}$ ,  $0 \leq k < \infty$ :

$$0 = DW^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)} + e_{\beta\dot{\beta}} W^{\alpha(2s+k)\beta\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} - \Lambda e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k-1)}$$

## Произвольный целый спин

- Описание включает физическое поле  $\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}$  и набор вспомогательных полей  $\Phi^{\alpha(s-1+k)\dot{\alpha}(s-1-k)} + h.c.$ ,  $1 \leq k \leq s-1$
- Калибровочно инвариантные уравнения:

$$0 = D\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \Phi^{\alpha(s-2)\dot{\alpha}(s-1)\dot{\beta}} + e_{\beta}^{\dot{\alpha}} \Phi^{\alpha(s-1)\beta\dot{\alpha}(s-2)}$$

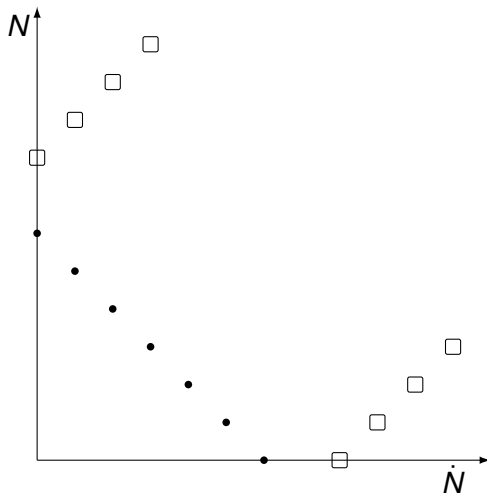
$$0 = D\Phi^{\alpha(s-1+k)\dot{\alpha}(s-1-k)} + e_{\beta}^{\dot{\alpha}} \Phi^{\alpha(s-1+k)\beta\dot{\alpha}(s-2-k)} - \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \Phi^{\alpha(s-2+k)\dot{\alpha}(s-1-k)\dot{\beta}}, \quad 1 \leq k \leq s-2$$

$$0 = D\Phi^{\alpha(2s-2)} - \Lambda e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \Phi^{\alpha(2s-3)\dot{\beta}} + E_{\beta(2)} W^{\alpha(2s-2)\beta(2)}$$

- Бесконечный набор ноль-форм  $W^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)}$ ,  $0 \leq k < \infty$ :

$$0 = DW^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)} + e_{\beta\dot{\beta}} W^{\alpha(2s+k)\beta\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} - \Lambda e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k-1)}$$

## Полный спектр компонент



## $N = 1$ супергравитация

- Помимо репера и Лоренцевской связности содержит гравитино  $\psi^\alpha, \psi^{\dot{\alpha}}$  ( $\Lambda = -\lambda^2$ ):

$$0 = D e^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta}^{\dot{\alpha}} \omega^{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \omega^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \lambda \psi^\alpha \psi^{\dot{\alpha}}$$

$$0 = D \omega^{\alpha(2)} + \lambda^2 e^{\alpha}_{\dot{\beta}} e^{\alpha\dot{\beta}} + \psi^\alpha \psi^\alpha$$

$$0 = D \psi^\alpha + \lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \psi^{\dot{\alpha}}$$

- Пространство  $AdS_4$  по-прежнему является одним из решений при  $\psi^\alpha = 0, \psi^{\dot{\alpha}} = 0$
- Калибровочные преобразования гравитино:

$$\delta \psi^\alpha = D \zeta^\alpha + \lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \zeta^{\dot{\alpha}}, \quad \delta \psi^{\dot{\alpha}} = D \zeta^{\dot{\alpha}} + \lambda e_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \zeta^\alpha$$

Глобальные суперпреобразования:

$$D \zeta^\alpha + \lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \zeta^{\dot{\alpha}} = 0, \quad D \zeta^{\dot{\alpha}} + \lambda e_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \zeta^\alpha = 0$$

## $N = 1$ супергравитация

- Помимо репера и Лоренцевской связности содержит гравитино  $\psi^\alpha, \psi^{\dot{\alpha}}$  ( $\Lambda = -\lambda^2$ ):

$$0 = D e^{\alpha\dot{\alpha}} + e_{\beta}^{\dot{\alpha}} \omega^{\alpha\beta} + e^{\alpha}_{\dot{\beta}} \omega^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \lambda \psi^\alpha \psi^{\dot{\alpha}}$$

$$0 = D \omega^{\alpha(2)} + \lambda^2 e^{\alpha}_{\dot{\beta}} e^{\alpha\dot{\beta}} + \psi^\alpha \psi^{\dot{\alpha}}$$

$$0 = D \psi^\alpha + \lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \psi^{\dot{\alpha}}$$

- Пространство  $AdS_4$  по-прежнему является одним из решений при  $\psi^\alpha = 0, \psi^{\dot{\alpha}} = 0$
- Калибровочные преобразования гравитино:

$$\delta \psi^\alpha = D \zeta^\alpha + \lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \zeta^{\dot{\alpha}}, \quad \delta \psi^{\dot{\alpha}} = D \zeta^{\dot{\alpha}} + \lambda e_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \zeta^\alpha$$

Глобальные суперпреобразования:

$$D \zeta^\alpha + \lambda e^{\alpha}_{\dot{\alpha}} \zeta^{\dot{\alpha}} = 0, \quad D \zeta^{\dot{\alpha}} + \lambda e_{\alpha}^{\dot{\alpha}} \zeta^\alpha = 0$$

## Развернутые уравнения

- Есть два вида безмассовых супермультиплетов:  $(\mathbf{s}, \mathbf{s} - 1/2)$ ,  $(\mathbf{s} + 1/2, \mathbf{s})$
- Уравнения для первого:

$$0 = DW^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)} + e_{\beta\dot{\beta}} W^{\alpha(2s+k)\beta\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} + \lambda^2 e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k-1)} + C\lambda Y^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k)} \psi^\alpha + CY^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}$$

$$0 = DY^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k)} + e_{\beta\dot{\beta}} Y^{\alpha(2s+k-1)\beta\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} + \lambda^2 e^{\alpha\dot{\alpha}} Y^{\alpha(2s+k-2)\dot{\alpha}(k-1)} + \tilde{C}W^{\alpha(2s+k-1)\beta\dot{\alpha}(k)} \psi_\beta + \tilde{C}\lambda W^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k-1)} \psi_{\dot{\alpha}}$$

- Глобальные суперпреобразования:

$$\delta W^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)} = C\lambda Y^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k)} \zeta^\alpha + CY^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} \zeta_{\dot{\beta}}$$

$$\delta Y^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k)} = \tilde{C}W^{\alpha(2s+k-1)\beta\dot{\alpha}(k)} \zeta_\beta + \tilde{C}\lambda W^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k-1)} \zeta^{\dot{\alpha}}$$

## Развернутые уравнения

- Есть два вида безмассовых супермультиплетов:  $(s, s - 1/2)$ ,  $(s + 1/2, s)$
- Уравнения для первого:

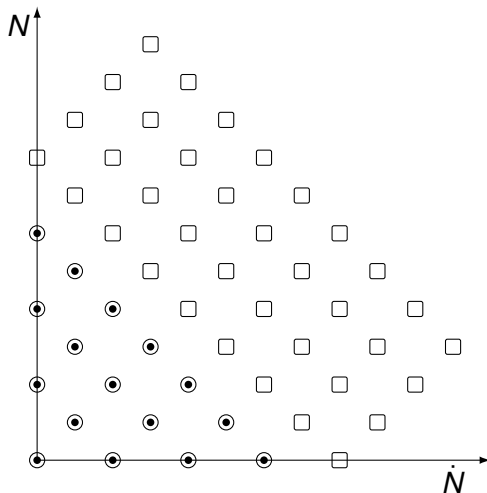
$$0 = DW^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)} + e_{\beta\dot{\beta}} W^{\alpha(2s+k)\beta\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} + \lambda^2 e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k-1)} \\ + C\lambda Y^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k)} \psi^\alpha + CY^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}$$

$$0 = DY^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k)} + e_{\beta\dot{\beta}} Y^{\alpha(2s+k-1)\beta\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} + \lambda^2 e^{\alpha\dot{\alpha}} Y^{\alpha(2s+k-2)\dot{\alpha}(k-1)} \\ + \tilde{C}W^{\alpha(2s+k-1)\beta\dot{\alpha}(k)} \psi_\beta + \tilde{C}\lambda W^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k-1)} \psi^{\dot{\alpha}}$$

- Глобальные суперпреобразования:

$$\delta W^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)} = C\lambda Y^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k)} \zeta^\alpha + CY^{\alpha(2s+k)\dot{\alpha}(k)\dot{\beta}} \zeta_{\dot{\beta}} \\ \delta Y^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k)} = \tilde{C}W^{\alpha(2s+k-1)\beta\dot{\alpha}(k)} \zeta_\beta + \tilde{C}\lambda W^{\alpha(2s+k-1)\dot{\alpha}(k-1)} \zeta^{\dot{\alpha}}$$

## Полный спектр в массивном случае





## Развернутые уравнения

- Полный набор составляют уравнения для калибровочных полей, Голдстоуновских полей и калибровочно инвариантных ноль-форм.
- Уравнения для последних:

$$0 = DW^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l)} + e_{\beta\dot{\beta}} W^{\alpha(k)\beta\dot{\alpha}(l)\dot{\beta}} + a_{k,l} e^{\alpha}_{\dot{\beta}} W^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(l)\dot{\beta}} + b_{k,l} e_{\beta}^{\dot{\alpha}} W^{\alpha(k)\beta\dot{\alpha}(l-1)} + c_{k,l} e^{\alpha\dot{\alpha}} W^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(l-1)}$$

- Коэффициенты  $a_{k,l}$ ,  $b_{k,l}$  и  $c_{k,l}$  определяются условием самосогласованности и зависят от массы и спина.
- Все уравнения инвариантны относительно глобальных преобразований алгебры  $AdS_4$

## Суперпреобразования для массивных полей

- Рассмотрим массивный бозон и фермион. Поправки к уравнениям бозонных ноль-форм:

$$\begin{aligned}\Delta_b = & \alpha_{k,l} Y^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(l)} \psi^\alpha + \beta_{k,l} Y^{\alpha(k)\eta\dot{\alpha}(l)} \psi_\beta \\ & + \gamma_{k,l} Y^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l-1)} \psi^{\dot{\alpha}} + \delta_{k,l} Y^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l)\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}\end{aligned}$$

- При  $\psi^\alpha = 0$ ,  $\psi^{\dot{\alpha}} = 0$  исходные уравнения инвариантны относительно следующих глобальных суперпреобразований

$$\begin{aligned}\delta W^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l)} = & \alpha_{k,l} Y^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(l)} \zeta^\alpha + \beta_{k,l} Y^{\alpha(k)\beta\dot{\alpha}(l)} \zeta_\beta \\ & + \gamma_{k,l} Y^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l-1)} \zeta^{\dot{\alpha}} + \delta_{k,l} Y^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l)\dot{\beta}} \zeta_{\dot{\beta}}\end{aligned}$$

и аналогично для фермионов

- Однако алгебра таких суперпреобразований не замыкается!

## Суперпреобразования для массивных полей

- Рассмотрим массивный бозон и фермион. Поправки к уравнениям бозонных ноль-форм:

$$\begin{aligned}\Delta_b = & \alpha_{k,l} Y^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(l)} \psi^\alpha + \beta_{k,l} Y^{\alpha(k)\eta\dot{\alpha}(l)} \psi_\beta \\ & + \gamma_{k,l} Y^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l-1)} \psi^{\dot{\alpha}} + \delta_{k,l} Y^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l)\dot{\beta}} \psi_{\dot{\beta}}\end{aligned}$$

- При  $\psi^\alpha = 0$ ,  $\psi^{\dot{\alpha}} = 0$  исходные уравнения инвариантны относительно следующих глобальных суперпреобразований

$$\begin{aligned}\delta W^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l)} = & \alpha_{k,l} Y^{\alpha(k-1)\dot{\alpha}(l)} \zeta^\alpha + \beta_{k,l} Y^{\alpha(k)\beta\dot{\alpha}(l)} \zeta_\beta \\ & + \gamma_{k,l} Y^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l-1)} \zeta^{\dot{\alpha}} + \delta_{k,l} Y^{\alpha(k)\dot{\alpha}(l)\dot{\beta}} \zeta_{\dot{\beta}}\end{aligned}$$

и аналогично для фермионов

- Однако алгебра таких суперпреобразований не замыкается!

## Супермультиплеты

- Для замыкания супералгебры массивный супермультиплет должен содержать два бозона и два фермиона
- Есть две возможности:

$$\left( \begin{array}{ccc} & s+1 & \\ s+1/2 & & s+1/2 \\ & s & \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} & s+1/2 & \\ s & & s \\ & s-1/2 & \end{array} \right)$$

- При ненулевом космологическом члене массы бозонов и фермионов не равны, а удовлетворяют соотношению:

$$M_b^2 = M_f(M_f \pm \lambda)$$

- В каждом случае два бозона должны иметь противоположную четность