Преобразования Ханкеля целого порядка и связанные с ними степенные ряды

А.В. Киселев

Отдел теоретической физики
НИЦ «Курчатовский институт» - ИФВЭ

The Ramanujan J.: статья принята к публикации

Семинар ОТФ, 8 сентября 2020 года

«Слеп физик без математики»

План рассказа

- Парциальные волны и преобразование Ханкеля.Асимтотический ряд.
- Постановка задачи.
- Мастер-теорема Рамануджана и ее обобщение.
- Представление преобразования Ханкеля целого порядка в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда.
- Примеры
- Заключение

Разложение амплитуды по парциальным волнам

$$A(s,t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(\cos\theta)$$

Последние имеют асимптотику

$$A_l(s)\Big|_{l,s\to\infty} = f(s)\exp(-2lm/\sqrt{s})$$

При малых углах рассеяния $\theta = \dfrac{2q}{\sqrt{s}} = \dfrac{bq}{l}$

$$P_l(\cos\theta)\Big|_{\theta\ll 1} = P_l\left(\cos\frac{bq}{l}\right)\Big|_{l\gg 1}$$

Используем формулу: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\left[\nu^{\mu} P_{\nu}^{-\mu}\left(\cos\frac{x}{\nu}\right)\right] = J_{\mu}(x) \quad (x>0)$

$$\Rightarrow \quad 16\pi \sum_{l=l_0\gg 1}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(\cos\theta) = 8\pi s \int_{b_0(s)}^{\infty} dbb\, A(b,s) J_0(qb)$$

Эйкональное приближение для амплитуды

$$A(s,t) = 4\pi i s \int_0^\infty dbb \left[1 - e^{i\chi(b,s)}\right] J_0(qb)\ .$$

Связь эйкональной функции с Борновской амплитудой

$$\chi(s,b) = \frac{1}{4\pi s}\int_0^\infty dqq J_0(qb)\, A_{\rm B}(s,q) \quad \longrightarrow \quad A_{\rm B}(s,q) = 4\pi s \int_0^\infty dbb\, J_0(qb)\, \chi(s,b)\ .$$

Асимптотика эйкональной функции

$$|\chi(b,s)|\Big|_{\substack{s\gg m^2 \\ bm\gg 1}} = 2f(s)\exp(-bm)$$

ограничивает выбор Борновской амплитуды

Преобразование Ханкеля порядка ν

$$H_\nu[f(x)](q) = \int_0^\infty x\, f(x)\, J_\nu(qx)\, dx$$

Функция f(x) непрерывна или кусочно –непрерывна с конечными скачками

и интеграл $\int_0^\infty x^{1/2}\,|\,f(x)|\,dx$ **конечен**

q-зависимость?

Первое формальное (без доказательства сходимости) разложение H_0[f(x)](q) в степенной ряд (*Willis, 1948*)

$$\int_0^\infty f(x)\, J_0(qx)\, dx = \frac{f(0)}{q} - \frac{1}{2}\frac{f^{(2)}(0)}{q^3} + \frac{1}{2^2}\frac{3}{2!}\frac{f^{(4)}(0)}{q^5} + \dots$$

В ряде работ были получены асимптотические ряды для $H_\nu[f(x)](q)$ для больших значений параметра q при различных условиях на поведение функции f(x):

***Hsu(1961), Slonovski (1968), Handelsman (1971), Mackinnon (1972), Wong (1976), Soni (1982)* и др.**

Можно ли сопоставить преобразованию Ханкеля $H_\nu[f(x)](q)$ не асимптотический, но абсолютно и равномерно сходящийся ряд?

Какие при этом следует наложить условия на функцию f(x) и/или ее производные?

Решить данную проблему нам поможет обращение к мастер-теореме Рамануджана

В дальнейшем полагаем $\nu = n \geq -1$ и $q>0$

Не пора ли, друзья мои, нам замахнуться на Сринивасу,понимаете ли, м-м, нашего Рамануджана?

Рамануджан любил говорить, что формулы ему внушает во сне богиня Намаккаль. Интересно отметить, что действительно он часто, вставая по утрам с кровати, тут же записывал готовые формулы.

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} = 3.$$

Эту красивую формулу Рамануджан получил еще в школьные годы следующим образом: он написал последовательность очевидных равенств

$$\begin{aligned} n(n+2) &= n\sqrt{1+(n+1)(n+3)} = \\ &= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}} = \ldots, \end{aligned}$$

а затем подставил $n = 1$. Вопрос о законности перехода к пределу Рамануджана не интересовал. Действуя так же, читатель может попробовать самостоятельно получить похожую формулу

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}} = 4.$$

$$\frac{4}{\pi - 2} = 3 + \cfrac{1\cdot 3}{5 + \cfrac{2\cdot 4}{7 + \cfrac{3\cdot 5}{9 + \cfrac{4\cdot 6}{11 + \ldots}}}}$$

$$e = 3 + \cfrac{-1}{4 + \cfrac{-2}{5 + \cfrac{-3}{6 + \cfrac{-4}{7 + \ldots}}}}$$

$$1 + 9\left(\frac{1}{4}\right)^4 + 17\left(\frac{1\times 5}{4\times 8}\right)^4 + 25\left(\frac{1\times 5\times 9}{4\times 8\times 12}\right)^4 + \cdots = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!}{k!^4}\frac{26390k + 1103}{396^{4k}}$$

Формула Харди-Рамануджана

(Hardy, Ramanujan, 1918)

Пусть *p(n)* есть число разбиений натурального числа n на сумму других натуральных чисел

Например, *p*(5) = 7: {5}, {4+1}, {3+2}, {3+1+1}, {2+2+1}, {2+1+1+1}, {1+1+1+1+1}

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{k}\,A_k(n)\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\sinh\left[\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n-\frac{1}{24}\right)}\right]\right)$$

$$A_k(n)=\sum_{0\le m\le k;(m,k)=1}\exp\left[\pi i\left(s(m,k)-\frac{2mn}{k}\right)\right]$$

где *s(m,k)* есть сумма Дедекинда, $s(p,q)=\frac{1}{4q}\sum_{r=1}^{q-1}\cot\left(\frac{\pi pr}{q}\right)\cot\left(\frac{\pi r}{q}\right)$

Асимптотика: $p(n)=\frac{1}{4n\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right),\quad n\to\infty$

Связь формулы Харди-Рамануджана со статистической физикой

N **– число невзаимодействующих линейных осцилляторов**

$$n\hbar\omega = E - \frac{1}{2}N\hbar\omega$$

E **– энергия ансамбля**

$p_N(n)$ - число способов распределить n квантов энергии между N осцилляторами

Предел больших значений n (большой E)

$$p_N(n) \cong p(n) = \frac{1}{4n\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$$

$$\Gamma(E) = \frac{\hbar\omega}{4E\sqrt{3}}\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2E}{3\hbar\omega}}\right)$$ **(число микросостояний)**

Вернемся к нашим баранам

Мастер-теорема Рамануджана

Let $\varphi(z)$ be analytic (single-valued) function, defined on a half-plane

$$H(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) \geqslant -\delta\}$$

for some $0 < \delta < 1$. Suppose that, for some $A < \pi$, $\varphi(z)$ satisfies the growth condition

$$|\varphi(\sigma + i\tau)| < Ce^{P\sigma + A|\tau|}$$

for all $z = \sigma + i\tau \in H(\delta)$. Then the identity

$$\int\limits_0^\infty x^{s-1} \left[\varphi(0) - x\varphi(1) + x^2\varphi(2) - \ldots\right] dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \varphi(-s)$$

holds for all $0 < \Re(s) < \delta$.

Связь мастер-теоремы с теоремой Карслона

Обобщение мастер-теоремы Рамануджана

(*А.К. , 2019*)

Let $\varphi(z)$ be meromorphic function which obeys the conditions of the Ramanujan master theorem. Suppose that $\varphi(z)$ has a finite number of poles at the points z_i $(i = 1, 2, \ldots N)$ with $0 > \mathfrak{Re}(z_i) > -\delta$. Then

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-x)^m\varphi(m) + \pi\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Res}\left[\frac{\varphi(-s)\,x^{-s}}{\sin(\pi s)}; -z_i\right] = \frac{1}{2i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\varphi(-s)}{\sin(\pi s)}\,x^{-s}\,ds\ ,$$

where $-\min[\mathfrak{Re}(z_1), \ldots, \mathfrak{Re}(z_N)] < a < \delta$.

Преобразование Ханкеля и его степенной ряд

THEOREM 1. The Hankel transform of order zero can be presented by an absolutely and uniformly convergent series for $q > a > 0$

$$\mathcal{H}_0[f(x)](q) = \frac{1}{q^3}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma^2(m+1)}\,f^{(2m+1)}(0)\,(2q)^{-2m}\,,$$

provided that

(1) $f(-x) \neq f(x)$;

(2) $f(x)$ is a regular function at a point $x = 0$, and its Taylor series has the form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}(-x)^k\,,$$

where $(-1)^k g^{(k)}(x)$ is the k-th derivative of $f(x)$;

(3) $x^{1/2}f(x) \to 0$, as $x \to \infty$;

(4) $g^{(s)}(0)$ is a regular (analytic single-valued) function defined on a half-plane

$$H(\delta) = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geqslant -\delta\}$$

for some $3/4 < \delta < 1$ and satisfies the growth condition

$$|g^{(s)}(0)| < Ca^{\Re(s)}$$

for some $a > 0$, and all $s \in H(\delta)$.

Я с дрожью ужаса отворачиваюсь от ваших несчастных проклятых функций, у которых нет производных **(Ш. Эрмит)**

Если бы я только имел теоремы! Тогда я мог бы достаточно легко найти доказательства.

Б. Риман

Доказательство Теоремы 1:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma^2(m+1)}f^{(2m+1)}(0)\,(2q)^{-2m}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{q^2}\right)^m\varphi(m)\,,$$

where

$$\varphi(s)=\frac{\Gamma(2s+2)}{2^{2m}\Gamma^2(s+1)}\,g^{(2s+1)}(0)\,.$$

Далее – применяем мастер-теорему к данной функции $\varphi(s)$

Преобразование Ханкеля *первого* порядка

THEOREM 2. The first-order Hankel transform

$$\mathcal{H}_1[f(x)](q) = \int_0^\infty x f(x) J_1(qx)\, dx$$

can be presented by an absolutely and uniformly convergent series for $q > a > 0$

$$\mathcal{H}_1[f(x)](q) = \frac{1}{q^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma^2(m+1)} f^{(2m)}(0)\,(2q)^{-2m} \,,$$

provided that $f(x)$ and its derivatives at $x = 0$ satisfy conditions (**2**)-(**4**) of theorem 1, and the condition $f(-x) \neq f(x)$ is replaced by the condition $f(-x) \neq -f(x)$.

Док-во: $$\int_0^\infty x f^{(1)}(x) J_1(qx)\, dx = -q \int_0^\infty x f(x) J_0(qx)\, dx \,.$$

Преобразование Ханкеля *второго* порядка

THEOREM 3. The second-order Hankel transform

$$\mathcal{H}_2[f(x)](q) = \int_0^\infty x f(x) J_2(qx)\, dx$$

can be presented by an absolutely and uniformly convergent series for $q > a > 0$

$$\mathcal{H}_2[f(x)](q) = \frac{2}{q^2} f(0) + \frac{4}{\pi q^3} \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{\Gamma(m+5/2)\,\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(2m+2)} f^{(2m+1)}(0) \left(\frac{q}{2}\right)^{-2m}$$

provided that $f(x)$ and its derivatives at $x = 0$ satisfy all the conditions of theorem 1.

Для доказательства применим *обобщенную* мастер-теорему, заметив что:

$$\frac{2}{q^2} f(0) = \pi \mathrm{Res}\left[F(-s) \left(\frac{q}{2}\right)^{2s}, 1/2\right],$$

where

$$F(s) = \frac{4}{\pi q^3} \frac{\Gamma(s+5/2)\,\Gamma(s+1/2)}{\Gamma(2s+2)} f^{(2s+1)}(0) .$$

Преобразование Ханкеля *целого* порядка *n*

THEOREM 4. The Hankel transform of order $n \geqslant -1$ can be presented by an absolutely and uniformly convergent series for $q > a > 0$

$$\mathcal{H}_n[f(x)](q) = \frac{2}{q^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k/2 + n/2 + 1)}{\Gamma(n/2 - k/2)\,\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) \left(\frac{q}{2}\right)^{-k},$$

provided that $f(x)$ and its derivatives at $x = 0$ satisfy all the conditions of theorem 1, except for the condition $f(-x) \neq f(x)$ which is replaced by the following condition

$$f(-x) \neq \begin{cases} +f(x)\,, & n \text{ even}\,, \\ -f(x)\,, & n \text{ odd}\,. \end{cases}$$

Для доказательства используем *усиленный* принцип математической индукции:

Рассмотрим последовательность утверждений P_1, P_2,P_2, …
Если из предположения, что для любого натурального m
все P_1, P_2, …P_{m-1} истинны, следует истинность P_m ,
то P_n истинно для любого натурального $n \geq 1$

В нашем случае *P(n)* есть утверждение теоремы 4 для преобразования Ханкеля порядка *n*. Выше было доказано, что оно истинно для *n=0, 1 и 2*

Используем связь «соседних» функций Бесселя

$$(n-1)\int_0^\infty xf(x)J_{n+1}(qx)\,dx = (n+1)\int_0^\infty xf(x)J_{n-1}(qx)\,dx + \frac{2n}{q}\int_0^\infty xf^{(1)}(x)J_n(qx)\,dx\,.$$

Тогда нетрудно показать, что из истинности *P(m-1)* и *P(m)* ($m \geq 2$) следует истинность *P(m+1)*

Замечания:

1. Теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если $f^{(2m)}(0) = 0$ для всех m ($f^{(2m+1)}(0) = 0$ для теоремы 2)

2. Если для производных в нуле $f^{(s)}(0)$ условие роста не выполнено, ряды становятся асимптотическими

3. В пределе больших q, $H_0[f(x)](q) = O(q^{-2})$, в то время как $H_n[f(x)](q) = O(q^{-3})$ для $n = -1, 1, 2, \ldots$

Примеры применения доказанных теорем

1. n ≥ -1, f(x) = exp(-ax), a>0

$$I(q) = \int_0^\infty x e^{-ax} J_n(qx)\, dx \,.$$

Since $f^{(n)}(0) = (-1)^n a^n$, we get

$$\begin{aligned} I(q) &= \frac{2}{q^2} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(k/2+n/2+1))}{\Gamma(n/2-k/2)} \left(-\frac{2a}{q}\right)^k \\ &= \frac{1}{q^2}\left(n + \frac{\partial}{\partial \ln x}\right) \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(k/2+n/2)}{\Gamma(n/2-k/2)} (-2\,x)^k \,, \end{aligned}$$

where $x = a/q$. The series on the second line of this equation is equal to

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(k/2+n/2)}{\Gamma(n/2-k/2)} (-2\,x)^k = \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}} \,.$$

This series converges for $|x| < 1$. As a result, we come to the expression

$$\begin{aligned} I(q) &= \frac{1}{q^2}\left(n + \frac{\partial}{\partial \ln x}\right) \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^{n-1}}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= -\frac{1}{q^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{(\sqrt{1+x^2}-x)^{n}}{\sqrt{1+x^2}} \,. \end{aligned}$$

2. n =0, f(x) = exp(-ax) I_0(cx), a > c > 0
(I_0(z) - модифицированная функция Бесселя первого рода)

$$I(q) = \int_0^\infty x e^{-ax} I_0(cx) J_0(qx)\, dx \ ,$$

For odd-order derivatives, we obtain

$$f^{(2m+1)}(0) = -a^{2m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k} \binom{2k}{k} \left(\frac{c^2}{4a^2}\right)^k ,$$

that results in

$$I(q) = \frac{a}{q^3} F_4\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, -\frac{a^2}{q^2}, -\frac{c^2}{q^2}\right) .$$

Here $F_4(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$ is the hypergeometric series of two variables. It is the uniformly and absolutely convergence series for $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} < 1$.

On the other hand, we find in well-known tables of integrals

$$I(q) = \frac{2a}{\pi} \left(\frac{k}{qc}\right)^{3/2} (1-k^2)^{3/4} \left[2\mathrm{E}(k) - \mathrm{K}(k)\right] ,$$

were $\mathrm{K}(k)$ and $\mathrm{E}(k)$ are the complete elliptic integrals of the first and second kind, respectively, and

$$k = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{q^2 + a^2 - c^2}{\sqrt{(q^2 + a^2 - c^2)^2 + 4q^2c^2}}\right]^{1/2} .$$

Заключение

- Преобразование Ханкеля $H_n[f(x)](q)$ изучено для целых $n \geq -1$ и $q > 0$.
- Доказано, что оно представимо абсолютно и равномерно сходящимся рядом по обратным степеням q, при условии, что $f(x)$ и ее производные удовлетворяют определенным условиям.
- Сформулированные и доказанные теоремы проиллюстрированы рядом примеров.
- Подчеркнем, что в литературе для преобразований Ханкеля представлены лишь асимптотические ряды.

Спасибо за внимание!


—А вот у меня вопрос!..
CARTOONBANK.RU

Back-up slides

…да за такие доказательства года на три в Соловки!

М.А. Булгаков. Мастер и Маргарита. Глава 1.
Никогда не разговаривайте с незнакомцами

Ramanujan's nested radical

S. Ramanujan (1887-1920)

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \cdots}}}}$$

Proof: Define $f(x) = x + n + a$, so that $f(x)^2 = ax + (n+a)^2 + xf(x+n)$.

Set $a = 0$, $n = 1$, $x = 2$ and substitute recursively for $f(x)$.