Космологические эффекты в суперсимметричной полевой модели со скалярным полем

Брандышев Петр Евгеньевич

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Фролов Борис Николаевич
Московский педагогический государственный университет
Кафедра теоретической физики им. Э.В. Шпольского

petr.brandyshev@mail.ru

26 января 2021

Цели работы

Целью данной работы является изучение теорий супергравитации и их применение в космологии (в особенности, для объяснения природы темной энергии). Для реализации обозначенной цели решаются следующие задачи:

1. Построение конформной теории $4D$ $N = 1$ супергравитации, являющейся суперсимметричным обобщением теории скалярного поля Дирака.
2. Построение калибровочной теории супергравитации на основе суперконформной группы, являющейся суперсимметричным обобщением группы Пуанкаре-Вейля.
3. Построение действия конформной супергравитации, описывающего взаимодействие инфлатона с полями Хиггса.
4. Поиск космологических решений в низкоэнергетическом приближении М-теории с поправками высших порядков по кривизне.
5. Исследование бозонного сектора низкоэнергетической теории суперструн типа *IIA*.

Краткое содержание презентации

Часть 1 Предварительные рассуждения. Введение в проблему.

1.1 Суть проблемы космологической постоянной простыми словами.
1.2 Действительно ли вакуум обладает энергией? Экспериментальные доказательства существования энергии вакуума
1.3 Почему темная энергия - это именно энергия вакуума?
1.4 Зачем нужна суперсимметрия и масштабная инвариантность?

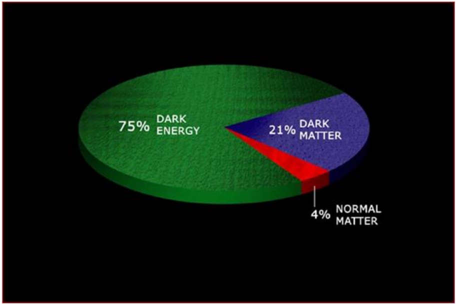
Часть 2 Результаты научной работы.

2.1 Спонтанное нарушение масштабной симметрии
2.2 Инфлатон и поля Хиггса в конформной теории супегравитации
2.3 Космологические решения в M-теории и теории суперструн.
2.4 Космологические решения в теории суперструн типа IIA

Часть I

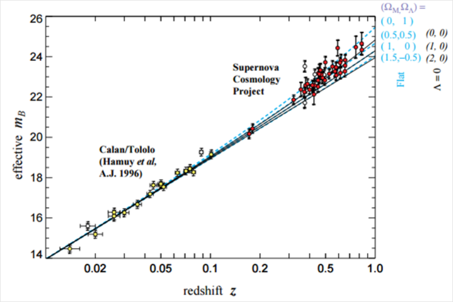
Введение в проблему.

Энергетический баланс Вселенной



Данные WMAP, 2009 г.

Открытие ускоренного расширения Вселенной



Зависимость фотометрического расстояния от красного смещения. Данные получены независимо двумя группами исследователей: The Supernova cosmology project и High-z Supernova Search Team arXiv:astro-ph/9812133

Нулевые колебания квантовых полей

Квантовое поле можно рассматривать как совокупность гармонических осцилляторов. Гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_k \left[\hbar\omega_k({a_k}^\dagger a_k + a_k {a_k}^\dagger)\right], \tag{1}$$

Здесь для простоты опускается суммирование по спиновым состояниям и считается, что поле нейтрально и частицы поля по своим свойствам неотличимы от античастиц (действительное скалярное поле). Из коммутационных соотношений для бозонных полей

$$a_k {a_k}^\dagger - {a_k}^\dagger a_k = 1, \tag{2}$$

следует

$$H = \sum_k \left[\hbar\omega_k\left(N_k + \frac{1}{2}\right)\right], \tag{3}$$

где $N_k = {a_k}^\dagger a_k$ – оператор числа частиц.

Тогда энергия вакуума (при отсутствии частиц $N = 0$)

$$E_0 = \sum_k \frac{\hbar\omega_k}{2}. \tag{4}$$

Проблема космологической постоянной[1]

Плотность энергии вакуума (энергии нулевых колебаний)

$$\rho_v = \int\limits_0^{M_P} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\omega(k)}{2}, \quad \hbar = c = 1, \tag{5}$$

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 + m^2} \approx k, \tag{6}$$

Используя сферическую систему координат в импульсном пространстве

$$\int d^3k = \int 4\pi k^2 dk, \tag{7}$$

находим

$$\rho_v = \int\limits_0^{M_P} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \frac{\omega(k)}{2} \approx \int\limits_0^{M_P} \frac{2\pi k^3 dk}{(2\pi)^3} \approx \frac{M_P^4}{16\pi^2}. \tag{8}$$

Наблюдаемое значение плотности энергии вакуума:

$$\rho_v \approx 10^{-29}\text{г}/\text{см}^3 = 10^{-47}\text{ГэВ}^4. \tag{9}$$

[1] Вайнберг С. Проблема космологической постоянной // УФН 1989. Т. 158. С. 639–678

Экспериментальные доказательства существования энергии вакуума

1. Лэмбовский сдвиг (экспериментально установлен Лэмбом в 1947 г., Нобелевская премия 1955 г.). [2]
2. Эффект Казимира (предсказан Казимиром в 1948 г, экспериментально обнаружен в 1957 г.) [3]
3. Поляризация вакуума и экранирование заряда в вакууме, бегущие константы связи
4. Аномальный магнитный момент

[2] Lamb Jr W. E., Retherford R. C. Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method — 1947. — Vol. 72. — P. 241.;

[3] Sparnaay, M. J. Attractive Forces between Flat Plates // Nature. — 1957. — Vol. 180, no. 4581. — P. 334—335.

Эффект Казимира

Соотношение неопределенностей

$$\Delta E \Delta t \geqslant \hbar. \tag{10}$$

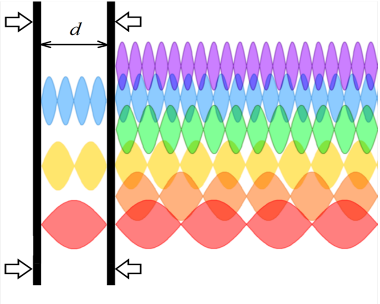
Разрешенные длины волн

$$\lambda N = 2d. \tag{11}$$

Сила, действующая на единицу площади

$$\frac{F}{S} = \frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}. \tag{12}$$

S – площадь пластинки



Темная энергия $\stackrel{?}{=}$ энергия вакуума

Темная энергия как энергия вакуума

Уравнение состояния темной энергии:

$$\frac{p}{\rho} = \omega = -1. \tag{13}$$

Термодинамическое уравнение Фридмана:

$$dE + pdV = 0. \tag{14}$$

Подставляя в уравнение Фридмана соотношения

$$E = \rho V, \quad V \sim a^3, \tag{15}$$

легко получить

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \tag{16}$$

Для темной энергии

$$\rho = const. \tag{17}$$

Плотность энергии нерелятивистской материи:

$$\rho \approx \frac{Nm}{V} \sim \frac{1}{a^3}. \tag{18}$$

Плотность энергии излучения

$$\rho \approx \frac{N\omega}{V} \sim \frac{1}{a^4} \quad \omega = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a}{a_0}. \tag{19}$$

Зачем нужна суперсимметрия?

Гамильтониан для фермионов (для простоты игнорируется суммирование по спину):

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left[\hbar\omega_k (b_k{}^\dagger b_k - b_k b_k{}^\dagger) \right], \tag{20}$$

Для фермионов:

$$b_k b_k{}^\dagger + b_k{}^\dagger b_k = 1, \quad E = \sum_k (\hbar\omega_k N_k) - E_0, \tag{21}$$

Для бозонов:

$$a_k a_k{}^\dagger - a_k{}^\dagger a_k = 1, \quad E = \sum_k (\hbar\omega_k N_k) + E_0. \tag{22}$$

Преимущества суперсимметрии

1. Теория суперструн позволяет квантовать гравитацию
2. Суперсимметрия может способствовать решению проблемы космологической постоянной
3. Единая теория фундаментальных взаимодействий
4. Объяснение природы темной материи
5. Объединение констант электрослабых и сильных взаимодействий при высоких энергиях

Зачем нужна масштабная инвариантность?

1. Масштабная инвариантность в сверхранней Вселенной (Плато Харрисона–Зельдовича)[4].
2. Понимание поведения гравитации на планковских масштабах
3. Квантование гравитации
4. Разрешение парадокса Хокинга для черных дыр[5]

[4] Сажин М.В. Анизотропия и поляризация реликтового излучения. Последние данные // Успехи физических наук. 2004. Т. 174. № 2. С. 197–205.

[5] Gerard 't Hooft, Local conformal symmetry in black holes, standard model, and quantum gravity // Conference: C15-07-12, p.3-12

Gerard 't Hooft, Singularities, horizons, firewalls, and local conformal symmetry // arXiv:1511.04427v1 [gr-qc] 13 Nov 2015

Алгебра суперсимметрии

Операторы алгебры суперсимметрии являются майорановскими спинорами и удовлетворяют антикоммутационному соотношению

$$\{Q^\alpha, Q^\beta\} = 2(\gamma^m C^{-1})^{\alpha\beta}\partial_m. \tag{23}$$

где C - матрица зарядового сопряжения.

$$\{Q^\alpha, Q^\beta\} = Q^\alpha Q^\beta + Q^\beta Q^\alpha. \tag{24}$$

Координаты суперпространства

$$z^A = (x^m, \theta^\alpha), \quad m = 0, 1, 2, 3. \tag{25}$$

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = \theta^\alpha\theta^\beta + \theta^\beta\theta^\alpha = 0. \tag{26}$$

Можно проверить, антикоммутационному соотношению (23) удовлетворяет дифференциальный оператор

$$Q = (\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^m\theta\partial_m), \tag{27}$$

где θ - четырехкомпонентный майорановский спинор, составленный из антикоммутирующих координат суперпространства.

Конформная алгебра Пуанкаре-Вейля

Наиболее общие преобразования координат, инвариантные на световом конусе, имеют вид

$$\delta x^m = \varepsilon^m + \varepsilon^{mn} x_n + \varepsilon x^m + \Big(\rho^m x^n - 2\rho^n x^m\Big) x_n. \tag{28}$$

Инфинитезимальный оператор конформных преобразований (если не учитывать конформные бусты)

$$U(\varepsilon_{mn}, \varepsilon_m, \varepsilon, \rho) = I + (1/2)\varepsilon_{mn} M^{mn} + \varepsilon_m P^m + \varepsilon D. \tag{29}$$

Коммутационные соотношения алгебры Пуанкаре–Вейля

$$[M_{mn}, M^{pq}] = 4M_{[m}{}^{[q}\delta^{p]}{}_{n]}, \quad [M^{mn}, P_q] = 2P^{[m}\delta^{n]}{}_q, \tag{30}$$

$$[M^{mn}, D] = 0, \quad [P^m, D] = P^m, \tag{31}$$

Суперсимметричное обобщение алгебры Пуанкаре–Вейля

Генераторы преобразований суперсимметрии Q и генераторы группы Пуанкаре–Вейля M, P и D образуют замкнутую градуированную алгебру Ли

$$\{Q, Q^T\} = 2(\gamma^m C^{-1})P_m, \quad [Q, M_{mn}] = \sigma_{mn} Q, \tag{32}$$

$$[Q, D] = \frac{1}{2}Q, \quad [Q, P_m] = 0. \tag{33}$$

$$\sigma_{mn} = \frac{1}{8}[\gamma_m, \gamma_n]. \tag{34}$$

Координатное представление супералгебры Пуанкаре–Вейля

$$Q = (\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \gamma^m \theta \partial_m), \tag{35}$$

$$M_{mn} = x_m \partial_n - x_n \partial_m + \bar{\theta}\sigma_{mn}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}, \tag{36}$$

$$P_m = \partial_m, \quad D = x^m \partial_m + \frac{1}{2}\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}}, \tag{37}$$

Суперполе

Суперкоординаты являются грассмановыми числами

$$\theta^i\theta^j + \theta^j\theta^i = 0, \tag{38}$$

$$\theta^1\theta^1 = \ldots = \theta^4\theta^4 = 0, \tag{39}$$

Любое суперполе можно разложить в конечный ряд по суперкоординатам

$$V = V_0 + V_1\theta^1 + V_2\theta^1\theta^2 + V_3\theta^1\theta^2\theta^3 + \ldots, \tag{40}$$

Скалярное суперполе можно записать в виде

$$\begin{aligned} V = C - i(\bar\theta\gamma_5\xi) - i(\bar\theta\gamma_5\theta)Re(\mathcal{H}) - (\bar\theta\theta)Im(\mathcal{H}) + \frac{i}{2}(\bar\theta\gamma_5\gamma^m\theta)B_m \\ -i(\bar\theta\gamma_5\theta)(\bar\theta\psi + \frac{1}{2}\bar\theta\gamma^m\partial_m\xi) - \frac{1}{4}(\bar\theta\gamma_5\theta)^2(D + \frac{1}{2}\Box C). \end{aligned} \tag{41}$$

Законы преобразования суперсимметрии для компонентных полей можно найти из равенства

$$\delta V = \varepsilon Q V, \tag{42}$$

где

$$Q = (\frac{\partial}{\partial\bar\theta} - \gamma^m\theta\partial_m) \tag{43}$$

Локальная суперсимметрия (супергравитация)

Коммутационные и антикоммутационные соотношения алгебры Пуанкаре-Вейля можно записать в общем виде

$$[T_A, T_B]_{\pm} = f^C{}_{AB} T_C. \tag{44}$$

где $f^C{}_{AB}$ – структурные константы градуированной Алгебры Ли.

$$[T_A, T_B]_{\pm} = T_A T_B + (-1)^n T_B T_A. \tag{45}$$

$$T_A = P_a, M_{mn}, Q, D \tag{46}$$

$$\hat{D}_\mu = \partial_\mu - W_\mu, \tag{47}$$

где вводятся калибровочные поля

$$W_\mu = W_\mu^A T_A = e^a{}_\mu P_a + (1/2)\Gamma^{mn}{}_\mu M_{mn} + \bar{\psi}_\mu Q + b_\mu D, \tag{48}$$

и ковариантная производная

$$\hat{D}_\mu = \partial_\mu - e^a{}_\mu P_a - (1/2)\Gamma^{mn}{}_\mu M_{mn} - \bar{\psi}_\mu Q - b_\mu D, \tag{49}$$

где $(\psi_\mu)^\alpha$ – спин–вектор Рариты–Швингера.

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^A{}_{\mu\nu} T_A = [\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu], \tag{50}$$

Таким образом, можно записать

$$\mathcal{R}^A{}_{\mu\nu} = \partial_\mu W^A{}_\nu - \partial_\nu W^A{}_\mu - f^A{}_{BC} W^B{}_\mu W^C{}_\nu, \tag{51}$$

Часть II

Результаты научной работы.

Конформно инвариантное действие для скалярного поля

Модель Бранса–Дикке

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \frac{1}{6}\sigma^2 R\right). \qquad (52)$$

где σ – скалярное поле единичного конформного веса.

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = e^{-2\varepsilon(x)}g_{\mu\nu} \quad \tilde{\sigma} = e^{\varepsilon(x)}\sigma. \qquad (53)$$

Переход к действию Гильберта–Эйнштейна осуществляется с помощью масштабных преобразований Вейля

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega g_{\mu\nu}. \qquad (54)$$

$$\tilde{R} = \Omega^{-1}\left[R - 3\nabla_\mu\nabla^\mu \ln\Omega - \frac{3}{2}\partial_\mu \ln\Omega\partial^\mu \ln\Omega\right] \qquad (55)$$

$$\Omega = \frac{\kappa^2\sigma^2}{3}, \qquad (56)$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2\sigma^2}{3}g_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{S} = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{-\tilde{g}}\tilde{R}. \qquad (57)$$

Действие конформной супергравитации

$$e^{-1}L = K(\phi^*,\phi)D_\mu\beta^* D^\mu\beta + (\beta D_\mu\beta^*)K^j D^\mu\phi_j +$$
$$+(\beta^* D_\mu\beta)D^\mu\phi^i K_j + |\beta|^2 K_j{}^i D_\mu\phi^j D^\mu\phi_i + \frac{1}{6}|\beta|^2 K(\phi^*,\phi)R - V. \tag{58}$$

где потенциал

$$V = V_F + V_D, \tag{59}$$

$$V_F = \kappa^4|\beta|^4 K^{-1}\left(6(f^i f_i) - 9\kappa^2|f|^2 + \frac{3}{2}\kappa^4|f|^2\phi^i\phi_i + 6\kappa^2 Re(f^* f^i\phi_i)\right), \tag{60}$$

$$f^i = \frac{\partial f}{\partial\phi_i}, \quad f_i = (f^i)^*, \quad \phi^j = (\phi_j)^* \tag{61}$$

$$V_D = \frac{1}{2}D_a D_a, \quad D_a = g_a|\beta|^2 K^j (T_a)_j{}^i\phi_i. \tag{62}$$

$$K_j{}^i = \frac{\partial^2 K}{\partial\phi^j\partial\phi_i}, \quad K_j = \frac{\partial K}{\partial\phi^j}. \tag{63}$$

Действие легко приводится к каноническому виду с помощью масштабных преобразований

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\kappa^2|\beta|^2 K}{3}g_{\mu\nu} \tag{64}$$

$$\int d^4x\left(\frac{1}{6}|\beta|^2 KeR\right) = \int d^4x\left[\frac{1}{2\kappa^2}\tilde{e}\tilde{R} - \frac{3}{2}\tilde{e}\partial_\mu\ln(|\beta|^2 K)\partial^\mu\ln(|\beta|^2 K)\right] \tag{65}$$

Спонтанное нарушение масштабной симметрии

Теория с одним скалярным полем, заряженным относительно $U(1)_g$,

$$S = \int d^4xe\Big(D_\mu\phi^* D^\mu\phi - V_D + \frac{1}{6}|\phi|^2 R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big), \qquad (66)$$

где

$$V_D = \frac{g^2}{8}|\phi|^4, \quad F_{\mu\nu} = \partial_{[\mu}B_{\nu]}. \qquad (67)$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\beta^2\varkappa}{6}g_{\mu\nu} \Rightarrow \Lambda = \frac{9g^2}{4\varkappa^2}, \qquad (68)$$

$$\varkappa = 8\pi G. \qquad (69)$$

Теория с двумя заряженными скалярными полями

$$\begin{aligned} S = \int d^4xe\Big(&D_\mu\phi^* D^\mu\phi - D_\mu\varphi^* D^\mu\varphi - W(\phi,\varphi) \\ &+\frac{1}{6}(|\phi|^2 - |\varphi|^2)R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\Big), \end{aligned} \qquad (70)$$

$$W = \frac{4}{3}\lambda^2\Big(|\phi|^2 - |\varphi|^2\Big)^2. \qquad (71)$$

$$\lambda^2 = \frac{\varkappa H^2}{8} \quad H^2 = \frac{3g^2}{\varkappa}. \qquad (72)$$

Поля Хиггса и нарушение электрослабой симметрии в МССМ

Калибровочная группа, описывающая электро–слабые взаимодействия

$$SU(2) \times U(1) \tag{73}$$

$$G = I + \frac{Y}{2} i\beta I + i\alpha_k T_k, \quad T_k = \frac{\tau_k}{2} \tag{74}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{75}$$

Поля Хиггса

$$\mathcal{H}_d = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_d^0 \\ \mathcal{H}_d^- \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_u = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_u^+ \\ \mathcal{H}_u^0 \end{pmatrix}, \tag{76}$$

Инвариантный суперпотенциал

$$\mu \mathcal{H}_d \varepsilon \mathcal{H}_u = \mu(\mathcal{H}_d^0 \mathcal{H}_u^0 - \mathcal{H}_d^- \mathcal{H}_u^+) \tag{77}$$

Инфлатон и поля Хиггса в конформной теории супегравитации

Действие теории супергравитации, описывающее взаимодействие полей Хиггса с инфлатоном, принимает вид

$$S = \int d^4xe\Big[-\frac{1}{2}D_\mu\phi^i D^\mu\phi_i + \frac{1}{2\kappa^2}R - V - \frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2\Big]. \tag{78}$$

Потенциал скалярных полей

$$V = V_D + V_F, \tag{79}$$

$$V_D = \frac{1}{2}D_aD_a, \quad D_a = \frac{3}{\kappa^2}g_aK^{-1}K^j(T_a)_j{}^i\phi_i. \tag{80}$$

$$V_F = 27K^{-3}\left(2f^if_i - 3\kappa^2|f|^2 + \frac{1}{2}\kappa^4|f|^2\phi^i\phi_i + 2\kappa^2 Re(f^*f^i\phi_i)\right), \tag{81}$$

$$K = e^{-\frac{\kappa^2\phi^i\phi_i}{6}}, \tag{82}$$

где суперпотенциал имеет вид

$$f = \mu\mathcal{H}_d^T\varepsilon\mathcal{H}_u + \lambda + \eta\phi + \rho\phi^2, \tag{83}$$

Спектр масс и космологическая постоянная

Для простоты рассмотрим набор действительных скалярных полей. Поле представляется в виде суммы вакуумного среднего и квантового поля

$$\varphi_i = v_i + \hat{h}_i, \quad v_i = \langle \varphi_i \rangle. \tag{84}$$

Потенциал можно разложить в ряд Тейлора

$$V = V(v_i) + \frac{\partial V(v_i)}{\partial \hat{h}_i} \hat{h}_i + \frac{\partial^2 V(v_i)}{\partial \hat{h}_i \partial \hat{h}_j} \hat{h}_i \hat{h}_j + \dots \tag{85}$$

Тогда первое слагаемое совпадет с космологической постоянной

$$V(v_i) = \Lambda. \tag{86}$$

Вакуум соответствует минимуму энергии. Условие экстремума требует выполнения равенства

$$\frac{\partial V(v_i)}{\partial \hat{h}_i} = 0. \tag{87}$$

Условие устойчивого положения равновесия будет выполнено, если массовая матрица

$$M^{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \hat{h}_i \partial \hat{h}_j} \tag{88}$$

положительно полуопределена

$$M^{ij} \hat{h}_i \hat{h}_j \geqslant 0 \quad \forall \hat{h}_i. \tag{89}$$

Данное условие в данном случае совпадает с условием отсутствия тахионов (частиц с мнимой массой).

Спектр масс и космологическая постоянная

Вакуумные значения полей Хиггса

$$\langle \mathcal{H}_d \rangle = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \mathcal{H}_u \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \tag{90}$$

Λ - космологическая постоянная (плотность темной энергии)

$$\kappa^2 \Lambda = 3H_0^2 \Omega_\Lambda, \tag{91}$$

$$\begin{aligned} \Lambda = 54\eta^2 e^{\kappa^2 v^2}\left(1 - \kappa^2 v^2\right) - 27 e^{\kappa^2 v^2}\Big(5\kappa^2\mu^2 v^4 + 3\kappa^2\lambda^2 - 3\kappa^4\lambda^2 v^2 \\ +3\kappa^4\mu^2 v^6 + \kappa^6 v^4 \lambda^2 + \kappa^6 v^8 \mu^2 + 2\kappa^6 v^6 \lambda\mu\Big). \end{aligned} \tag{92}$$

$$v^2 \approx 1,334 \cdot 10^{-33}, \tag{93}$$

Масса легчайшего скалярного бозона

$$m_h^2 \approx 540\mu^2 v^2 \kappa^2 = 4320\pi G \mu^2 v^2. \tag{94}$$

Массы дополнительных скалярных полей

$$m_1^2 \approx m_2^2 \approx m_C^2 \approx 216\mu^2. \tag{95}$$

$$m_C \approx m_1 \approx m_2 \approx 3,455 \cdot 10^{15} m_h \tag{96}$$

"No-go"теорема

Классические уравнения одиннадцатимерной теории супергравитации не имеют решений в виде пространства де Ситтера первого рода[6]

Способы, позволяющие обойти ограничения теоремы запрета:

1. Гипотеза дополнительных временных измерений [7]
2. Включение в теорию духовых полей [8]
3. Учет квантовых поправок

[6] Maldacena J., Nunez C. Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem // Int. J. Mod. Phys. A 2001. Vol. 16. P. 822-855.

[7] Арефьева И.Я., Волович И.В., Драгович Б.Г. Спонтанная редукция в многомерных теориях супергравитации (d=10,11) с произвольной сигнатурой // ТМФ. 1987. Том 70. № 3. Стр. 422-431.

[8] Арефьева И.Я., Волович И.В. Многообразия постоянной отрицательной кривизны как вакуумные решения в теории Калуцы-Клейна и суперструнах // ТМФ. 1985. Том 64. № 2. Стр. 329-336.

Действие одиннадцатимерной супергравитации

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1, \tag{97}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 = \int d^{(11)}x\sqrt{-g}[R - 24F^{SPQR}F_{SPQR} - \\ -\frac{\sqrt{2}}{3}\epsilon^{CFTSPQRIJKL}A_{CFT}F_{SPQR}F_{IJKL}],\end{aligned} \tag{98}$$

$$\mathcal{S}_1 = \kappa T\int d^{(11)}x\sqrt{-g}\left(U - \frac{1}{4!}E - \sqrt{2}V\right), \tag{99}$$

$$U = t_{M_1M_2\dots M_8}t^{N_1N_2\dots N_8}R^{M_1M_2}{}_{N_1N_2}\dots R^{M_7M_8}{}_{N_7N_8}, \tag{100}$$

$$E = \epsilon_{ADSM_1M_2\dots M_8}\epsilon^{ADSN_1N_2\dots N_8}R^{M_1M_2}{}_{N_1N_2}\dots R^{M_7M_8}{}_{N_7N_8}, \tag{101}$$

$$V = 6\epsilon^{SFTIJKLMNPQ}A_{SFT}J_{IJKLMNPQ}, \tag{102}$$

$$\begin{aligned}J_{IJKLMNPQ} = 4R^{A}{}_{BIJ}R^{B}{}_{CKL}R^{C}{}_{DMN}R^{D}{}_{APQ} - \\ -R^{AB}{}_{IJ}R_{ABKL}R^{CD}{}_{MN}R_{CDPQ},\end{aligned} \tag{103}$$

$$T = \frac{1}{2\pi l_{11}^3}, \quad \kappa = \frac{\pi l_{11}^9}{3^2 2^{12}}, \tag{104}$$

T – натяжение мембраны, l_{11} - планковская длина для $D = 11$, $\epsilon^{M_1M_2\dots M_k}$ – полностью антисимметричный тензор.

$$\begin{aligned}t^{MNPQIJKL} = -2(g^{MP}g^{NQ}g^{IK}g^{JL} + g^{MI}g^{NJ}g^{PK}g^{QL} + \\ +g^{MK}g^{NL}g^{PI}g^{QJ}) + 8(g^{NP}g^{QI}g^{JK}g^{LM} + \\ +g^{NI}g^{JP}g^{QK}g^{LM} + g^{NI}g^{JK}g^{LP}g^{QM}).\end{aligned} \tag{105}$$

Решения Фройнда–Рубина–Энглерта

Уравнения гравитационного поля

$$\begin{aligned} R^{MN} - \frac{1}{2} R g^{MN} + \frac{\kappa T}{2} [8 U^{(MN)} - U g^{MN} - \\ -8 \nabla_P \nabla_Q W^{P(MN)Q} - \frac{1}{4!} \Big(8 E^{(MN)} - E g^{MN} - \\ -16 \nabla_P \nabla_Q E^{P(MN)Q} \Big) + 16\sqrt{2} \nabla_P \nabla_Q V^{P(MN)Q}] = \\ = 12 \left(8 F^{MPQR} F^N{}_{PQR} - g^{MN} F^2 \right), \end{aligned} \tag{106}$$

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}^4 \times \mathbb{K}, \tag{107}$$

Решение Энглерта

$$\mathbb{K} = \{ x \in \mathbb{O} \mid n(x) = r \} = \mathbb{S}^7, \tag{108}$$

$$F_{\mu\nu\sigma\lambda} = \rho \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}, \tag{109}$$

$$A_{mnp} = \lambda S_{[mnp]}, \quad F_{mnpq} = \lambda \nabla_{[q} S_{mnp]}. \tag{110}$$

$$S_{mnp} = k h_m^{(i)} h_n^{(j)} h_p^{(k)} c_{ijk}, \tag{111}$$

$$e_i e_j = c_{ijk} e_k \tag{112}$$

$$c_{123} = c_{246} = c_{435} = c_{367} = c_{651} = c_{572} = c_{714} = 1, \tag{113}$$

Решение Фройнда–Рубина

$$\mathbb{M} = dS_4 \times \mathbb{S}^4 \times \mathbb{S}^3. \tag{114}$$

$$F_{\mu\nu\sigma\lambda} = \rho \epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}, \quad F_{mnpq} = 0, \tag{115}$$

Космологические решения в теории суперструн типа IIA

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_1 \tag{116}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_0 = \frac{1}{2k_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{-g_{10}}e^{2\varphi}(R + 4(d\varphi)^2 - \frac{1}{2\cdot 3!}H_3^2 - \frac{1}{4}e^{2\varphi}F_2^2 - \\ - \frac{1}{2\cdot 4!}e^{2\varphi}J_4^2 - \frac{1}{4(4!)^2}\epsilon_{10}K_4K_4B_2 + b_0\alpha'^3\mathcal{J}_1),\end{aligned} \tag{117}$$

$$\mathcal{S}_1 = T_1\int d^{10}x\sqrt{-g_{10}}\mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_1 = b_1\mathcal{J}_2 + b_2\mathcal{K}, \tag{118}$$

φ – действительное скалярное поле,

$F_2 = dA_1$, $H_3 = dB_2$, $K_4 = dC_3$ – соответственно 2-форма, 3-форма и 4-форма,

$$J_{MNPQ} = K_{MNPQ} + A_{[M}H_{NPQ]} \tag{119}$$

$$\mathcal{J}_1 = U + \frac{1}{4\cdot 2!}\epsilon_{10}\epsilon_{10}RRRR, \tag{120}$$

$$\mathcal{J}_2 = U - \frac{1}{4\cdot 2!}\epsilon_{10}\epsilon_{10}RRRR, \quad \mathcal{K} = \epsilon_{10}B_2[trR^4 - \frac{1}{4}(trR^2)^2]. \tag{121}$$

$$\epsilon_{10}K_4K_4B_2 = \epsilon^{M_1M_2\dots M_{10}}K_{M_1\dots M_4}K_{M_5\dots M_8}B_{M_9M_{10}}, \tag{122}$$

$$\epsilon_{10}\epsilon_{10}RRRR = \epsilon_{MNM_1M_2\dots M_8}\epsilon^{MNN_1N_2\dots N_8}R^{M_1M_2}{}_{N_1N_2}\dots R^{M_7M_8}{}_{N_7N_8}, \tag{123}$$

$$\epsilon_{10}B_2[trR^4 - \frac{1}{4}(trR^2)^2] = \frac{1}{4}\epsilon^{ABIJKLMNPQ}B_{AB}J_{IJKLMNPQ}, \tag{124}$$

Уравнения гравитационного поля

$$
\begin{aligned}
R^{MN} - \frac{1}{2} R g^{MN} \\
+\frac{1}{2}\left(a + b e^{2\varphi}\right)\left[8 U^{(MN)} - U g^{MN}\right] \\
-4 a e^{2\varphi} \nabla_P \nabla_Q \left(e^{-2\varphi} W^{P(MN)Q}\right) \\
-4 b e^{2\varphi} \nabla_P \nabla_Q W^{P(MN)Q} \\
+\frac{1}{16}\left(a - b e^{2\varphi}\right)\left[8 E^{(MN)} - E g^{MN}\right] \\
-a e^{2\varphi} \nabla_P \nabla_Q \left(e^{-2\varphi} E^{P(MN)Q}\right) \\
+b e^{2\varphi} \nabla_P \nabla_Q E^{P(MN)Q} + 8 f e^{2\varphi} \nabla_P \nabla_Q V^{P(MN)Q} = \\
= -4\left(\partial_M \varphi \partial_N \varphi - \frac{1}{2} (d\varphi)^2 g^{MN}\right) \\
+\frac{1}{2 \cdot 3!}\left(3 H^{MPQ} H^N{}_{PQ} - \frac{1}{2} H_3^2 g^{MN}\right) \\
+\frac{e^{2\varphi}}{2 \cdot 2!}\left(2 F^{MP} F^N{}_P - \frac{1}{2} F_2^2 g^{MN}\right) \\
+\frac{e^{2\varphi}}{2 \cdot 4!}\left(4 J^{MPQR} J^N{}_{PQR} - \frac{1}{2} J_4^2 g^{MN}\right),
\end{aligned}
\tag{125}
$$

Уравнения гравитационного поля

$$M = M^4 \times S^3 \times S^3. \tag{126}$$

$$H_{mnp} = \rho\epsilon_{mnp}, \quad H_{ijk} = \lambda\epsilon_{ijk}, \tag{127}$$

$$\begin{aligned} 3^2 2^5 \left(a + be^{2\varphi}\right) [2\gamma^4 k^4 + 4\gamma^4 H^4 - \\ -12k^4 H^4 - 85\gamma^8 + 51k^8 + 152H^8] + \\ +3^3 2^8 \left(a - be^{2\varphi}\right) H^4 k^2 \gamma^2 - 6H^2 - \\ -3k^2 - \gamma^2 = \frac{1}{4}\rho^2 - \frac{1}{4}\lambda^2, \end{aligned} \tag{128}$$

$$\begin{aligned} 3^2 2^5 \left(a + be^{2\varphi}\right) [2k^4 \gamma^4 + 4k^4 H^4 - \\ -12\gamma^4 H^4 - 85k^8 + 51\gamma^8 + 152H^8] + \\ +3^3 2^8 \left(a - be^{2\varphi}\right) H^4 k^2 \gamma^2 - 6H^2 - \\ -3\gamma^2 - k^2 = \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{4}\rho^2, \end{aligned} \tag{129}$$

$$\begin{aligned} 3^2 2^5 \left(a + be^{2\varphi}\right) [51k^8 + 51\gamma^8 - \\ -152H^8 - 6k^4\gamma^4] - 3H^2 - \\ -3\gamma^2 - 3k^2 = -\frac{1}{4}\rho^2 - \frac{1}{4}\lambda^2, \end{aligned} \tag{130}$$

Спонтанная компактификация дополнительных измерений

Интегрируя лагранжиан по компактным дополнительным измерениям, можно получить действие четырехмерной теории:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa_{10}^2}\int d^{10}x\sqrt{|g_{10}|}\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa_4^2}V\int d^4x\sqrt{|g_4|}\mathcal{L}, \tag{131}$$

$$V = \int d^4x\sqrt{|g_6|}, \tag{132}$$

$$\kappa_4^2 = \kappa_{10}^2 V. \tag{133}$$

Связь эффективной четырехмерной планковской длины с десятимерной планковской длиной

$$\frac{G_{10}}{G_4} = \frac{l_{10}^8}{l_4^2}. \tag{134}$$

Теория суперструн допускает большие дополнительные измерения[9]

[9] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter // Phys. Lett. B 429, 263 (1998). I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV // Phys. Lett. B 436, 257 (1998). N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. Dvali, Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity // Phys. Rev. D 59, 086004 (1999).

Решение, описывающее сверхраннюю инфляционную стадию

$$M = M^4 \times S^3 \times S^3. \tag{135}$$

$$ds^2 = a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) - dt^2, \quad a(t) = e^{Ht}. \tag{136}$$

$$ds_1^2 = r_1^2 d\phi^2 + r_1^2 sin^2\phi \left(d\alpha^2 + sin^2\alpha d\beta^2\right), \tag{137}$$

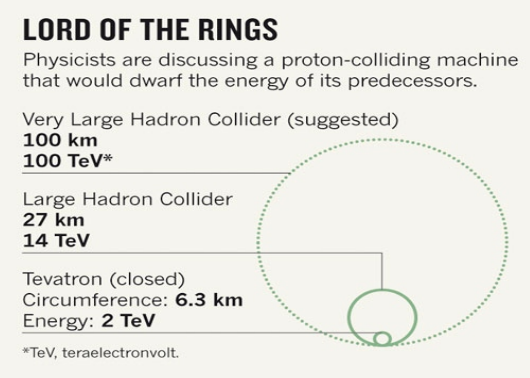
$$ds_2^2 = r_2^2 d\omega^2 + r_2^2 sin^2\omega \left(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{138}$$

$$H \sim l_{10}^{-1}, \tag{139}$$

$$l_{10}^8 = V_1 V_2 l_4^2, \tag{140}$$

$$V_1 = 2\pi^2 r_1^3, \quad V_2 = 2\pi^2 r_2^3, \quad l_4 \approx 1,616 \cdot 10^{-33}\text{см}. \tag{141}$$

Very Large Hadron Collider[10]



[10] Nature 503, 177 (14 November 2013) doi:10.1038/503177a

Результаты научной работы

1. Предложена конформная теория $4D$ $N = 1$ супергравитации со скалярным полем, описывающая темную энергию с постоянной положительной плотностью.
2. Получено космологическое решение в конформной теории супергравитации, приводящее к спонтанному нарушению масштабной инвариантности.
3. Построена конформная теория супергравитации с полями Хиггса и получено космологическое решение, описывающее современную стадию расширения Вселенной.
4. Найдены решения типа Энглерта и Фройнда-Рубина в одиннадцатимерной теории супергравитации с поправками четвертого порядка по кривизне.
5. Получено космологическое решение в низкоэнергетической теории суперструн типа IIA, описывающее сверхраннюю деситтеровскую стадию инфляции.

Результаты научной работы опубликованы в следующих журнальных статьях и материалах конференций

- Брандышев П.Е. Спонтанная компактификация одиннадцатимерной супергравитации с учетом поправок высших порядков по кривизне // Теоретич. матем. физ. 2016. Т. 188. № 1. С. 158–168.
- Brandyshev P.E. Cosmological Solutions in Low-Energy Effective Field Theory for Type IIA Superstrings // Gravit. Cosmol. 2017. Vol. 23. № 1. P. 15–19.
- Брандышев П.Е., Фролов Б.Н. Космологическая инфляция в конформной теории супергравитации // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2018. Вып. 3(24). С. 4–18.
- Брандышев П. Е., Фролов Б. Н. Инфлатон и поле Хиггса в конформной теории супергравитации // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2019. № 2. С. 4-14.
- Брандышев П.Е. Космологическая инфляция в М-теории // LIII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Москва, РУДН, 15-19 мая 2017 г. - Материалы конференции.
- Брандышев П.Е. Поле Хиггса и тёмная энергия в конформной теории супергравитации // LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Москва, РУДН, 14-18 мая 2018 г. -Материалы конференции. С. 22-24.
- Брандышев П.Е., Фролов Б.Н. Скалярные поля в конформной теории супергравитации // LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Москва, РУДН, 14-18 мая 2018 г. – Материалы конференции. С. 25-27.

Спасибо за внимание!