Кубические вершины для безмассовых супермультиплетов с высшими спинами в 4-мерном пространстве

По работе "Cubic interaction vertices for massless higher spin supermultiplets in d=4"
(Khabarov, Zinoviev, JHEP 02 (2021) 167, arXiv:2012.00482)

Классификация кубических вершин в 4d

Мы начнем с классификации *элементарных* кубических вершин для трех полей, поскольку они являются строительными блоками для суперсимметричных вершин.

Рассмотрим три безмассовые частицы с упорядоченными по убыванию спинами $s_1 \geq s_2 \geq s_3$. Классификация кубических вершин для трех безмассовых полей в пространстве Минковского была впервые получена в light-cone формализме (Мецаев, 2006). В соответствии с ней в пространстве размерности $d = 4$ существует три типа кубических вершин:

Тип	Число производных	Примечания
I	$N = s_1 + s_2 + s_3$	Тривиально калибровочно-инвариантные
II	$N = s_1 + s_2 - s_3\ (BBB)$ $N = s_1 + s_2 - s_3 - 1\ (BFF)$	Абелевы при $s_1 \geq s_2 + s_3$ Неабелевы при $s_1 < s_2 + s_3$
III	$N = s_1 - s_2 - s_3$	Известны только в light-cone формализме

Важную роль в классификации вершин играет суммарное число производных от физических полей, входящих в нее.

1. Вершины типа I - *тривиально калибровочно-инвариантные* - не меняют калибровочные преобразования.
2. *Абелевы* вершины типа II сохраняют алгебру калибровочных преобразований.
3. *Неабелевы* вершины типа II - модифицируют алгебру калибровочных преобразований. Именно неабелевы вершины наиболее просто строятся в реперном формализме. Они и были построены в нашей прошлой работе.

Классификация суперсимметричных кубических вершин в 4d

Безмассовые супермультиплеты высших спинов содержат один бозон и один фермион со спинами, отличающимися на $1/2$. Меньший из двух спинов называется *суперспином* супермультиплета. Рассмотрим три супермультиплета с упорядоченными по убыванию суперспинами $Y_1 \geq Y_2 \geq Y_3$. Из полей, образующих супермультиплеты, можно составить 4 элементарных вершины:

$$V_0(B_1, B_2, B_3), V_1(B_1, F_2, F_3), V_2(F_1, B_2, F_3), V_3(F_1, F_2, B_3).$$

Классификация суперсимметричных вершин в $d = 4$ пространстве Минковского была построена в light-cone формализме (Мецаев, 2019). Согласно данной классификации, каждая суперсимметричная вершина представляется в виде суммы трех элементарных вершин одного и того же типа. Таким образом, существует три типа суперсимметричных вершин, соответствующих типу элементарных компонент; каждый из этих типов подразделяется на подтипы в зависимости от суперспина входящих в него супермультиплетов. Далее, мы говорим только о неабелевых вершинах типа II. Суперсимметричные вершины типа II подразделяются на три подтипа:

Тип	Супермультиплеты	Элементарные компоненты
IIa	$(s_1, s_1 - 1/2), (s_2, s_2 - 1/2), (s_3, s_3 - 1/2)$	$V_0 + V_1 + V_2$
IIb	$(s_1 + 1/2, s_1), (s_2, s_2 - 1/2), (s_3 + 1/2, s_3)$ $(s_1, s_1 - 1/2), (s_2 + 1/2, s_2), (s_3 + 1/2, s_3)$	$V_0 + V_1 + V_3$ $V_0 + V_2 + V_3$
IIc	$(s_1 + 1/2, s_1), (s_2 + 1/2, s_2), (s_3, s_3 - 1/2)$	$V_1 + V_2 + V_3$

Наша задача - построить неабелевы вершины типа II в реперном формализме.

Число производных при суперсимметричной вершине

Понять структуру вершин типа II можно понять уже из анализа числа производных. Рассмотрим супермультиплеты $(s_1, s_1 + \epsilon_1)$,$(s_2, s_2 + \epsilon_2)$,$(s_3, s_3 + \epsilon_3)$, где s_i - спины бозонов, $\epsilon_i = \pm{}^1\!/_2$. Из суперпреобразований

$$\delta B \sim F\zeta, \delta F \sim \partial B\zeta$$

следует, что число производных при BFF-вершинах на 1 меньше, чем при BBB-вершине, т.е.

$$N_0 = N_1 + 1 = N_2 + 1 = N_3 + 1$$

Но число производных при элементарных вершинах известно из классификации и равно:

$$\begin{aligned}
N_0 &= s_1 + s_2 - s_3 \\
N_1 &= s_1 + s_2 - s_3 - 1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 \\
N_2 &= s_1 + s_2 - s_3 - 1 + \epsilon_1 - \epsilon_3 \\
N_3 &= s_1 + s_2 - s_3 - 1 + \epsilon_1 + \epsilon_2
\end{aligned}$$

Одна из вершин $V_0 - V_3$ содержит **меньшее** число производных, чем правильное, и не входит в суперсимметричную вершину:

Тип	Супермультиплеты	"Лишняя" вершина
IIa	$(s_1, s_1 - {}^1\!/_2), (s_2, s_2 - {}^1\!/_2), (s_3, s_3 - {}^1\!/_2)$	$V_3(\Phi_1, \Phi_2, \Omega_3)$
IIb	$(s_1 + {}^1\!/_2, s_1), (s_2, s_2 - {}^1\!/_2), (s_3 + {}^1\!/_2, s_3)$	$V_2(\Phi_1, \Omega_2, \Phi_3)$
IIb	$(s_1, s_1 - {}^1\!/_2), (s_2 + {}^1\!/_2, s_2), (s_3 + {}^1\!/_2, s_3)$	$V_1(\Omega_1, \Phi_2, \Phi_3)$
IIc	$(s_1 + {}^1\!/_2, s_1), (s_2 + {}^1\!/_2, s_2), (s_3, s_3 - {}^1\!/_2)$	$V_0(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$

Мультиспинорный формализм

1. В теории высших спинов приходится работать с (спин-)тензорами со смешанной симметрией
2. $\mathfrak{so}(3,1) \simeq \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ - векторный индекс может быть превращен в пару спинорных $\alpha, \dot{\alpha} = 1, 2$.
3. Тензоры со смешанной симметрией сводятся к полностью симметричным бесследовым мультиспинорам:
$$\Omega^{a(k),b(l)} \to \Omega^{\alpha(k+l)\dot{\alpha}(k-l)} \oplus \Omega^{\alpha(k-l)\dot{\alpha}(k+l)}$$
Аналогично, к полностью симметричным бесследовым мультиспинорам сводятся спин-тензоры:
$$\Phi^{a(k),b(l)} \to \Phi^{\alpha(k+l+1)\dot{\alpha}(k-l)} \oplus \Phi^{\alpha(k-l)\dot{\alpha}(k+l+1)}$$
Тем самым, тензоры и спин-тензоры описываются единообразно, что особенно важно для изучения суперсимметричных теорий
4. Для действительного поля $(\Omega^{\alpha(k+l)\dot{\alpha}(k-l)})^\dagger = \Omega^{\alpha(k-l)\dot{\alpha}(k+l)}$

Пространство (A)dS

1. Пространство (A)dS характеризуется космологической постоянной $\Lambda = -\lambda^2$. Для бескоординатного описания пространства (A)dS используются фоновые *репер* $e_\mu{}^a \sim e_\mu{}^{\alpha\dot{\alpha}}$ и *связность* - $\omega_\mu{}^{[ab]} \sim \omega_\mu{}^{\alpha(2)} + h.c.$.
2. Все выражения являются дифференциальными формы по мировым индексам. Мы далее опускаем мировые индексы, а локальные индексы всегда записываем в мультиспинорном формализме, например:

$$A_{[\mu\nu}{}^a B_{\lambda]} = A^{\alpha\dot{\alpha}} B$$

3. Все производные являются внешними ковариантными; их действие определяется свойствами:

$$De^{\alpha\dot{\alpha}} = 0$$
$$D^2\zeta^\alpha = -2\lambda^2 E^\alpha{}_\beta \zeta^\beta$$
$$D^2\zeta^{\dot{\alpha}} = -2\lambda^2 E^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \zeta^{\dot{\beta}}$$

Здесь $E^{\alpha(2)} = \frac{1}{2} e^\alpha{}_{\dot{\alpha}} e^{\alpha\dot{\alpha}}$,$E^{\dot{\alpha}(2)} = \frac{1}{2} e_\alpha{}^{\dot{\alpha}} e^{\alpha\dot{\alpha}}$-базисные 2-формы.

Свободные поля в реперном формализме

1. Реперный формализм является обобщением тетрадного формализма в теории гравитации
2. Для описания свободного безмассового бозона со спином s используются две калибровочных 1-формы: *физическое* поле $H^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}$ и *вспомогательное* поле $\Omega^{\alpha(s)\dot{\alpha}(s-2)}$; лагранжиан бозона имеет вид:

   $$\mathcal{L} \propto \Omega^2 + \Omega DH + \lambda^2 H^2$$

   Данный лагранжиан инвариантен относительно калибровочных преобразований следующего вида:

   $$\delta H \propto D\xi + e\eta$$
   $$\delta\Omega \propto D\eta + e\zeta + \lambda^2 e\xi$$

3. Для описания свободного фермиона со спином $s + 1/2$ достаточно только *физического* поля $\Phi^{\alpha(s-1)\dot{\alpha}(s-1)}$; лагранжиан фермиона имеет вид:

   $$\mathcal{L} \propto \Phi D\Phi + \lambda^2\Phi^2 + h.c.$$

   Фермионный лагранжиан также является калибровочно-инвариантным; калибровочные преобразования физического поля аналогичны таковым в бозонном случае.

Свободные поля в реперном формализме

1. Для замкнутого набора калибровочно-инвариантных объектов - *кривизн* - необходимо также $s-2$ калибровочных экстраполя $\Sigma^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} &= DH^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)} + e_\beta{}^{\dot\alpha}\Omega^{\alpha(s-1)\beta\dot\alpha(s-2)} + e^\alpha{}_{\dot\beta}\Omega^{\alpha(s-2)\dot\beta\dot\alpha(s-1)} \\
\mathcal{R}^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} &= D\Omega^{\alpha(s)\dot\alpha(s-2)} + e_\beta{}^{\dot\alpha}\Sigma^{\alpha(s)\beta\dot\alpha(s-3)} + \lambda^2 e^\alpha{}_{\dot\beta}H^{\alpha(s-1)\dot\beta\dot\alpha(s-2)} \\
&\dots \\
\mathcal{R}^{\alpha(2s-2)} &= D\Sigma^{\alpha(2s-2)} + \lambda^2 e^\alpha{}_{\dot\beta}\Sigma^{\alpha(2s-3)\dot\beta}
\end{aligned}$$

Экстраполя не входят в свободный лагранжиан, но нужны для построения взаимодействия.

2. При $\lambda \neq 0$ лагранжиан выражается через кривизны:

$$\mathcal{L} = (i)^{2s-1}\sum_{m>0}\frac{c_m}{\lambda^{2m}}\mathcal{R}^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)}\mathcal{R}_{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} + h.c.$$

Коэффициенты c_m с точностью до нормировки определяются требованием отсутствия в лагранжиане экстраполей - $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Sigma} \equiv 0$

3. Лагранжевы уравнения движения не определены для экстраполей, а потому вместо лагранжевых уравнений необходимо использовать *условия массовой поверхности*. На массовой поверхности каждое следующее поле пропорционально производной от предыдущего, т.е. $\Sigma^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} \sim D^m H^{\alpha(s-1)\dot\alpha(s-1)}$.

Свободные супермультиплеты в реперном формализме

Для описания свободного супермультиплета нужны те же поля, что и для описания частиц, входящих в него - бозона и фермиона. Лагранжиан супермультиплета является суммой лагранжианов входящих в него бозона и фермиона:

$$\mathcal{L}_{susy} = \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_F$$

Калибровочные симметрии и наборы кривизн супермультиплета являются объединением калибровочных симметрий и наборов кривизн для компонент супермультиплета. Суперпреобразования должны сохранять лагранжиан и быть согласованными с калибровочными преобразованиями, т.е. кривизны должны быть ковариантными относительно суперпреобразований:

$$\delta\mathcal{R} \sim \mathcal{F}\zeta, \delta\mathcal{F} \sim \mathcal{R}\zeta$$

Свободные супермультиплеты в реперном формализме

1. Требование ковариантности кривизн фиксирует суперпреобразования с точностью до двух общих множителей, соответствующих выбору нормировки для бозона и фермиона. Например, для супермультиплета с целым суперспином суперпреобразования имеют следующий вид (ζ-параметр суперпреобразований):

$$\begin{aligned} \delta\Omega^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} &= iC\left[\Phi^{\alpha(s+m-1)\beta\dot\alpha(s-1-m)}\zeta_\beta + \lambda\Phi^{\alpha(s-1+m)\dot\beta\dot\alpha(s-m-1)}\zeta_{\dot\beta}\right] \\ \delta\Phi^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-1-m)} &= \tilde C\left[\lambda\Omega^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)}\zeta^\alpha + \Omega^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-2-m)}\zeta^{\dot\alpha}\right] \end{aligned}$$

   Законы трансформации кривизн сразу же считываются из законов преобразования полей:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{R}^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} &= iC\left[\mathcal{F}^{\alpha(s+m-1)\beta\dot\alpha(s-1-m)}\zeta_\beta + \lambda\mathcal{F}^{\alpha(s-1+m)\dot\beta\dot\alpha(s-m-1)}\zeta_{\dot\beta}\right] \\ \delta\mathcal{F}^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-1-m)} &= \tilde C\left[\lambda\mathcal{R}^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)}\zeta^\alpha + \mathcal{R}^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-2-m)}\zeta^{\dot\alpha}\right] \end{aligned}$$

2. Отношение $C/\tilde C$ фиксируется требованием суперсимметричности лагранжиана. Например, для супермультиплета с целым суперспином $C = (2s-1)\tilde C$.
3. Произведение $C\tilde C$ фиксируется нормировкой суперагебры. Мы далее выбираем $C\tilde C = 1$.

Подход Фрадкина-Васильева

Для построения взаимодействующей теории в реперном формализме мы используем *подход Фрадкина-Васильева*. Данный подход предполагает два этапа. Первый выполняется для кривизн отдельно для каждой из частиц, второй - для полного лагранжиана. Полезно сравнить данный подход с теорией Янга-Миллса; кратко напомним данную теорию.

1. Поле Янга-Миллса описывается векторным полем A^A. Данное поле входит в теорию в виде тензора напряженности:

   $$G^A = dA^A + ig^{ABC}A^B A^C$$

   Теория Янга-Миллса инвариантна относительно калибровочных преобразований, форма которых сразу же угадывается из тензора напряженности:

   $$\delta A^A = d\xi^A + ig^{ABC}\xi^B A^C$$

   При этом тензор напряженности ковариантен относительно калибровочных преобразований:

   $$\delta G^A = ig^{ABC}\xi^B G^C$$

2. Лагранжиан теории имеет вид

   $$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}G^A G_A$$

   Его инвариантность обеспечивается ковариантностью тензора напряженности

   $$\delta\mathcal{L} \propto g^{ABC}\xi^A G^B G^C = 0$$

.

Подход Фрадкина-Васильева

Теперь изложим подход Фрадкина-Васильева. Индексы A, B, C теперь не цветовые, а пространственные; кроме этого, в описываемые ниже процедуры включаются не только физическое поле, но и вспомогательное и экстраполя.

1. Для каждой кривизны строится ее квадратичная деформация

$$\Delta\mathcal{R}^A = g^{ABC}\Phi^B\Phi^C$$

Она сразу определяет поправки к калибровочным преобразованиям

$$\delta\Phi^A = g^{ABC}\eta^B\Phi^C$$

Константы g^{ABC} определяются из требования ковариантности деформированных кривизн относительно калибровочных преобразований

$$\delta\hat{\mathcal{R}}^A = g^{ABC}\eta^B\mathcal{R}^C$$

2. Деформированные кривизны подставляются в лагранжиан вместо линеаризованных:

$$\hat{\mathcal{L}} \propto \hat{\mathcal{R}}^A\hat{\mathcal{R}}_A$$

Вариация деформированного лагранжиана равна:

$$\delta\hat{\mathcal{L}} \sim g^{ABC}\hat{\mathcal{R}}^A\hat{\mathcal{R}}^B\eta^C \approx 0$$

Требование калибровочной инвариантности лагранжиана на массовой поверхности связывает g^{ABC} для разных частиц. Кубическая вершина

$$\mathcal{V} \propto g^{ABC}\mathcal{R}^A\Phi^B\Phi^C$$

получается элементарно; ее форма характерна для **неабелевых** вершин.

Суперсимметричная вершина в AdS

Элементарые неабелевы вершины нашей предыдущей работе были построены в нашей предыдущей работе.

1. Суперсимметричные деформации могут быть построены как линейные комбинации элементарных; например, для первого мультиплета они выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{R}_1 &= a_0\Delta\mathcal{R}_1(\Omega_2,\Omega_3) + a_1\Delta\mathcal{R}_1(\Phi_2,\Phi_3) \\ \Delta\mathcal{F}_1 &= a_2\Delta\mathcal{F}_1(\Omega_2,\Phi_3) + a_3\Delta\mathcal{F}_1(\Phi_2,\Omega_3) \end{aligned}$$

2. Мы требуем, чтобы деформированные кривизны при суперпреобразованиях преобразовывались так же, как и линеаризованные, с теми же коэффициентами:

$$\begin{aligned} \delta\hat{\mathcal{R}}^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)} &= iC\left[\hat{\mathcal{F}}^{\alpha(s+m-1)\beta\dot\alpha(s-1-m)}\zeta_\beta + \lambda\hat{\mathcal{F}}^{\alpha(s-1+m)\dot\beta\dot\alpha(s-m-1)}\zeta_{\dot\beta}\right] \\ \delta\hat{\mathcal{F}}^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-1-m)} &= \tilde{C}\left[\lambda\hat{\mathcal{R}}^{\alpha(s-1+m)\dot\alpha(s-1-m)}\zeta^\alpha + \hat{\mathcal{R}}^{\alpha(s+m)\dot\alpha(s-2-m)}\zeta^{\dot\alpha}\right] \end{aligned}$$

   Это автоматически обеспечивает суперсимметричность деформированного лагранжиана. Данное требование определяет неопределенные коэффициенты при каждой из кривизн с точностью до общего множителя.

3. Итоговая вершина сводится к сумме четырех элементарных вершин с коэффициентами $g_0 - g_3$, фиксированными с точностью до общего множителя g:

$$\mathcal{V} = g_0 V_0(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3) + g_1 V_1(\Omega_1,\Phi_2,\Phi_3) + g_2 V_2(\Phi_1,\Omega_2,\Phi_3) + g_3 V_3(\Phi_1,\Phi_2,\Omega_3)$$

Плоский предел

1. В предыдущей работе нами было показано, что элементарная вершина в AdS допускает несингулярный предел $\lambda \to 0$ и переходит в нем в неабелеву плоскую вершину.
2. В соответствии с классификацией, суперсимметричная вершин в плоском пространстве содержит только три элементарных вершины. Значит, коэффициент при одной из вершин должен обнулиться при предельном переходе $\lambda \to 0$. Для этого вершина должна содержать меньшее, чем правильное, число производных.
3. Действительно, в каждом из случаев IIa-c суперсимметричная вершина состоит из трех элементарных, а четвертая содержит на одну производную меньше. Таким образом, в плоском пределе остаются только три "правильные" вершины; каждая из них в пределе воспроизводит плоскую элементарную вершину. **Таким образом, суперсимметричная вершина в AdS в пределе $\lambda \to 0$ переходит в плоскую вершину, соответствующую классификации Мецаева**.

Заключение

1. Были построены суперсимметричные кубические вершины в AdS для трех безмассовых супермультиплетов с суперспинами, удовлетворяющими строгому неравенству треугольника, в реперном мультиспинорном формализме. Показано, что каждая такая вершина представляется в виде четырех элементарных вершин.
2. Показано, что при предельном переходе $\lambda \to 0$ константа при одной из элементарных вершин обнуляется, и потому суперсимметричная вершина в пределе $\lambda \to 0$ переходит в плоскую суперсимметричную плоскую вершину, в соответствии с классификацией Мецаева содержащей только три элементарные вершины. Тем самым, получены плоские суперсимметричные кубические вершины для трех безмассовых супермультиплетов с суперспинами, удовлетворяющими строгому неравенству треугольника, в реперном мультиспинорном формализме.
3. Результаты данной работы важны для дальнейшего исследования суперсимметричных теорий, содержащих поля с высшими спинами, в том числе массивные.