# Может ли эффективная 4-мерная скалярная теория быть асимптотически свободной в пространстве-времени с дополнительными измерениями?

А.В. Киселев, В.А. Петров

Отдел теоретической физики
НИЦ «Курчатовский институт» - ИФВЭ

Семинар ОТФ, 02 февраля 2021 года

# План доклада

- Введение.
- $\varphi^3$ теория в 6-ти бесконечных измерениях.
- $\varphi^3$ теория в пространстве-времени с двумя дополнительными компактными измерениями.
- Эффективная 4-х мерная $\varphi^3$ теория и бегущая константа связи в (4+2)-измерениях.
- Зависимость физических наблюдаемых от радиуса компактификации.
- Заключение.

# Введение

**Асимптотическая свобода в КХД** *(D. Gross & F. Wilczek, 1973)*

**Любая асимптотически свободная перенормируемая теория поля в 4-х измерениях с необходимостью включает в себя неабелевы калибровочные поля**
*(S. Coleman & D. Gross, 1973; A. Band & D. Litim, 2017, 2019)*

**Асимптотически свободные перенормируемые теорий *без* неабелевых калибровочных полей в пространстве-времени с числом измерений $D \neq 4$:**
***2D* модель Гросса-Невью; *2D* нелинейная сигма-модель**

**4D $g\varphi^4$ теория с *отрицательной* $g$ асимптотически свободна**

**Можно ли построить перенормируемую *эффективную* 4-мерную, и при этом асимптотически свободную, скалярную теорию?**

## Зависимость *n* от числа измерений пространства-времени D для скалярной теории $g\varphi^n$ с *безразмерной* константой *g*

| D | 3 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| n | 6 | 4 | 3 |

**Бета-функции $\phi^4$ и $\phi^6$ теорий (в низшем порядке)**

$$\beta(g(\mu)) = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu}$$

$(g/4!)\varphi^4_4$

$$\beta(g) = \frac{3}{16\pi^2} g^2$$

$(g/6!)\varphi^6_3$

$$\beta(g) = \frac{5}{48\pi^2} g^2$$

КЭД

$$\beta(g) = \frac{1}{12\pi^2} e^3$$

***Никогда не ставьте задачу, решение которой вам неизвестно.***

**Законы Мерфи. Правило Берке.**

# Скалярная $\varphi^3$ теория в 6-ти бесконечных измерениях

$$\beta(g) = -\left[\frac{3}{4(4\pi)^3} g^3 + \frac{89\gamma_E - 7}{12(4\pi)^6} g^5\right] < 0$$

(вычислена в 5-ти петлях)

*(A. Macfarlane & G. Woo, NPB, 1974)*

***Скалярная g теория в (1+5) измерениях обладает свойством асимптотической свободы, то есть, её константа g = g(μ) логарифмически стремится к нулю с ростом масштаба μ - полная аналогия с КХД!***

→ **Выбираем теорию в качестве базовой, но «сворачиваем» (компактифицируем) два пространственных измерения из пяти**

# Скалярная $\varphi^3$ теория в пространстве с двумя дополнительными измерениями

*В редукцию лишь надо вникнуть,*
*к классификации привыкнуть.* (Гёте, «Фауст» )

## Метрика пространства-времени (4+2)

$G_{NM} = (\gamma_{\mu\nu}, -1, -1)$  $M,N = (\mu, m)$,  $\mu = 0,1,2,3$,  $m = 1,2$

с дополнительными координатами $y_1$, $y_2$

$\Phi(x,y) = \Phi(x,y+2\pi R_c)$
$\Phi(x,y) = \Phi(x,-y)$

$$-\pi R_c \leqslant y_{1,2} \leqslant \pi R_c$$

радиус компактификации

**Действие**

$$\mathcal{S}_{4+2} = \int d^4x \int_{-\pi R_c}^{\pi R_c} dy_1 \int_{-\pi R_c}^{\pi R_c} dy_2 \sqrt{-G} \left[\frac{1}{2}\partial_M\phi(x,y)\partial^M\phi(x,y) - \frac{1}{2}m^2\phi^2(x,y) - \frac{g}{3!}\phi^3(x,y)\right]$$

# Разложение по модам Калуца-Клейна

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi R_c} \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} e^{i(n_1 y_1 + n_2 y_2)/R_c} \phi_{\vec{n}}(x)$$

с массами $m_n^2 = m_0^2 + \frac{n^2}{R_c^2}$ $n = (n_1, n_2)$

## Эффективное 4-мерное действие

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{4\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-\gamma} \Big\{ & \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_0(x) \partial^\mu \phi_0(x) - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2(x) \\
& - \sum_{n\neq 0} \left[ \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_n(x) \partial^\mu \phi_n(x) - \frac{1}{2} m_n^2 \phi_n^2(x) \right] \\
& - \frac{g_4}{3!} \Big[ \phi_0^3(x) + \phi_0(x) \sum_{n\neq 0} \phi_n(x) \phi_{-n}(x) \\
& + \sum_{n,m,k\neq 0} \phi_n(x) \phi_m(x) \phi_k(x)\, \delta_{n+m+k,0} \Big] \Big\}
\end{aligned}$$

где эффективная константа есть $g_4 = \frac{g}{2\pi R_c}$

## Связь регуляризованных неперенормированных одно-частично неприводимых функций Грина с «голыми» функциями Грина (MOM-схема)

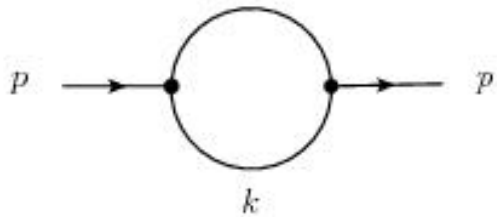
$$\Gamma^{(2)}_{un}(p) = Z^{-1}_{\phi}\, \Gamma^{(2)}_{bare}(p)$$
$$\text{at} \quad p^2 = -\mu^2$$

(обратный пропагатор)

$$\Gamma^{(3)}_{un}(p,q) = Z^{-1}_{\Gamma}\, \Gamma^{(3)}_{bare}(p,q)$$
$$\text{at} \quad p^2 = q^2 = (p+q)^2 = -\mu^2$$

(вершина)

# Вычисление константы перенормировки поля в однопетлевом приближении




нулевая мода

$$\Sigma(p^2) = \Sigma_0(p^2) + \Sigma_{\rm KK}(p^2)$$

## Вклад Калуца-Клейновских массивных мод

$$\Sigma_{\rm KK}(p^2) = -\frac{i}{2}\, g_4^2 \bar{\mu}^{2\epsilon} \sum_{n\neq 0} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 + p^2 x(1-x) - m_n^2]^2}$$

D = 4 - 2ε

$$\Sigma_{\rm KK}(p^2) = \frac{\alpha_6}{2\pi}\, \Gamma(\varepsilon)(4\pi)^{\varepsilon}(\bar{\mu} R_c)^{2\epsilon} R_c^{-2}$$

Г(z) – гамма-функция

$$\times \sum_{n_1,n_2\neq 0} \int_0^1 dx [-p^2 R_c^2 x(1-x) + n_1^2 + n_2^2]^{-\varepsilon}$$

## Двумерная неоднородная дзета-функция Эпштейна

$$Z_2^a(s) = \sum_{n_1,n_2\in Z^2}{}' \frac{1}{(n_1^2+n_2^2+a)^s}$$

**Имеет простые полюса при s=1, 1/2, -1/2, -3/2, …**

**Регулярна (!) в точке s=0, причем $Z^a_2(0) = -(1+\pi a)$**

**(*сравним*: *дзета-функция Римана* ς(0) = -1/2)**

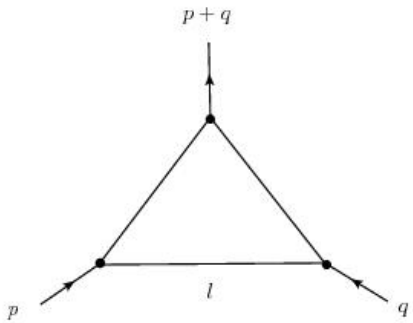
$$\Sigma(p^2) = \frac{\alpha_6}{12} p^2 \left(N_\varepsilon + \frac{5}{3}\right) + O(\epsilon)$$

**где** $N_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi$ **и** $\alpha_6 = \frac{g^2}{(4\pi)^3}$

## Константа перенормировки поля

$$Z_\phi = 1 - \frac{\alpha_6}{12}\left(N_\varepsilon - \ln\frac{\mu^2}{\bar{\mu}^2} + \frac{5}{3}\right)$$

***μ - точка перенормировки***




# Вычисление константы перенормировки вершины в однопетлевом приближении

## Вклад Калуца-Клейновских мод

$$\Gamma^{(3)}_{\mathrm{KK}}(p,q) = (-ig_4)\frac{\alpha_6}{\pi}\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^{\varepsilon}(\bar{\mu}R_c)^{2\epsilon}\int\limits_0^1 dx\, x\int\limits_0^1 dy\, Z_2^{M^2R_c^2}(1+\varepsilon)$$

где $M^2 = -x[p^2xy(1-y) + q^2y(1-x) + (p+q)^2(1-x)(1-y)]$

**Дзета-функция $Z^c_2(1+\varepsilon)$ имеет простой полюс при $\varepsilon=0$**

→ **Константа перенормировки вершины**

$$Z_\Gamma^{-1} = 1 + \frac{\alpha_6}{2}\left[N_\varepsilon - \ln\left(\frac{\mu^2}{\bar{\mu}^2}\right) - C\right] \quad (\mu R_c >> 1)$$

**В области $R_c \gg \mu^{-1}$ находим**

$$\beta(g) = -\frac{3R_c^2}{64\pi} g^3 < 0$$

**В эффективной 4-мерной теории параметром эволюции является *размерный* параметр** $R_c^2 \ln(\mu^2 / \mu_0^2)$

$$\alpha_4(\mu) = \frac{\alpha_4(\mu_0)}{1 + \frac{3}{16}\alpha_4(\mu_0) R_c^2 \ln(\mu^2/\mu_0^2)} = \frac{16}{3R_c^2 \ln(\mu^2/\Lambda_4^2)}$$

**где** $\alpha_4 = \frac{g_4^2}{4\pi}$

**Константа связи логарифмически стремится к нулю с увеличением масштаба перенормировки = *асимптотическая свобода***

**То есть, 4-мерная теория наследует свойство своей «материнской» теории с высшими измерениями, *но только в области $R_c \gg \mu^{-1}$***

**В области $R_c \ll \mu^{-1}$ асимптотической свободы *нет*, а константа связи растет с увеличением масштаба μ**

**Заметим, что *расходящиеся* части констант перенормировки совпадают для исходной и редуцированной теорий (компактификация есть инфракрасная процедура, не меняющая УФ расходимостей)**

# Зависимость наблюдаемых от радиуса компактификации

**Обобщение ограничения Фруассара-Мартена на рассеяние в D-мерном пространстве-времени**

*(В. Петров, MPLA, 2001)*

$$\sigma_{\text{tot}}^{D}(s) \le \text{const}(D) R_0^{D-2}(s)$$

**если $R_c$ >> $R_0(s)$**

$$\text{Im}\, T^{D}(s,0) \le \text{const}(D)\, s R_0^{D-3}(s) R_c$$

**если $R_c$ << $R_0(s)$**

**где** $R_0(s) \approx t_0^{-1/2} \ln s$

**$R_c$ - радиус компактификации**

## Рассеяние двух частиц на 3-мерной бране в D-мерном пространстве-времени (D=4+n)

*(А. К. & В. Петров, EPJC, 2004)*

$$\sigma_{\text{inel}}^{\text{D}}(s) \approx \text{const}(D) \times \begin{cases} \dfrac{R_0^{2+n}(s)}{R_0^2(s) R_c^n} \end{cases}$$

**если $R_c$ >> $R_0(s)$**

**если $R_c$ << $R_0(s)$**

**где** $R_0(s) \approx \sqrt{\alpha'} \ln s$

**Вывод:**

***зависимость физических величин от дополнительных измерений возникает, когда процесс происходит на расстояниях, превышающих радиус компактификации***

# Заключение

- Изучена скалярная $\varphi^3$ теория в пространстве-времени с двумя дополнительными компактными измерениями радиуса $R_c$.
- Показано, что *эффективная 4-мерная* скалярная $\varphi^3$ теория является *асимптотически свободной*, если радиус компактификации намного превосходит физический масштаб, $R_c >> R_{phys}$.

*«В конце концов, окружность бесконечно большого круга и прямая линия - одно и то же»*

Г. Галилей. «Диалог о двух главнейших системах мира – Птолемеевой и Коперниковой. День третий»

- То есть, эффективная 4-мерная теория «наследует» свойство асимптотической свободы $\varphi^3$ теории в 6-ти измерениях.
- В противном случае, когда $R_c \leq R_{phys}$ , это уже не имеет места.

# Спасибо за внимание!

# Back-up slides

# Релятивистская квантовая открытая струна

## Упорядочивание поперечного оператора Вирасоро

$$L_0^{\perp} = \frac{1}{2}\sum_{n\subset Z} \alpha_{-p}\alpha_p$$

$$2\alpha' p^- p^+ = L_0^{\perp} + a$$

**требует, чтобы упорядочивающая постоянная *a* была равна**

$$a = \frac{1}{2}(D-2)\sum_{n=1}^{\infty} n$$

$$\varsigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

**причем ς(-1) = 1 + 2 +3 + . . . = -1/12**

→ **корректное значение a = -(D-2)/24**
**(обеспечивающее правильные коммутационные соотношения для оператора углового момента)**