Мастер-теорема Рамануджана и две формулы для преобразования Ханкеля нулевого порядка

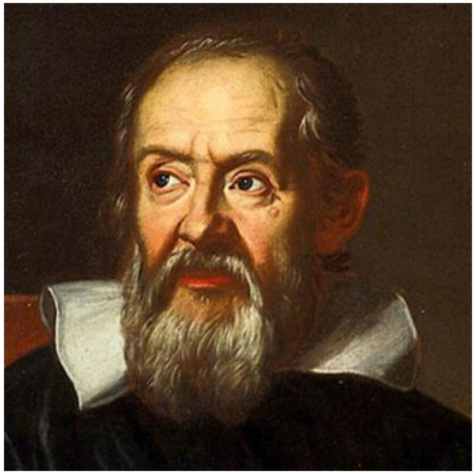
А.В. Киселев

Отдел теоретической физики
НИЦ «Курчатовский институт» - ИФВЭ

The Ramanujan J.: статья принята к публикации

Семинар ОТФ, 23 марта 2021 года

«Не прав ли был Платон, требуя от своих учеников прежде всего основательного знакомства с математикой?»



План доклада

- Парциальные волны и преобразование Ханкеля нулевого порядка.
- Его представление в виде степенного ряда. Постановка проблемы.
- Мастер-теорема Рамануджана.
- Две новые теоремы для преобразования Ханкеля четной функции.
- Примеры применения теорем.
- Заключение

Разложение амплитуды рассеяния по парциальным волнам

$$A(s,t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(\cos\theta)$$

Парциальные волны имеют асимптотику

$$A_l(s)\Big|_{l,s\to\infty} = f(s)\exp(-2lm/\sqrt{s})$$

При малых углах рассеяния $\theta = \dfrac{2q}{\sqrt{s}} = \dfrac{bq}{l}$

$$P_l(\cos\theta)\Big|_{\theta\ll 1} = P_l\left(\cos\frac{bq}{l}\right)\Big|_{l\gg 1}$$

Используем формулу: $\displaystyle \lim_{\nu\to\infty}\left[\nu^{\mu} P_{\nu}^{-\mu}\left(\cos\frac{x}{\nu}\right)\right] = J_{\mu}(x) \quad (x>0)$

$$\longrightarrow \quad 16\pi \sum_{l=l_0\gg 1}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(\cos\theta) = 8\pi s \int_{b_0(s)}^{\infty} db\, b\, A(b,s) J_0(qb)$$

Эйкональное приближение для амплитуды

$$A(s,t) = 4\pi i s \int\limits_0^\infty dbb \left[1 - e^{i\chi(b,s)}\right] J_0(qb) \; .$$

Связь эйкональной функции с Борновской амплитудой

$$\chi(s,b) = \frac{1}{4\pi s} \int\limits_0^\infty dqq J_0(qb)\, A_{\rm B}(s,q) \; .$$

$$A_{\rm B}(s,q) = 4\pi s \int\limits_0^\infty dbb\, J_0(qb)\, \chi(s,b) \; .$$

b-зависимость эйкональной функции?

Преобразование Ханкеля нулевого порядка

$$H_0[f(x)](q) = \int_0^\infty x\, f(x)\, J_0(qx)\, dx, \quad q > 0$$

1. Функция f(x) непрерывна или кусочно–непрерывна, с конечными скачками

2. Интеграл $\int_0^\infty x^{1/2} |f(x)|\, dx$ **конечен**

Вначале было найдено формальное (без доказательства сходимости) разложение $H_0[f(x)](q)$ в степенной ряд (W*illis, 1948)*

Затем были получены *асимптотические ряды* для $H_0[f(x)](q)$ для больших значений параметра *q*
***(Hsu, 1961; Slonovski, 1968; Handelsman, 1971; Mackinnon, 1972; Wong, 1976; Soni, 1982;* и др.)**

Недавно были найдены условия на функцию f(x) и ее производные, при которых преобразование Ханкеля целого порядка дается ***абсолютно и равномерно сходящимся рядом***

(А.К. , The Ramanujan J., 2020. Семинар ОТФ 08.09.2020)

$$\int_0^\infty x\, f(x)\, J_0(qx)\, dx = \frac{1}{q^3} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{\Gamma(2m+2)}{[\Gamma(m+2)]^2}\, f^{(2m+1)}(0)\, (2q)^{-2m}$$

Как быть, если *все нечетные производные* в нуле обращаются в ноль, т.е. $f^{(2m+1)}(0) = 0$ (m = 0,1, ...)?
(когда f(x) – чётная функция)

Решить данную проблему нам поможет обращение к *мастер-теореме Рамануджана*

И так как краткость есть душа ума,
А многословье – бренные прикрасы,
Я буду краток.

В. Шекспир. Гамлет, принц датский,
Акт II, Сцена 2 (пер. М.Л. Лозинского)

Мастер-теорема Рамануджана

Let $\varphi(z)$ be analytic (single-valued) function, defined on a half-plane

$$H(\delta) = \{z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) \geqslant -\delta\}$$

for some $0 < \delta < 1$. Suppose that, for some $A < \pi$, $\varphi(z)$ satisfies the growth condition

$$|\varphi(\sigma + i\tau)| < Ce^{P\sigma + A|\tau|}$$

for all $z = \sigma + i\tau \in H(\delta)$. Then the identity

$$\int_0^\infty x^{s-1} \left[\varphi(0) - x\varphi(1) + x^2\varphi(2) - \ldots\right] dx = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \varphi(-s)$$

holds for all $0 < \Re(s) < \delta$.

Обобщение мастер-теоремы Рамануджана

(*А.К. , The Ramanujan J. 2020. Семинар ОТФ 08.09.2020*)

Let $\varphi(z)$ be meromorphic function which obeys the conditions of the Ramanujan master theorem. Suppose that $\varphi(z)$ has a finite number of poles at the points z_i $(i = 1, 2, \ldots N)$ with $0 > \mathfrak{Re}(z_i) > -\delta$. Then

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-x)^m \varphi(m) + \pi \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}\left[\frac{\varphi(-s)\, x^{-s}}{\sin(\pi s)}; -z_i\right] = \frac{1}{2i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{\varphi(-s)}{\sin(\pi s)}\, x^{-s}\, ds \,,$$

where $-\min[\mathfrak{Re}(z_1), \ldots, \mathfrak{Re}(z_N)] < a < \delta$.

Представление преобразования Ханкеля в виде обратного преобразования Меллинаа

Theorem 1. *The Hankel transform of order zero (2.1), with* $f(x) = g(x^2)$ *and* $q > 0$ *may be expressed in the form*

$$A(q) = \frac{1}{\pi i q^2} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \overline{g}^{(s)}(0)\Gamma(s+1)\left(\frac{q^2}{4}\right)^{-s} ds$$

for $-1 < \alpha < 0$, *provided*

(1) $g(z)$ *is a regular function with Taylor series expansion about* $z = 0$ *of the form*

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{g}^{(m)}(0)}{m!}(-z)^m;$$

(2) $g(z) = O(z^{-d})$ *as* $z \to \infty$, *for* $d > \frac{1}{4}$;

(3) $\overline{g}^{(s)}(0)$ *is a regular (single-valued) function defined on the half-plane*

$$H(\delta) = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s \geq -\delta\}$$

for some $\frac{1}{4} < \delta < 1$ *and satisfies the growth condition*

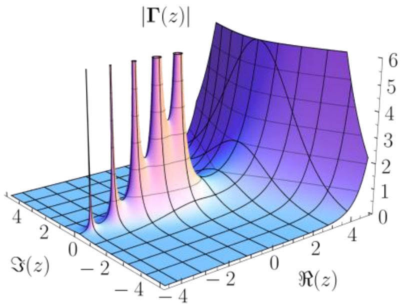
$$\left|\overline{g}^{(s)}(0)\right| < Ce^{Pv + A|w|}$$

for some $A < \pi/2$ *and all* $s = v + iw \in H(\delta)$.

Для доказательства Теоремы 1

полагаем $\varphi(s) = \dfrac{\overline{g}^{(s)}(0)}{\Gamma(s+1)}$

Гамма-функция Γ(s+1) при |$\mathfrak{Im}s$| → ∞ убывает как exp(-B|$\mathfrak{Im}s$|), где B = π/2 (растет как exp[$\mathfrak{Re}s$ ln($\mathfrak{Re}s$)], $\mathfrak{Re}s$ → ∞)



Функция *φ(s)* при |$\mathfrak{Im}s$| → ∞ растет как exp(A|$\mathfrak{Im}s$|), где A < π

Поскольку *φ(s)* удовлетворяет всем условиям мастер-теоремы Рамануджана, применяем её к данной функции *φ(s)*

Theorem 2. *The Hankel transform (2.1) of the function* $f(x) = h(x^4)$ *and* $q > 0$ *may be expressed in the form*

$$A(q) = \frac{1}{iq^2\sqrt{\pi}} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \overline{h}(s) \frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} 2^{6s+1} q^{-4s}\, ds,$$

for $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, *provided that*

(1) $h(z)$ *is a regular function and its Taylor series at* $z = 0$ *has the form*

$$h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\overline{h}^{(m)}(0)}{m!}(-z)^m;$$

(2) $h(z) = O(z^{-d})$, *as* $z \to \infty$, *for* $d > \frac{1}{8}$;

(3) $\overline{h}^{(s)}(0)$ *is a regular (single-valued) function defined on a half-plane*

$$H(\delta) = \{s \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} s \geq -\delta\}$$

for some $\frac{1}{8} < \delta < \frac{1}{2}$ *and satisfies the growth condition*

$$\left|\overline{g}^{(s)}(0)\right| < Ce^{Pv+A|w|}$$

for some $A < \pi/2$ *and all* $s = v + iw \in H(\delta)$.

Примеры применения доказанных теорем

Пример 1. $f(x) = \exp(-a^2x^2)$, $a > 0$

$\longrightarrow$ $g^{(m)}(0) = a^{2m}$ (имеется в виду $\bar{g}^{(m)}(0)$)

Согласно Теореме 1, имеем цепочку равенств

$$\int_0^\infty x e^{-a^2x^2} J_0(qx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi i q^2} \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \Gamma(1+s) \left(\frac{q^2}{4a^2}\right)^{-s} ds$$

$$= \frac{1}{2a^2} e^{-q^2/4a^2}$$

Пример 2. $f(x) = J_0(ax)/(x^2 + c^2)$, $q > a > 0$, $c > 0$

→ имеем преобразование Ханкеля вида

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+c^2} J_0(ax) J_0(qx)\, dx$$

Согласно Теореме 1, находим

$$\frac{I_0(ac)}{q^2c^2}\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\Gamma^2(s+1)\left(\frac{q^2c^2}{4}\right)^{-s} ds = I_0(ac)K_0(qc)$$

$I_0(z)$ и $K_0(z)$ – модифицированные функции Бесселя

$K_0(z) \sim \exp(-z)$, при $z \to \infty$

Пример 3. $f(x) = 1/(x^4 + a^4)^{1/2}$, $a > 0$

$$\rightarrow \int_0^\infty \frac{x J_0(qx)}{\sqrt{x^4 + a^4}}\, dx$$

Производные f(x) в нуле даются формулой

$$h^{(m)}(0) = a^{-4m-2}\, \Gamma(s+1/2)/\sqrt{\pi}$$

В результате, имеем контурный интеграл, который вычисляется с помощью вычетов

$$\frac{1}{(qa)^2}\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} 2^{6s+1}\frac{\Gamma(2s+1)\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}(qa)^{-4s}\, ds$$

$$= J_0\left(\frac{qa}{\sqrt{2}}\right) K_0\left(\frac{qa}{\sqrt{2}}\right)$$

Специальный случай

(Frenzen & Wong, 1985)

$$I_f(q) = \int_0^\infty x e^{-x^2}\varphi(x^2) J_0(qx)\,dx$$

Если *φ(s)* – ***целая*** функция, то при q → ∞

$$I_f(q) = O(\exp(-\gamma q^2))$$

Если *φ(s)* – ***мероморфная*** функция,
с полюсами в верхней полуплоскости

$$I_f(q) = O(\exp(-\delta q))$$

Асимптотики преобразований Ханкеля
в разобранных выше примерах
согласуются с этими результатами

Заключение

- Изучено преобразование Ханкеля $H_0[f(x)](q)$ *четных* функций $f(x)$, для $q>0$.
- Сформулированы и доказаны две теоремы, позволяющие представить $H_0[f(x)](q)$ в виде обратного преобразования Меллина.
- Теоремы проиллюстрированы несколькими примерами.

Спасибо за внимание!

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n \geq 0} \frac{(4n)!}{(4^n n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{99^{4n}}$$

(*S. Ramanujan, Quart. J. Math. 45, 350, 1914*)

$$|\pi - \pi_0| \simeq 7.6 \cdot 10^{-8}\,, \quad |\pi - \pi_1| \simeq 6.4 \cdot 10^{-16}\,, \quad |\pi - \pi_2| \simeq 5.7 \cdot 10^{-24}\,.$$

Back-up slides

Пример 4. $f(x) = \exp(-a^2x^2)/(x^2 + c^2)$, $a > 0$, $c > 0$

$\Rightarrow$ $g^{(m)}(0) = c^{-2m-2}\, \Gamma(m+1) \sum_{k=0,1,\ldots m} (ac)^{2k}/k!$

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^2+c^2} e^{-a^2x^2} J_0(qx)\, dx$$

$$= e^{(ac)^2} K_0(qc)$$

$$- \frac{2a^2}{q^2} e^{-q^2/4a^2} \times \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{2a^2c}{q}\right)^{2p} {}_2F_0\left[\begin{matrix} p+1 & p+1 \\ & - \end{matrix}; -\frac{4a^2}{q^2}\right]$$

…да за такие доказательства года на три в Соловки!

М.А. Булгаков. Мастер и Маргарита. Глава 1.
Никогда не разговаривайте с незнакомцами.