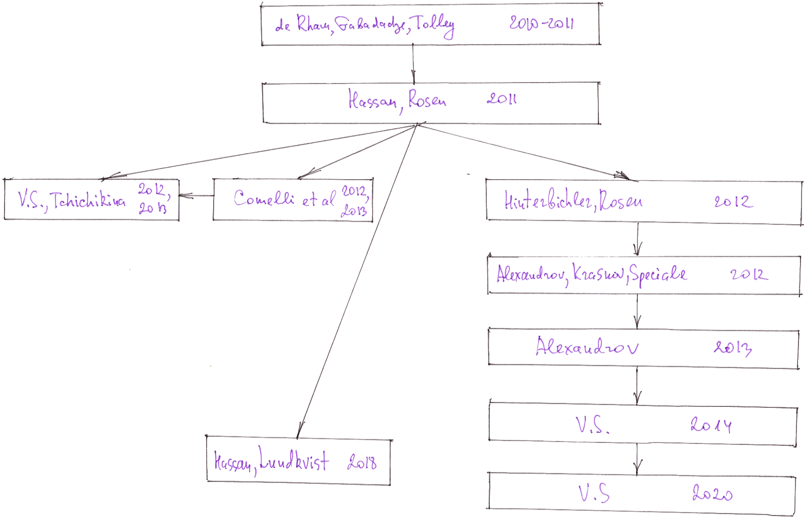
Каноническая структура бигравитации

В.О. Соловьев

Семинар ОТФ

14 декабря 2021 г.
(196 лет тому назад декабристы разбудили Герцена)

Повесть временных лет



Что такое математическая физика?

Бывает так...

- большая новая физика из математики;
- большая новая математика из физики;
- решение задач из малой (?) новой физики.

Раздельно или вместе?

Калибровочные преобразования и динамика

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \phi$$

$$\delta q^i = \dot{q}^i \delta t$$

В ОТО потенциалом служит метрика, и общее преобразование координат включает в себя динамику

$$x^\mu \to x'^\mu(x^\alpha) = x^\mu + \xi^\mu(x^\alpha), \tag{1}$$

$$\delta g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = \tag{2}$$

$$= \dot{g}_{\mu\nu}\delta t + g_{\mu\nu,k}\xi^k + g_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{,\nu} + g_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{,\mu} \tag{3}$$

Гибкое время

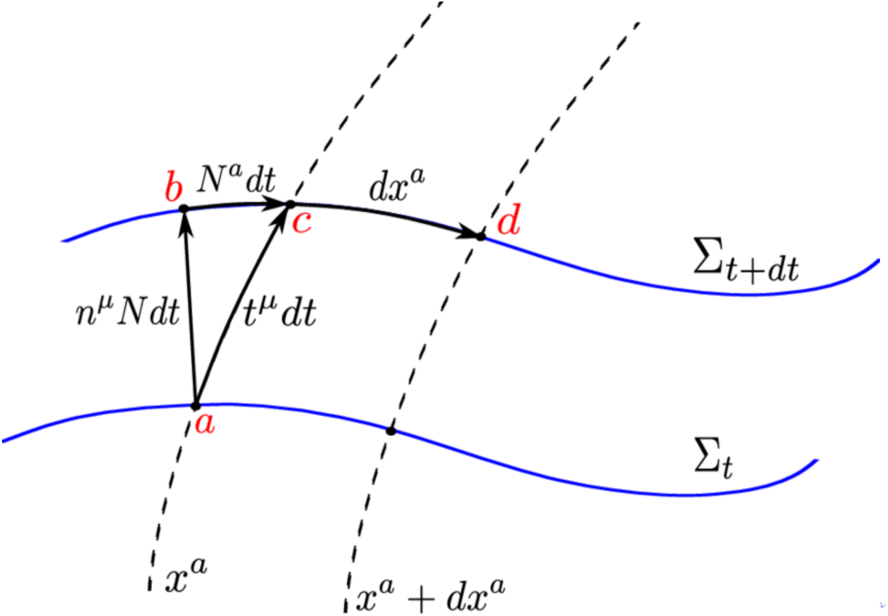
В классической механике можно добиться инвариантности при общих заменах времени

$$t \to \tau = \tau(t), \qquad t = t(\tau)$$

введя дополнительно к старым $q_i(t)$ новую координату $q(t) \equiv t(\tau)$, тогда скорость ее изменения, то есть, функция $N = dt/d\tau$ появится в гамильтониане в качестве множителя Лагранжа при уравнении связи, таким образом

$$H_{new} = NR, \qquad R = p + H_{old} \approx 0$$

Вложение пространства в пространство-время



Lapse and shift

В пространстве-времени требуются уже 4 лагранжевых множителя, они получаются при разложении 4-вектора по базису, состоящему из единичной нормали к гиперповерхности и трех касательных векторов

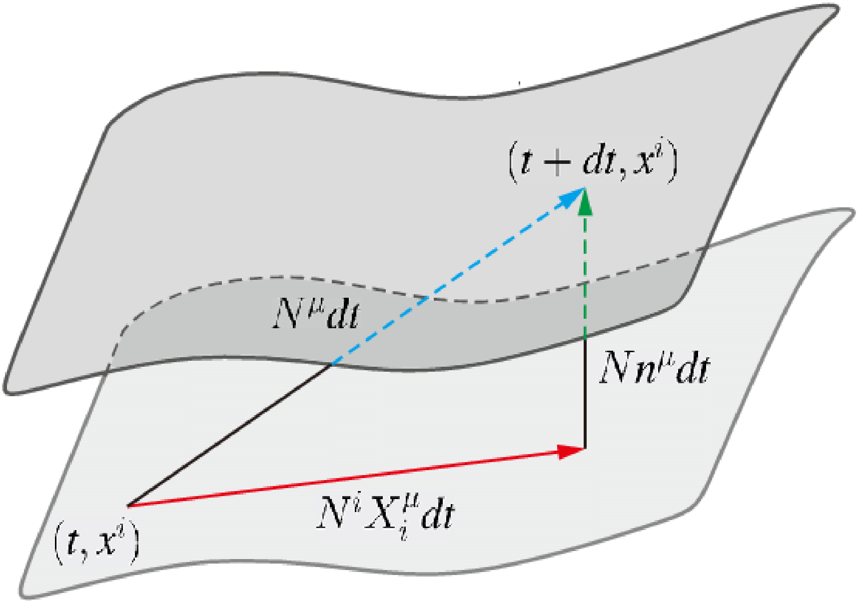
$$N^\alpha(\tau, x^i) \equiv \dot{e}^\alpha(\tau, x^i) = Nn^\alpha + N^i e_i^\alpha .$$

Гамильтониан ОТО и любой общековариантной теории должен иметь вид

$$\mathrm{H} = \int \left(N\mathcal{R} + N^i\mathcal{R}_i\right) d^3x,$$

где связи первого рода получаются варьированием по N, N^i.

Вложение пространства (2)



A Tale of Two Metrics and Two Bases

Две метрики – значит и два базиса

$$(n^\alpha, e_i^\alpha), \qquad (\bar{n}^\alpha, e_i^\alpha)$$

и две пары функций смещения и сдвига

$$N, N^i, \qquad \bar{N}, \bar{N}^i.$$

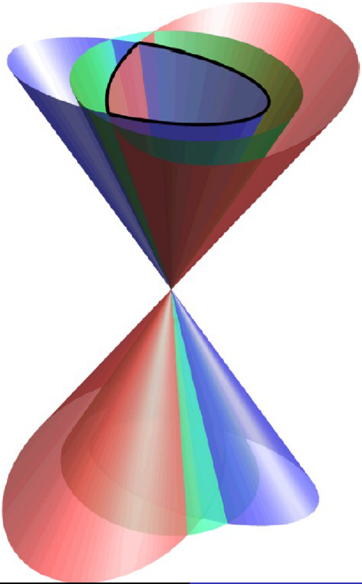
Одну пару удобно заменить новыми переменными u, u^i

$$u^i = (\bar{N}^i - N^i)/N, \quad u = \bar{N}/N,$$

они же связывают два базиса

$$\bar{n}_\mu = u n_\mu, \qquad \bar{e}^i_\mu = e^i_\mu - u^i n_\mu, \qquad \bar{n}^\mu = \frac{1}{u} n^\mu - \frac{u^i}{u} e^\mu_i.$$

О двух световых конусах и ОДЗ



О потенциале для двух метрик

Потенциал должен быть скалярной плотностью и зависеть от двух метрик, например,

$$\sqrt{(-g)}U(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu})$$

или

$$\sqrt{(-f)}U(g_{\mu\nu}, f_{\mu\nu}).$$

Функция U должна зависеть от инвариантов матрицы $\mathrm{Y} = g^{-1}f = g^{\mu\alpha}f_{\alpha\nu}$ или от инвариантов функции от этой матрицы.
Например, в РТГ

$$\sqrt{-g}U = \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\mathrm{Y} - 1\right) - \sqrt{-f}$$

Об инвариантах матрицы

Инвариантами матрицы являются ее симметрические полиномы, которые могут быть выражены через собственные значения или через следы степеней матрицы

$$
\begin{aligned}
e_0 &= 1,\\
e_1 &= \mathrm{Tr} X,\\
e_2 &= \frac{1}{2}\left((\mathrm{Tr} X)^2 - \mathrm{Tr} X^2\right),\\
e_3 &= \frac{1}{6}\left((\mathrm{Tr} X)^3 - 3\mathrm{Tr} X \mathrm{Tr} X^2 + 2\mathrm{Tr} X^3\right),\\
e_4 &= \det X.
\end{aligned}
$$

О первородной порочности потенциала

Однако как показали (Boulware, Deser 1972) в общем случае гамильтониан двуметрической теории не содержит новых связей, помимо 4-х связей 1-го рода ОТО, поэтому число степеней свободы оказывается слишком большим

$$6[\gamma_{ij}] + 6[\eta_{ij}] - 4[\mathcal{H}, \mathcal{H}_i] = 8 > 7 = 2[\text{massless}] + 5[\text{massive}].$$

Причина в нелинейной зависимости гамильтониана от второй пары нединамических переменных, например, функций смещения и сдвига $\bar{N}$, $\bar{N}^i$ или от u, u^i.

О непорочном потенциале дРГТ

Простейший выбор матрицы $\mathsf{Y} = ||g^{\mu\alpha} f_{\alpha\nu}||$ приводит к тому, что произведения ее инвариантов на инвариантный объем $dV_g = \sqrt{-g} = Nu\sqrt{\gamma}$ или на $dV_f = \sqrt{-f} = N\sqrt{\eta}$ не будут линейными по u

$$\mathsf{Y} = \begin{pmatrix} -u^{-2}[n^\mu n_\nu] & u^{-2}u^i[n^\mu e_{\nu i}] \\ u^{-2}u^j[e_j^\mu n_\nu] & \left(\gamma^{ij} - u^{-2}u^i u^j\right)[e_i^\mu e_{\nu j}] \end{pmatrix},$$

а матрица $\mathsf{X} = \sqrt{\mathsf{Y}}$ будет иметь инварианты линейные по u^{-1}, так что при умножении на $dV_g = \sqrt{-g} = Nu\sqrt{\gamma}$ должны получаться выражения линейные по u и вот ОН:

$$\boxed{U_{\mathrm{dRGT}} = \sum_{i=0}^{i=4} \beta_i e_i(\mathsf{X})}.$$

О проблемах метрического формализма

Как извлечь квадратный корень из матрицы?

О борьбе с проблемами (Hassan-Rosen, 2011, Hassan-Lundkvist, 2018)

Делается замена переменных

$$u^i = v^i + uD^i{}_j v^j,$$

и предполагается, что корень можно теперь выразить так

$$X = \begin{pmatrix} (-\frac{\varepsilon}{u})[n^\mu n_\nu] & \frac{\varepsilon v^j}{u}[n^\mu e_{\nu j}] \\ \frac{\varepsilon v^i}{u}[e^\mu_i n_\nu] & \left(-\frac{\varepsilon v^i v^j}{u} + \frac{1}{\varepsilon} D^{ij}\right)[e^\mu_i e_{\nu j}] \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon = 1/\sqrt{1 - \eta_{ij} v^i v^j}$. Необходимыми условиями для такого выражения являются соотношения

$$D^{ij} = D^{ji}, \qquad \gamma^{ij} = D^i_k v^k D^j_m v^m + \varepsilon^{-2} D^{ik} D_k{}^j.$$

Таким образом, вводится неявная функция от метрических переменных $D^i{}_j$. Полные вычисления – 2018 год.

О борьбе с проблемами (Соловьев-Чичикина, 2013)

Потенциал задан неявной функцией

$$N\tilde{U}, \qquad \tilde{U} = \sqrt{\eta}\, U(u, u^i, \eta_{ij}, \gamma_{ij}),$$

гамильтониан

$$\mathrm{H} = \int \left(N\mathcal{R} + N^i\mathcal{R}_i\right) d^3x,$$

связи первого рода получаются варьированием по N, N^i,

$$\mathcal{R} = \mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \tilde{U}, \qquad \mathcal{R}_i = \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i,$$

связи второго рода – варьированием по u, u^i

$$\mathcal{S} = \bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u}, \qquad \mathcal{S}_i = \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i}.$$

О роли алгебры связей

Вычисляя скобки Пуассона между связями 1 рода получаем новые уравнения, связывающие первые производные от потенциала по всем переменным.

$$2\eta_{jk}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta_{ij}} + 2\gamma_{jk}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{ij}} - u^i\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} = \delta^i_k \tilde{U},$$

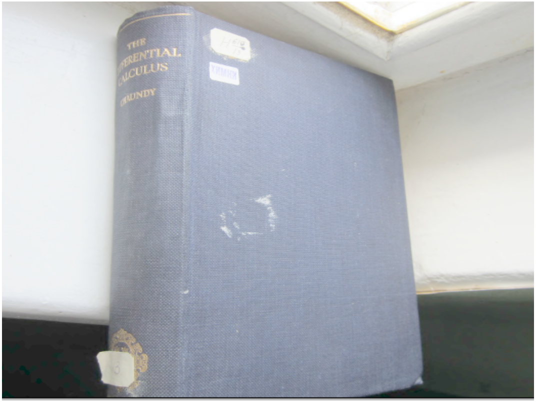
$$2u^j\gamma_{jk}\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{k\ell}} - u^\ell u\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} + \left(\eta^{k\ell} - u^2\gamma^{k\ell} - u^k u^\ell\right)\frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} = 0.$$

Скобки между связями 2 рода приводят к уравнению Монжа-Ампера, содержащему вторые производные от потенциала по переменным u, u^i

$$\det \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b}(x) = 0.$$

О волшебной математике

D. Fairlie, Лезнов А.Н., General solutions of the Monge-Ampère equation in n-dimensional space, Journal of Geometry and Physics 16, 385 (1995)



Th. Chaundy, The Differential Calculus, Oxford, 1935

О победе над проблемами

Связь $\mathcal{S}$ коммутирует сама с собой.
Для сохранение связи $\mathcal{S}$ при эволюции требуется вторичная связь Ω.
Связи $\mathcal{S}$ и Ω не коммутируют, следовательно они второго рода.

$$\{\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(y)\} = -\bar{U}^i \mathcal{S}(x)\delta_{,i}(x,y) + \bar{U}^i \mathcal{S}(y)\delta_{,i}(y,x),$$
$$\{\mathcal{R}(x), \mathcal{S}(y)\} = (u^i - u\bar{U}^i)\mathcal{S}(x)\delta_{,i}(x,y) - \left(u(\bar{U}^i\mathcal{S})_{,i} + \Omega\right)\delta(x,y),$$
$$\{\mathcal{S}(x), \Omega(y)\} \neq 0.$$

Этого достаточно для отсутствия духа Boulware-Deser.

О том, почему тетрады лучше метрики

Тетрады можно понимать как квадратный корень из метрики, поскольку

$$g = E^T E, \qquad g_{\mu\nu} = E_{\mu A} E^A_\nu,$$

$$g^{-1} = E^{-1}(E^{-1})^T, \qquad g^{\mu\nu} = E^\mu_A E^{A\nu},$$

тогда удается явно извлечь квадратный корень из матрицы смешанного тензора Y

$$\mathrm{X} = \sqrt{g^{-1} f} = \sqrt{E^{-1}(E^{-1})^T F^T F} = E^{-1} F^T,$$

если выполняются условия симметричности

$$(F E^{-1})^T = F E^{-1}.$$

Расшифровка неявных функций

Преобразование Хасана-Розен

$$u^i = v^i + uD^i{}_j v^j \equiv \left(\mathbf{f}^{ia} + u\mathbf{e}^{ia}\right)\mathbf{v}_a.$$

Коэффициенты в алгебре связей 2-го рода

$$\bar{U}^i = ||\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^i \partial u^j}||^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u \partial u^j} = -\mathbf{e}^{ia}\mathbf{v}_a.$$

Линейность потенциала по u, u^i

$$\tilde{U} = W + u^i V_i + uV \equiv W' + uV',$$

где u^i исключено верхней формулой.

Расшифровка потенциала

$$V' = e\Big(\beta_1 e_1(w) + \beta_2 e_2(w) + \beta_3 e_3(w)\Big) + \beta_0 e,$$
$$W' = \frac{e}{\varepsilon}\Big(\beta_1 e_0(z) + \beta_2 e_1(z) + \beta_3 e_2(z)\Big) + \beta_4 f.$$

где

$$z_{ab} = \mathcal{P}_{ac} x_{cb} \equiv \tilde{f}_{ia} \mathbf{e}^{ib}, \qquad \mathcal{P}_{ac} = \delta_{ac} + \frac{\varepsilon^2 \mathbf{v}_a \mathbf{v}_c}{\varepsilon + 1},$$
$$w_{ab} = \mathcal{P}^{-1}_{ac} x_{cb} \equiv \tilde{f}^{ia} \eta_{ij} \mathbf{e}^{jb}, \qquad \mathcal{P}^{-1}_{ac} = \delta_{ac} - \frac{\varepsilon \mathbf{v}_a \mathbf{v}_c}{\varepsilon + 1},$$
$$x_{cb} = \mathbf{f}_{ic} \mathbf{e}^{ib}, \qquad \tilde{f}_{ia} = \mathcal{P}_{ac} \mathbf{f}_{ic}, \qquad \tilde{f}^{ia} = \mathcal{P}^{-1}_{ac} \mathbf{f}^{ic},$$

Преимущества тетрадного подхода

- Потенциал (а значит и гамильтониан) линеен по функциям смещения и сдвига N, $\bar{N}$, N^i, $\bar{N}^i$
- Все нединамические функции являются множителями Лагранжа
- Условия симметричности тетрад получаются как вторичные связи
- Преобразование Hassan-Rosen выводится, а не постулируется
- Не используются ни неявные функции, ни скобки Дирака
- Выясняется смысл коэффициентов алгебры связей