О взаимодействиях полей высших спинов в $d = 3$

Ю. М. Зиновьев

JHEP 11 (2021) 022

План

1. Специфика $d = 3$
2. Безмассовые поля
3. Безмассовые супермультиплеты
4. Массивные поля
   - Два массивных и одно безмассовое
   - Три массивных

Группа изометрий

- Теорема Римана

$$N_{max} = \frac{d(d+1)}{2}$$

- (Псевдо-)трансляции и Лоренцевские преобразования

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= \Lambda M_{ab} \\ [M_{ab}, P_c] &= g_{ac} P_b - g_{ab} P_c \\ [M_{ab}, M_{cd}] &= g_{ac} M_{bd} + \dots \end{aligned}$$

- Три случая
  - $\Lambda > 0$: $O(1,d)$, de Sitter
  - $\Lambda = 0$: Poincare
  - $\Lambda < 0$: $O(2,d-1)$, anti de Sitter
- Случай $d = 3$, $\Lambda < 0$:

$$O(2,2) \approx O(1,2) \otimes O(1,2) \approx SL(2) \otimes SL(2) \approx Sp(2)^* \otimes Sp(2)^*$$

Группа изометрий

- Теорема Римана

$$N_{max} = \frac{d(d+1)}{2}$$

- (Псевдо-)трансляции и Лоренцевские преобразования

$$\begin{aligned} [P_a, P_b] &= \Lambda M_{ab} \\ [M_{ab}, P_c] &= g_{ac} P_b - g_{ab} P_c \\ [M_{ab}, M_{cd}] &= g_{ac} M_{bd} + \dots \end{aligned}$$

- Три случая
  - $\Lambda > 0$: $O(1,d)$, de Sitter
  - $\Lambda = 0$: Poincare
  - $\Lambda < 0$: $O(2,d-1)$, anti de Sitter
- Случай $d = 3$, $\Lambda < 0$:

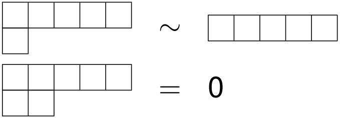
$$O(2,2) \approx O(1,2) \otimes O(1,2) \approx SL(2) \otimes SL(2) \approx Sp(2)^* \otimes Sp(2)^*$$

Еще немного алгебры

- Дуальность

$$M^{ab} \sim \varepsilon^{abc} M^c$$

- Теорема о тензорах со смешанной симметрией



- Следствие

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = W_{\mu\nu}{}^{ab} + \dots, \qquad W_{\mu\nu}{}^{ab} \sim$$

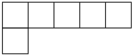
  - Все трехмерные геометрии — конформно плоские
  - Гравитон в $d = 3$ не имеет локальных степеней свободы

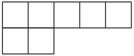
Еще немного алгебры

- Дуальность

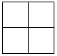
$$M^{ab} \sim \varepsilon^{abc} M^{c}$$

- Теорема о тензорах со смешанной симметрией

 $\sim$ 

 $= \; 0$

- Следствие

$$R_{\mu\nu}{}^{ab} = W_{\mu\nu}{}^{ab} + \ldots, \qquad W_{\mu\nu}{}^{ab} \sim$$ 

  - Все трехмерные геометрии — конформно плоские
  - Гравитон в $d = 3$ не имеет локальных степеней свободы

Реперный мультиспинорный формализм

- Калибровочные поля

$$\Phi_\mu{}^A \quad \Rightarrow \quad \Phi_\mu{}^{\alpha(2s)}, \qquad \alpha = 1, 2$$

- Все члены в лагранжиане — три-формы

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho}\Phi_\mu{}^A\Phi_\nu{}^B\Phi_\rho{}^C \sim \Phi^A \wedge \Phi^B \wedge \Phi^C \sim \Phi^A\Phi^b\Phi^C$$

- Пространство AdS_3:
  - базис форм $e^{\alpha(2)}$, $E_2^{\alpha(2)}$, E_3

$$e^{\alpha(2)} \wedge e^{\beta(2)} = \varepsilon^{\alpha\beta}E_2^{\alpha\beta}, \qquad E_2^{\alpha(2)} \wedge e^{\beta(2)} = \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}E_3$$

  - ковариантная производная

$$D \wedge D\xi^\alpha = -\lambda^2 E_2^\alpha{}_\beta\xi^\beta, \qquad \Lambda = -\lambda^2$$

Свободные поля

- Безмассовый бозон

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\Omega_{\alpha(2s-2)} D\Omega^{\alpha(2s-2)} + \frac{(s-1)\lambda}{2}\Omega_{\alpha(2s-3)\beta} e^{\beta}{}_{\gamma}\Omega^{\alpha(2s-3)\gamma}$$

- Калибровочные преобразования

$$\delta\Omega^{\alpha(2s-2)} = D\eta^{\alpha(2s-2)} + \frac{\lambda}{2} e^{\alpha}{}_{\beta}\eta^{\alpha(2s-3)\beta}$$

- Калибровочно инвариантная кривизна

$$\mathcal{R}^{\alpha(2s-2)} = D\Omega^{\alpha(2s-2)} + \frac{\lambda}{2} e^{\alpha}{}_{\beta}\Omega^{\alpha(2s-3)\beta}$$

- Лагранжевые уравнения

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Omega} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R}^{\alpha(2s-2)} \approx 0$$

Классификация кубических вершин

- Тривиально калибровочно инвариантные

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3$$

$$\delta\Phi = 0, \qquad [\delta_1, \delta_2] = 0$$

- Абелевые

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\Phi_3$$

$$\delta\Phi \sim \mathcal{R}, \qquad [\delta_1, \delta_2] = 0$$

- Неабелевые

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}_1\Phi_2\Phi_3$$

$$\delta\Phi \sim \Phi, \qquad [\delta_1, \delta_2] \neq 0$$

- $d = 3$!

$$\mathcal{L}_1 \sim \Phi_1\Phi_2\Phi_3 \qquad ???$$

Классификация кубических вершин

- Тривиально калибровочно инвариантные

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3$$

$$\delta\Phi = 0, \qquad [\delta_1, \delta_2] = 0$$

- Абелевые

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2\Phi_3$$

$$\delta\Phi \sim \mathcal{R}, \qquad [\delta_1, \delta_2] = 0$$

- Неабелевые

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}_1\Phi_2\Phi_3$$

$$\delta\Phi \sim \Phi, \qquad [\delta_1, \delta_2] \neq 0$$

- $d = 3$!

$$\mathcal{L}_1 \sim \Phi_1\Phi_2\Phi_3 \qquad ???$$

Вершины безмассовых полей

- Анзатц:

$$\mathcal{L}_1 = g\Omega_1^{\alpha(\hat{s}_3)\beta(\hat{s}_2)}\Omega_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3)}\Omega_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1)}$$

- Параметры $\hat{s}_i$ должны удовлетворять

$$\hat{s}_2 + \hat{s}_3 = 2s_1 - 2, \qquad \hat{s}_1 + \hat{s}_3 = 2s_2 - 2, \qquad \hat{s}_1 + \hat{s}_2 = 2s_3 - 2$$

это дает

$$\hat{s}_3 = s_1 + s_2 - s_3 - 1, \qquad \hat{s}_2 = s_1 + s_3 - s_2 - 1, \qquad \hat{s}_1 = s_2 + s_3 - s_1 - 1$$

- $\hat{s}_i \geq 0 \Rightarrow$ треугольное неравенство
- Воспроизводятся все кубические вершины
- Четверные вершины отсутствуют! Тем не менее существуют замкнутые модели, включая модели с конечным числом высших спинов

Вершины безмассовых полей

- Анзатц:

$$\mathcal{L}_1 = g\Omega_1^{\alpha(\hat{s}_3)\beta(\hat{s}_2)}\Omega_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3)}\Omega_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1)}$$

- Параметры $\hat{s}_i$ должны удовлетворять

$$\hat{s}_2 + \hat{s}_3 = 2s_1 - 2, \qquad \hat{s}_1 + \hat{s}_3 = 2s_2 - 2, \qquad \hat{s}_1 + \hat{s}_2 = 2s_3 - 2$$

это дает

$$\hat{s}_3 = s_1 + s_2 - s_3 - 1, \qquad \hat{s}_2 = s_1 + s_3 - s_2 - 1, \qquad \hat{s}_1 = s_2 + s_3 - s_1 - 1$$

- $\hat{s}_i \geq 0 \Rightarrow$ треугольное неравенство
- Воспроизводятся все кубические вершины
- Четверные вершины отсутствуют! Тем не менее существуют замкнутые модели, включая модели с конечным числом высших спинов

Вершины безмассовых полей

- Анзатц:
$$\mathcal{L}_1 = g\Omega_1^{\alpha(\hat{s}_3)\beta(\hat{s}_2)}\Omega_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3)}\Omega_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1)}$$
- Параметры $\hat{s}_i$ должны удовлетворять
$$\hat{s}_2 + \hat{s}_3 = 2s_1 - 2, \qquad \hat{s}_1 + \hat{s}_3 = 2s_2 - 2, \qquad \hat{s}_1 + \hat{s}_2 = 2s_3 - 2$$
это дает
$$\hat{s}_3 = s_1 + s_2 - s_3 - 1, \qquad \hat{s}_2 = s_1 + s_3 - s_2 - 1, \qquad \hat{s}_1 = s_2 + s_3 - s_1 - 1$$
- $\hat{s}_i \geq 0 \Rightarrow$ треугольное неравенство
- Воспроизводятся все кубические вершины
- Четверные вершины отсутствуют! Тем не менее существуют замкнутые модели, включая модели с конечным числом высших спинов

Суперсимметричные вершины

- Два типа супермультиплетов $(\Phi_{s+1/2}, \Omega_s)$, $(\Omega_s, \Psi_{s-1/2})$
- Структура суперсимметричной вершины

$$\mathcal{L}_1 \sim g_0\Omega_1\Omega_2\Omega_3 + g_1\Omega_1\Phi_2\Phi_3 + g_2\Phi_1\Omega_2\Phi_3 + g_3\Phi_1\Phi_2\Omega_3$$

- Вершина $(s_1, s_1 + 1/2)$, $(s_2, s_2 + 1/2)$, $(s_3, s_3 - 1/2)$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 \quad = \quad & g_0\Omega_1^{\alpha(\hat{s}_3)\beta(\hat{s}_2)}\Omega_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3)}\Omega_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1)} \\ & + ig_1\lambda\Omega_1^{\alpha(\hat{s}_3+1)\beta(\hat{s}_2-1)}\Phi_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3+1)}\Psi_{3,\beta(\hat{s}_2-1)\gamma(\hat{s}_1)} \\ & + ig_2\lambda\Phi_1^{\alpha(\hat{s}_3+1)\beta(\hat{s}_2)}\Omega_2^{\gamma(\hat{s}_1-1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3+1)}\Psi_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1-1)} \\ & + ig_3\lambda\Phi_1^{\alpha(\hat{s}_3+1)\beta(\hat{s}_2)}\Phi_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3+1)}\Omega_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1)}\end{aligned}$$

- Вершина $(s_i, s_i - 1/2)$, $i = 1, 2, 3$ — аналогично

Суперсимметричные вершины

- Два типа супермультиплетов $(\Phi_{s+1/2}, \Omega_s)$, $(\Omega_s, \Psi_{s-1/2})$
- Структура суперсимметричной вершины

$$\mathcal{L}_1 \sim g_0\Omega_1\Omega_2\Omega_3 + g_1\Omega_1\Phi_2\Phi_3 + g_2\Phi_1\Omega_2\Phi_3 + g_3\Phi_1\Phi_2\Omega_3$$

- Вершина $(s_1, s_1 + 1/2)$, $(s_2, s_2 + 1/2)$, $(s_3, s_3 - 1/2)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 \quad = \quad & g_0\Omega_1^{\alpha(\hat{s}_3)\beta(\hat{s}_2)}\Omega_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3)}\Omega_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1)} \\
& + ig_1\lambda\Omega_1^{\alpha(\hat{s}_3+1)\beta(\hat{s}_2-1)}\Phi_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3+1)}\Psi_{3,\beta(\hat{s}_2-1)\gamma(\hat{s}_1)} \\
& + ig_2\lambda\Phi_1^{\alpha(\hat{s}_3+1)\beta(\hat{s}_2)}\Omega_2^{\gamma(\hat{s}_1-1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3+1)}\Psi_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1-1)} \\
& + ig_3\lambda\Phi_1^{\alpha(\hat{s}_3+1)\beta(\hat{s}_2)}\Phi_2^{\gamma(\hat{s}_1)}{}_{\alpha(\hat{s}_3+1)}\Omega_{3,\beta(\hat{s}_2)\gamma(\hat{s}_1)}
\end{aligned}$$

- Вершина $(s_i, s_i - 1/2)$, $i = 1, 2, 3$ — аналогично

Свободные поля

- Массивный бозон — набор полей $\Omega^{\alpha(2s-2)}, \Omega^{\alpha(2s-4)}, \ldots, \Omega^{\alpha(2)}$
- Лагранжиан

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \sum_{k=1} (-1)^{k+1} [\frac{1}{2}\Omega_{\alpha(2k)} D\Omega^{\alpha(2k)} + \frac{Ms}{2(k+1)} \Omega_{\alpha(2k-1)\beta} e^{\beta}{}_{\gamma} \Omega^{\alpha(2k-1)} \\
& -a_k \Omega_{\alpha(2k)\beta(2)} e^{\beta(2)} \Omega^{\alpha(2k)}]
\end{aligned}
$$

- Калибровочные преобразования

$$
\begin{aligned}
\delta\Omega^{\alpha(2k)} \;=\; & D\eta^{\alpha(2k)} + a_k e_{\beta(2)} \eta^{\alpha(2k)\beta(2)} + \frac{a_{k-1}}{k(2k-1)} e^{\alpha(2)} \eta^{\alpha(2k-2)} \\
& + \frac{Ms}{2k(k+1)} e^{\alpha}{}_{\beta} \eta^{\alpha(2k-1)\beta} \\
\delta\Omega^{\alpha(2)} \;=\; & a_1 e_{\beta(2)} \eta^{\alpha(2)\beta(2)}
\end{aligned}
$$

Свободные поля

- Массивный бозон — набор полей $\Omega^{\alpha(2s-2)}, \Omega^{\alpha(2s-4)}, \dots, \Omega^{\alpha(2)}$
- Лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \sum_{k=1}(-1)^{k+1}[\frac{1}{2}\Omega_{\alpha(2k)} D\Omega^{\alpha(2k)} + \frac{Ms}{2(k+1)}\Omega_{\alpha(2k-1)\beta} e^{\beta}{}_{\gamma}\Omega^{\alpha(2k-1)} \\ & -a_k \Omega_{\alpha(2k)\beta(2)} e^{\beta(2)}\Omega^{\alpha(2k)}]\end{aligned}$$

- Калибровочные преобразования

$$\begin{aligned}\delta\Omega^{\alpha(2k)} \;&=\; D\eta^{\alpha(2k)} + a_k e_{\beta(2)}\eta^{\alpha(2k)\beta(2)} + \frac{a_{k-1}}{k(2k-1)} e^{\alpha(2)}\eta^{\alpha(2k-2)} \\ & + \frac{Ms}{2k(k+1)} e^{\alpha}{}_{\beta}\eta^{\alpha(2k-1)\beta} \\ \delta\Omega^{\alpha(2)} \;&=\; a_1 e_{\beta(2)}\eta^{\alpha(2)\beta(2)}\end{aligned}$$

Два массивных и одно безмассовое поле

- Теория Прокушкина-Васильева — взаимодейсивие безмассовых высших спинов с массивными скаляром и спинором (развернутый формализм)
- Взаимодействие двух массивных полей (M_1, s_1), (M_2, s_2) и безмассового со спином s_3:
  - спины (s_1, s_2, s_3) должны удовлетворять треугольному неравенству;
  - массы должны удовлетворять соотношению

$$M_1 - M_2 = (s_1 - s_2)\lambda$$

- Частный случай $(s_3 = 3/2)$ — массивные супермультиплеты (Бухбиндер, Снегирев, З.):

$$s_1 = s_2 \pm \frac{1}{2}, \qquad M_1 = M_2 \pm \frac{\lambda}{2}$$

Два массивных и одно безмассовое поле

- Теория Прокушкина-Васильева — взаимодейсивие безмассовых высших спинов с массивными скаляром и спинором (развернутый формализм)
- Взаимодействие двух массивных полей (M_1, s_1), (M_2, s_2) и безмассового со спином s_3:
  - спины (s_1, s_2, s_3) должны удовлетворять треугольному неравенству;
  - массы должны удовлетворять соотношению

$$M_1 - M_2 = (s_1 - s_2)\lambda$$

- Частный случай $(s_3 = 3/2)$ — массивные супермультиплеты (Бухбиндер, Снегирев, З.):

$$s_1 = s_2 \pm \frac{1}{2}, \qquad M_1 = M_2 \pm \frac{\lambda}{2}$$

Три массивных поля

- В метрическом формализме классификация отсутствует
- Классификация Мецаева (light cone):
  существует одна вершина для любых трех спинов (с любыми массами)
- Реперный формализм:
  - в линейном приближении ограничений на массы не возникает;
  - спины должны удовлетворять треугольному неравенству
- Суперзадача — построить модели, описывающие "траектории Редже" (с зависимостью массы от спина)

Три массивных поля

- В метрическом формализме классификация отсутствует
- Классификация Мецаева (light cone):
  существует одна вершина для любых трех спинов (с любыми массами)
- Реперный формализм:
  - в линейном приближении ограничений на массы не возникает;
  - спины должны удовлетворять треугольному неравенству
- Суперзадача — построить модели, описывающие "траектории Редже" (с зависимостью массы от спина)