Формализм Фрадкина-Васильева для массивных полей на примере спинов 2 и 3/2

М. В. Хабаров, Ю. М. Зиновьев

Class. Quant. Grav. 38 (2021) 195012
arXiv:2107.05900, Nucl. Phys. B.

Конструктивный подход

- Лагранжиан и калибровочные преобразования представляются в виде ряда по степеням полей

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \ldots, \qquad \delta\phi = \delta_0 + \delta_1 + \delta_2 + \ldots$$

- Свободный лагранжиан калибровочно инвариантен $\delta_0 \mathcal{L}_0 = 0$
- В первом нетривиальном (кубическом) приближении калибровочная инвариантность требует

$$\frac{\delta \mathcal{L}_1}{\delta\phi}\delta_0\phi + \frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta\phi}\delta_1\phi = 0$$

- Два этапа
  - Найти $\mathcal{L}_1$ такой, что $\delta_0 \mathcal{L}_1 \approx 0$
  - Найти поправки $\delta_1\phi$

Высшие производные и замены переменных

- Высшие спины с необходимостью требуют взаимодействия с высшими производными. При этом
  - высшие производные в уравнениях могут увеличивать число степеней свободы (как правило за счет нефизических);
  - высшие производные в калибровочных преобразованиях могут менять число связей и уменьшать число степеней свободы
- Нетривиальная задача — сбалансировать эти два механизма
- В конструктивном подходе вершины всегда определены с точностью до нелинейных замен переменных. В кубическом приближении

$$\phi \Rightarrow \phi + \phi^2$$

$$\mathcal{L}_0 \Rightarrow \mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$$

- Отдельный вопрос — какие замены переменных допустимы

Высшие производные и замены переменных

- Высшие спины с необходимостью требуют взаимодействия с высшими производными. При этом
  - высшие производные в уравнениях могут увеличивать число степеней свободы (как правило за счет нефизических);
  - высшие производные в калибровочных преобразованиях могут менять число связей и уменьшать число степеней свободы
- Нетривиальная задача — сбалансировать эти два механизма
- В конструктивном подходе вершины всегда определены с точностью до нелинейных замен переменных. В кубическом приближении

$$\phi \Rightarrow \phi + \phi^2$$

$$\mathcal{L}_0 \Rightarrow \mathcal{L}_0 + \Delta\mathcal{L}_1$$

- Отдельный вопрос — какие замены переменных допустимы

Реперный формализм Васильева

- Реперный формализм в гравитации
  - $h_{(\mu\nu)} \Rightarrow e_\mu{}^a, \ \omega_\mu{}^{[ab]}$
  - $\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} \Rightarrow \delta e_\mu{}^a = \partial_\mu \xi^a, \quad \delta\Omega_\mu{}^{ab} = \partial_\mu \eta^{ab}$
  - $\omega \approx \partial h, \quad \eta \approx \partial\xi$
  - Два калибровочно инвариантных объекта $R_{\mu\nu}{}^{ab}, \quad T_{\mu\nu}{}^a \approx 0$
- Обобщение на произвольный спин (Васильев, 80)
  - $h_{\mu(s)} \Rightarrow \Phi_\mu{}^{a(s-1)}, \quad \Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)}, \quad 1 \le k \le s-1$
  - $\delta h_{\mu(s)} = \partial_{(\mu}\xi_{\mu(s-1))} \Rightarrow \delta\Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)} = \partial_\mu \eta^{a(s-1),b(k)}$
  - $\Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)} \approx \partial^k \Phi, \quad \eta^{a(s-1),b(k)} \approx \partial^k \xi$
  - Есть s калибровочно инвариантных объектов $R_{\mu\nu}{}^{a(s-1),b(s-1)}, \quad T_{\mu\nu}{}^{a(s-1),b(k)} \approx 0, \quad 1 \le k \le s-1$
- Для произвольного спина свободный лагранжиан выражается через физическое и первое вспомогательное поле

$$\mathcal{L}_0 \sim \Omega\Omega + \Omega\partial\Phi$$

Реперный формализм Васильева

- Реперный формализм в гравитации
  - $h_{(\mu\nu)} \Rightarrow e_\mu{}^a, \ \omega_\mu{}^{[ab]}$
  - $\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} \Rightarrow \delta e_\mu{}^a = \partial_\mu \xi^a, \quad \delta\Omega_\mu{}^{ab} = \partial_\mu \eta^{ab}$
  - $\omega \approx \partial h, \quad \eta \approx \partial \xi$
  - Два калибровочно инвариантных объекта $R_{\mu\nu}{}^{ab}, \quad T_{\mu\nu}{}^a \approx 0$
- Обобщение на произвольный спин (Васильев, 80)
  - $h_{\mu(s)} \Rightarrow \Phi_\mu{}^{a(s-1)}, \quad \Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)}, \quad 1 \le k \le s-1$
  - $\delta h_{\mu(s)} = \partial_{(\mu}\xi_{\mu(s-1))} \Rightarrow \delta\Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)} = \partial_\mu \eta^{a(s-1),b(k)}$
  - $\Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)} \approx \partial^k \Phi, \quad \eta^{a(s-1),b(k)} \approx \partial^k \xi$
  - Есть s калибровочно инвариантных объектов
    $R_{\mu\nu}{}^{a(s-1),b(s-1)}, \quad T_{\mu\nu}{}^{a(s-1),b(k)} \approx 0, \quad 1 \le k \le s-1$
- Для произвольного спина свободный лагранжиан выражается через физическое и первое вспомогательное поле

$$\mathcal{L}_0 \sim \Omega\Omega + \Omega\partial\Phi$$

Реперный формализм Васильева

- Реперный формализм в гравитации
  - $h_{(\mu\nu)} \Rightarrow e_\mu{}^a,\ \omega_\mu{}^{[ab]}$
  - $\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} \Rightarrow \delta e_\mu{}^a = \partial_\mu \xi^a, \quad \delta\Omega_\mu{}^{ab} = \partial_\mu \eta^{ab}$
  - $\omega \approx \partial h, \quad \eta \approx \partial\xi$
  - Два калибровочно инвариантных объекта $R_{\mu\nu}{}^{ab}, \quad T_{\mu\nu}{}^a \approx 0$
- Обобщение на произвольный спин (Васильев, 80)
  - $h_{\mu(s)} \Rightarrow \Phi_\mu{}^{a(s-1)}, \quad \Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)}, \quad 1 \le k \le s-1$
  - $\delta h_{\mu(s)} = \partial_{(\mu}\xi_{\mu(s-1))} \Rightarrow \delta\Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)} = \partial_\mu \eta^{a(s-1),b(k)}$
  - $\Omega_\mu{}^{a(s-1),b(k)} \approx \partial^k\Phi, \quad \eta^{a(s-1),b(k)} \approx \partial^k\xi$
  - Есть s калибровочно инвариантных объектов $R_{\mu\nu}{}^{a(s-1),b(s-1)}, \quad T_{\mu\nu}{}^{a(s-1),b(k)} \approx 0, \quad 1 \le k \le s-1$
- Для произвольного спина свободный лагранжиан выражается через физическое и первое вспомогательное поле

$$\mathcal{L}_0 \sim \Omega\Omega + \Omega\partial\Phi$$

Формализм Фрадкина-Васильева

- Экстра поля не входят в свободный лагранжиан $\Rightarrow$ непосредственно конструктивный подход не применим
- "На массовой поверхности" эквивалентно $T_{\mu\nu}{}^{a(s-1),b(k)} \approx 0 \Rightarrow$ самосогласованная деформация калибровочно инвариантных объектов (кривизн)
- Деформация кривизн $R \to \hat{R} = R + \Omega\Omega$ однозначно определяет и поправки к калибровочным преобразованиям $\delta_1\Omega \sim \Omega\eta$
- Самосогласованность означает что деформированные кривизны преобразуются ковариантно $\delta\hat{R} \sim R\eta$
- Лагранжиан взаимодействия строится из деформированных кривизн и исходных полей из требования калибровочной инвариантности относительно (поправленных) калибровочных преобразований

Калибровочная инвариантность и массивные поля

- Классические лагранжианы массивных полей (Singh-Hagen 74) содержат набор вспомогательных полей, а из уравнений следуют необходимые связи
- В безмассовом пределе $s \Rightarrow \pm s, \pm(s-1), \ldots 0(\pm 1/2)$
- Безмассовые поля (Fang-Fronsdal 78)

$$\delta\Phi_{\mu(s)} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu(s-1))}, \qquad \tilde{\tilde{\Phi}} = 0, \qquad \tilde{\xi} = 0$$

- Калибровочно инвариантное описание массивных полей

$$\begin{array}{rcl} \Phi_{\mu(s)} & \Rightarrow & \Phi'_{\mu(s)},\ \Phi''_{\mu(s-2)} \\ \Phi_{\mu(s-1)} & \Rightarrow & \Phi'_{\mu(s-1)},\ \Phi''_{\mu(s-3)} \\ \Phi_{\mu(s-2)} & \Rightarrow & \Phi'_{\mu(s-2)},\ \Phi''_{\mu(s-4)} \\ & \ldots & \end{array}$$

- Каждое поле играет двойную роль $\delta\Phi_k \sim \partial\xi_{k-1} + m\xi_k$

Типы кубических вершин

- Тривиально калибровочно инвариантные

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}, \qquad \delta\Phi = 0, \qquad [\delta_1, \delta_2] = 0$$

- Абелевые (типа Черна-Саймонса)

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}\mathcal{R}\Phi, \qquad \delta\Phi \sim \mathcal{R}\xi, \qquad [\delta_1, \delta_2] = 0$$

- Неабелевые (типа Янга-Миллса)

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}\Phi\Phi, \qquad \delta\Phi \sim \Phi\xi, \qquad [\delta_1, \delta_2] \neq 0$$

Замены переменных и Штукельберговские поля

- Общие утверждения, полученные в рамках метрического BV-формализма (Boulanger et all 2018)
  - В массивной теории всегда существует достаточное число замен переменных, чтобы трансформировать любую неабелевую вершину в абелевую
  - Далее. используя замены переменных с еще большим числом производных, можно свести любую вершину к тривиально калибровочно инвариантной форме
- Поскольку все замены содержат Штукельберговские поля, в унитарной калибровке все три представления имеют один и тот же вид
- Нашей задачей было исследовать как эти утверждения реализуются в формализме Фрадкина-Васильева и что меняется из-за присутствия безмассовых полей

Замены переменных и Штукельберговские поля

- Общие утверждения, полученные в рамках метрического BV-формализма (Boulanger et all 2018)
  - В массивной теории всегда существует достаточное число замен переменных, чтобы трансформировать любую неабелевую вершину в абелевую
  - Далее. используя замены переменных с еще большим числом производных, можно свести любую вершину к тривиально калибровочно инвариантной форме
- Поскольку все замены содержат Штукельберговские поля, в унитарной калибровке все три представления имеют один и тот же вид
- Нашей задачей было исследовать как эти утверждения реализуются в формализме Фрадкина-Васильева и что меняется из-за присутствия безмассовых полей

Замены переменных и Штукельберговские поля

- Общие утверждения, полученные в рамках метрического BV-формализма (Boulanger et all 2018)
  - В массивной теории всегда существует достаточное число замен переменных, чтобы трансформировать любую неабелевую вершину в абелевую
  - Далее. используя замены переменных с еще большим числом производных, можно свести любую вершину к тривиально калибровочно инвариантной форме
- Поскольку все замены содержат Штукельберговские поля, в унитарной калибровке все три представления имеют один и тот же вид
- Нашей задачей было исследовать как эти утверждения реализуются в формализме Фрадкина-Васильева и что меняется из-за присутствия безмассовых полей

Конкретные примеры

- Безмассовый спин 2 и массивный спин 3/2
  соответствует спонтанному нарушению суперсимметрии в супергравитации
- Самодействие массивного спина 2
  массивная гравитация (СНС ?)
- Безмассовый и массивный спин 2
  соответствует биграввитации (СНС ?)

Гравитон и массивный спин 3/2

- Поля: $h_\mu{}^a$, $\omega_\mu{}^{ab}$, Φ_μ, ϕ
- Калибровочно инвариантные объекты

$$T_{\mu\nu}{}^a \approx 0, \qquad R_{\mu\nu}{}^{ab}, \qquad \mathcal{F}_{\mu\nu}, \qquad \mathcal{C}_\mu$$

- Их наиболее общая самосогласованная неабелевая деформация убирается заменами переменных
- Тривиально калибровочно инвариантная вершина

$$\mathcal{L}_0 \sim \left\{ \begin{matrix} \mu\nu\alpha\beta \\ abcd \end{matrix} \right\} R_{\mu\nu}{}^{ab} \bar{\mathcal{C}}_\alpha \Gamma^{cd} \mathcal{C}_\beta$$

- Есть две абелевые вершины вида

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{F}\mathcal{C}\omega + \mathcal{C}\mathcal{C}\omega + \mathcal{F}\mathcal{C}h + \mathcal{C}\mathcal{C}h$$

одна из которых воспроизводит минимальное гравитационное взаимодействие для массивного спина 3/2

Самодействие массивного спина 2

- Поля: $(f_\mu{}^a,\ \Omega_\mu{}^{ab})$, $(A_\mu,\ B^{ab})$, $(\varphi,\ \pi^a)$
- Калибровочно инвариантные объекты

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^a \approx 0, \quad \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^{ab}, \quad \mathcal{A}_{\mu\nu} \approx 0, \quad \mathcal{B}_\mu{}^{ab}, \quad \mathcal{C}_\mu \approx 0, \quad \Pi_\mu{}^a$$

- Заменами переменных все сводится к четырем тривиально калибровочно инвариантным вершинам, содержащим до четырех производных:

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{R}\mathcal{B}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{B}\Pi + \Pi\Pi\Pi$$

- Как частные случаи воспроизводятся результаты, полученные из бозонной струны и суперструны, а комбинации, содержащие не более двух производных, воспроизводят кубическое приближение массивной dRGT гравитации

Самодействие массивного спина 2

- Поля: $(f_\mu{}^a,\ \Omega_\mu{}^{ab})$, $(A_\mu,\ B^{ab})$, $(\varphi,\ \pi^a)$
- Калибровочно инвариантные объекты

$$\mathcal{T}_{\mu\nu}{}^a \approx 0, \quad \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^{ab}, \quad \mathcal{A}_{\mu\nu} \approx 0, \quad \mathcal{B}_\mu{}^{ab}, \quad \mathcal{C}_\mu \approx 0, \quad \Pi_\mu{}^a$$

- Заменами переменных все сводится к четырем тривиально калибровочно инвариантным вершинам, содержащим до четырех производных:

$$\mathcal{L}_1 \sim \mathcal{RBB} + \mathcal{BB}\Pi + \Pi\Pi\Pi$$

- Как частные случаи воспроизводятся результаты, полученные из бозонной струны и суперструны, а комбинации, содержащие не более двух производных, воспроизводят кубическое приближение массивной dRGT гравитации

Гравитон и массивный спин 2

- Поля: $(h_\mu{}^a,\ \omega_\mu{}^{ab})$, $(f_\mu{}^a,\ \Omega_\mu{}^{ab})$, $(A_\mu,\ B^{ab})$, $(\varphi,\ \pi^a)$
- Незануляющиеся на массовой поверхности кривизны

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}, \qquad \mathcal{R}_{\mu\nu}{}^{ab}, \qquad \mathcal{B}_\mu{}^{ab}, \qquad \Pi_\mu{}^a$$

- Заменами переменных все сводится к трем тривиально инвариантным и лвум абелевым вершинам вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_t &\sim R[\mathcal{R}\Pi + \mathcal{B}\mathcal{B} + \Pi\Pi] \\ \mathcal{L}_a &\sim \mathcal{B}\Pi\omega + [\mathcal{B}\mathcal{B} + \Pi\Pi]h \end{aligned}$$

- Как частные случаи воспроизводятся результаты, полученные из бозонной струны и суперструны, а комбинации, содержащие не более двух производных, воспроизводят кубическое приближение HS биgравитации