

Влияние плотной кварковой материи на глюонный пропагатор в КХ₂Д. Часть 1.

Р. Н. Роголёв

НИЦ “Курчатовский Институт” - ИФВЭ

13.04.2021

- Effects of Dense Quark Matter on Gluon Propagators in QC₂D [Phys.Rev.D, vol.102 \(2020\) 114511](#)
(with Bornyakov, V. G. and Braguta, V. V. and Nikolaev, A. A.)
- Gluons in Two-Color QCD at High Baryon Density, [2101.01808](#)
- The A^2 Asymmetry and Gluon Propagators in Lattice $SU(3)$ Gluodynamics at $T \simeq T_c$, [2101.03605](#)
- Decomposition of the $SU(2)$ gauge field in the Maximal Abelian gauge, [2101.04196](#)
- Gluon Propagators in $2 + 1$ Lattice QCD with Nonzero Isospin Chemical Potential [2102.07821](#)
- Quark Density in Lattice QC₂D at Imaginary and Real Chemical Potential [2103.07442](#)
-

Содержание

- 1 Решёточная регуляризация в КХД
 - ▶ Матрица плотности
 - ▶ Действие Вильсона и вычисление средних
 - ▶ Фиксация масштаба
 - ▶ Фиксация калибровки
- 2 Теория линейного отклика
 - ▶ массы экранирования в теории возмущений
- 3 Химический потенциал

Для вычисления средних $\langle \mathcal{O} \rangle$ в динамической системе с гамильтонианом \hat{H} при температуре T

надо знать статсумму:

$$Z = \text{Tr} \exp \left(- \frac{\hat{H}}{T} \right) \quad (1)$$

и матрицу плотности (трансфер-матрицу):

$$\rho = \frac{1}{Z} \exp \left(- \frac{\hat{H}}{T} \right) . \quad (2)$$

Тогда

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr} \mathcal{O} \rho \quad (3)$$

Пространство состояний предполагается известным!

Например

$$\hat{H} = \int d\vec{x} \left[\frac{1}{2} \pi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_i} \right)^2 + V(\phi(\vec{x})) \right]$$

Пространство состояний - множество функционалов $F[\phi]$ на $L_2(\mathbb{R}^3)$.
Регуляризация $L_2(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^{N^3}$:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{x} \in \Lambda} \left[\frac{1}{2} \pi^2(\vec{x}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x} - \mathbf{a}\hat{i})}{a} \right)^2 + V(\phi(\vec{x})) \right]$$

Λ - кубическая решётка с N узлами вдоль каждого направления и шагом \mathbf{a} ; \hat{i} - ед. вектор вдоль направления i .

Выражение матрицы плотности (и статсуммы) через функциональный интеграл

$$\langle x'' | \exp \left(-\frac{\hat{H}}{T} \right) | x' \rangle = \int_{x(0)=x', x(1/T)=x''} D[x(t)] \exp(-S_E[x(t)])$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \quad S_E = \int_0^{\frac{1}{T}} d\tau \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) \right]$$

При переходе к интегралам по траекториям время считается дискретным.

$$\exp \left(-\frac{\hat{p}^2}{2mT} - \frac{V(\hat{x})}{T} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{\hat{p}^2}{2mTN} \right)^N \exp \left(-\frac{V(\hat{x})}{TN} \right)^N$$

Зная матрицу плотности $\rho(x', x'') =$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{Z} \int_{x_0=x'}^{x_N=x''} dx_1 \dots dx_{N-1} \exp \left\{ -\Delta \sum_{j=1}^N \left(\frac{m(x_j - x_{j-1})^2}{2\Delta^2} - V(x_j) \right) \right\}, \quad (4)$$

где $\Delta = \frac{1}{NT}$, можно найти средние динамических переменных $\hat{K}(p, q)$:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{Z} \int K(x', x'') \langle x'' | e^{-H/T} | x' \rangle dx' dx''.$$

$$\langle \hat{K}(q) \rangle = \int_{x(0)=x'}^{x(1/T)=x''} Dx K(x) \exp \left\{ - \int_0^{1/T} L_E[x(t)] dt \right\}. \quad (5)$$

Вычислим среднее значение \hat{p}^2 для свободной частицы

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{-1}{Z} \int \left(\frac{\partial}{\partial x''} \right)^2 \Big|_{x''=x'} \langle x'' | e^{-H/T} | x' \rangle dx' \quad (6)$$

В этом случае можно использовать как прямое вычисление матричного элемента $\langle x'' | e^{-H/T} | x' \rangle = \exp \left(- \frac{m(x'' - x')^2}{2T} \right) dx'$, так и его представление в виде континуального интеграла. В результате получаем цепочку равенств

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = mT = -m^2 \langle \dot{x}^2 \rangle + NmT, \quad (7)$$

где

$$\langle (\dot{x})^2 \rangle = \frac{1}{Z} \int_{x(t')=x'}^{x(t'')=x''} Dx (\dot{x})^2 \exp \left\{ - \int_{t'}^{t''} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right) dt \right\}. \quad (8)$$

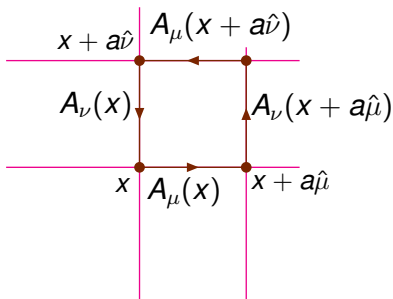
калибровка: $A_0^a = 0 \implies \dot{A}_0^a = 0, A_0^a T_{jk}^a = \lambda_j \delta_{jk}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int d\vec{x} (E^2 + B^2)$$

Закон Гаусса накладывает в виде условия на состояния:

$$\hat{P} = \int_{\Lambda(\infty)=0} D\Lambda \exp \left(-i \int d\vec{x} \text{Tr} \hat{E}_i^a(\vec{x}) D_i^{ab} \Lambda^b(\vec{x}) \right)$$

$$\begin{aligned}
 Z(V, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \left[\hat{P} \exp \left(-\frac{\hat{H}}{NT} \right) \right]^N \\
 &= \int DA_\mu(\vec{x}, \tau) \exp \left[-\frac{1}{4} \int_0^{1/T} d\tau \int_V d\vec{x} F_{\mu\nu}^2 \right] \\
 &A_\mu(0, \vec{x}) = A_\mu(1/T, \vec{x}); \quad A_0 \equiv \Lambda
 \end{aligned} \tag{9}$$



Можно искать калибровочно-инвариантную регуляризованную теорию, выбрав "затравочное" действие и

$$S_E = \int_0^{1/T} d\tau \int_V d\vec{x} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right)$$

"затравочную" формулу для преобразований:

$$\partial_\mu A_\nu \rightarrow \frac{A_\nu(x + a\hat{\mu}) - A_\nu(x)}{a}$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \Omega^\dagger A_\mu \Omega + \frac{i}{g} \Omega^\dagger \partial_\mu \Omega,$$

В процессе построения теории возмущений истинные формулы для $A_\mu(x)$, $\Omega(x)$ и S_E получатся в виде рядов по g и a .

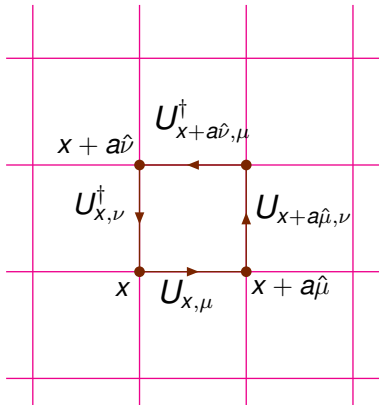
$$A_\mu(x) \rightarrow U_{x,\mu} = \exp\left(\frac{igaA_\mu(x)}{2}\right),$$

$$\Omega_x^\dagger A_\mu \Omega_x + \frac{i}{g} \Omega_x^\dagger \partial_\mu \Omega_x \rightarrow \Omega_x^\dagger U_{x,\mu} \Omega_{x+a\hat{\mu}}$$

$$\frac{a^4}{4} F_{\mu\nu}^2 = \frac{2N}{g^2} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U_{x+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x,\nu}^\dagger \right) + \underline{O}(a^6)$$

$$Z(V, T) = \int DA_\mu(\vec{x}, \tau) \exp[-S_E]$$

$$A_\mu(0, \vec{x}) = A_\mu(1/T, \vec{x})$$



$$S = \frac{2N}{g^2} \sum_{P=X,\mu,\nu} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } U_P \right)$$

$$U_P = U_{x,\mu} U_{x+a\hat{\mu},\nu} U_{x+a\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x,\nu}^\dagger$$

$$U_{x,\mu} = \exp \left(\frac{igaA_\mu}{2} \right),$$

Калибровочные преобразования

$$\Omega : U_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x^\dagger U_{x,\mu} \Omega_{x+a\hat{\mu}},$$

живут в узлах решётки, а калибровочные поля - на рёбрах U ,
 $\Omega \in SU(N)$.

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int DU \mathcal{O}[U] e^{-S_E[U]}$$

$$Z = \int DU e^{-S_E[U]}$$

$$\frac{1}{Z} \int DU U_P(\vec{x}) U_P(0) e^{-S_E[U]} \simeq C e^{-M|\vec{x}|} \quad \text{при } |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

M - масса 0^{++} глюбола. $M|\vec{x}| = Ma \frac{|\vec{x}|}{a}$;

Приравнивая M “экспериментальному” значению, получаем $a(g)$.

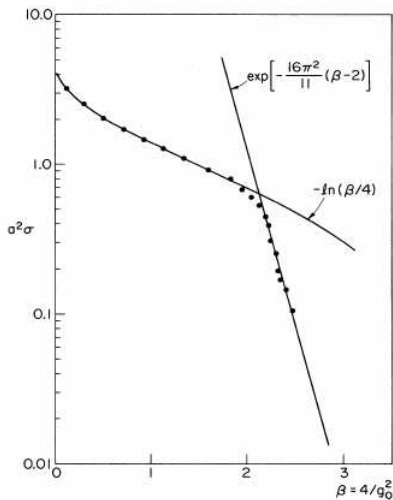
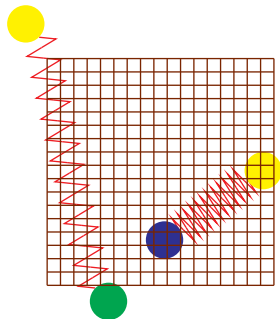
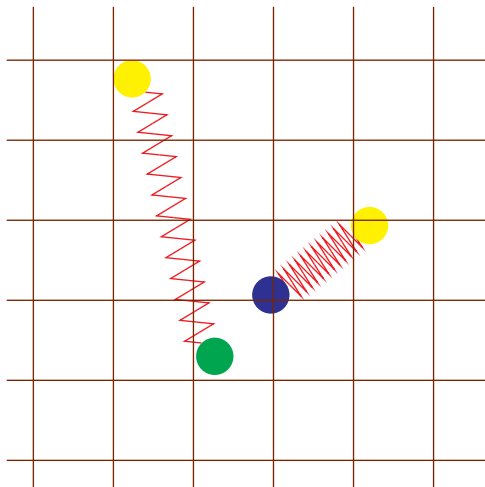


FIG. 34. SU(2) string tension Monte Carlo data vs coupling, $\beta = 4/g_0^2$.

континуальный
предел $a \rightarrow 0$



Режим слабой связи



Сильная связь (ТД предел, $b \rightarrow \infty$)

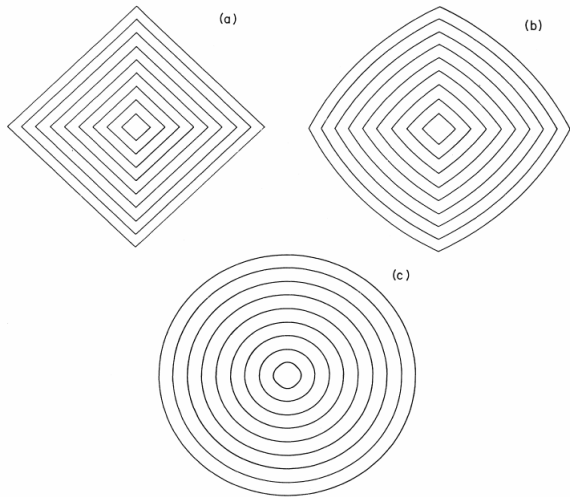


FIG. 47. The equipotentials at (a) $g = \infty$, (b) $g = 1.19$, and (c) $g = 1.00$.

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{-F_q(\vec{X})}{T}\right) &= \frac{1}{N_c^2} \sum_n \langle n | \exp\left(\frac{-\hat{H}}{T}\right) | n \rangle & (10) \\
&= \frac{1}{N_c^2} \sum_{n'} \langle n' | \psi(\vec{x}, 0) \exp\left(\frac{-\hat{H}}{T}\right) \psi^\dagger(\vec{x}, 0) | n \rangle \\
&= \frac{1}{N_c^2} \sum_{n'} \exp\left(\frac{-E_{n'}}{T}\right) \langle n' | \psi(\vec{x}, 1/T) \psi^\dagger(\vec{x}, 0) | n \rangle \\
&= \frac{1}{N_c^2} \sum_{n'} \exp\left(\frac{-E_{n'}}{T}\right) \langle n' | \mathcal{L}(\vec{x}) \psi(\vec{x}, 0) \psi^\dagger(\vec{x}, 0) | n \rangle
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = P \exp\left(iga \int_{(\vec{x},0)}^{(\vec{x},1/T)} A_0^c(\vec{x}, \tau) \Gamma^c d\tau\right)$$

Поляковская петля:

$$\mathcal{L}(\vec{X}) = P \exp \left(i g a \int_{(\vec{x},0)}^{(\vec{x},1/T)} A_0^c(\vec{X}, \tau) \Gamma^c d\tau \right)$$

$$\langle \mathcal{L}(\vec{X}) \rangle = \frac{\int_T DA \exp(-S_E(A)) \mathcal{L}(\vec{X})}{\int_T DA \exp(-S_E(A))}$$

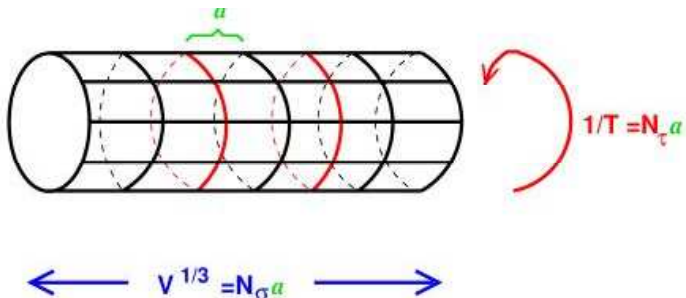
$$L = \frac{1}{VN_c} \text{Tr} \int d\vec{X} \langle \mathcal{L}(\vec{X}) \rangle$$

Свободная энергия одного **кварка**:

$$\exp \left(- \frac{F_q(V, T)}{T} \right) = L$$

- $q - \bar{q}$ взаимодействие:

$$\begin{aligned} \exp(-\beta F_{\bar{q}q}(r; V, T)) &= \langle \mathcal{L}(\vec{x}) \mathcal{L}^\dagger(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = \frac{Z(V, T; r)}{Z(V, T)} \\ &= \frac{1}{Z(V, T)} \int_{\mathcal{T}} DA \exp(-S_E(A)) \mathcal{L}(\vec{x}) \mathcal{L}^\dagger(\vec{x} + \vec{r}) \end{aligned}$$



Предполагая кластерное разложение,
получаем, что при $|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{N_c^2} \langle \mathcal{L}(\vec{x}) \mathcal{L}^\dagger(\vec{y}) \rangle \rightarrow |L|^2.$$

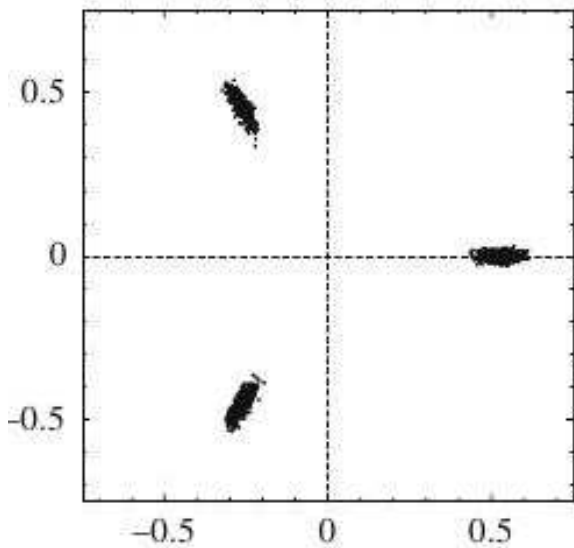
В чисто калибровочной теории ($m_q \rightarrow \infty$)

$|L| = 0 \implies$ конфайнмент

$L \neq 0 \implies$ деконфайнмент

$$\exp(-\beta F_{q\bar{q}}) = \frac{\langle \mathcal{L}(\vec{n}) \mathcal{L}^\dagger(\vec{m}) \rangle}{N_c^2 |L|^2}$$

даёт $q\bar{q}$ потенциал в фазе деконфайнмента

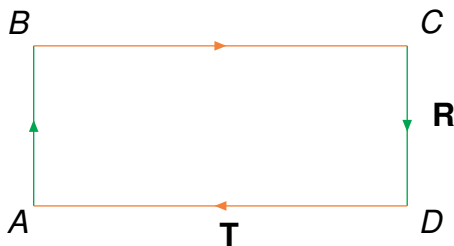


Вильсоновский критерий конфайнмента

$$\Omega(T, R) = \langle 0 | (\bar{q}(A)W(A, B)q(B))^\dagger \bar{q}(D)W(D, C)q(C) | 0 \rangle$$

где

$$W(\vec{x}, \vec{y}) = P \exp\left(ig \int_{\vec{x}}^{\vec{y}} A_\mu^c(z) T^c dz^\mu\right)$$



$$\bar{q}(D)W(D, C)q(C) = \exp(-TH)\bar{q}(A)W(A, B)q(B)\exp(TH)$$

$$\Omega(T, R) = \sum_n |\langle 0 | (\bar{q}(A)W(B, A)q(B))^\dagger | n \rangle|^2 \exp(-E_n T), \quad (11)$$

где $E_n = E(R)$ - энергия покоя кварк-антикварковой пары, обусловленная потенциальной энергией их взаимодействия.

$$W(C) = P \exp(ig \int_C A_\mu^a(x) T^a dx^\mu) \sim e^{-T(E(R)-2m)} \quad (12)$$

при $T \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow \infty$ - наиболее популярный критерий конфайнмента.

В пределе сильной связи вильсоновская петля вычисляется аналитически

$$\begin{aligned} W(C) &= \frac{1}{Z} \int \prod_l DU_l W(C) \exp\left(\frac{-1}{2g^2} \sum_p \text{Tr } U_p\right) \\ &\simeq \left(\frac{1}{g^2}\right)^{N_p} = \exp\left(-\frac{TR \ln(g^2/N_c)}{a^2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

В настоящее время систематические погрешности решёточных вычислений связаны с ненулевой величиной шага решётки, эффектами конечного объёма и необходимостью экстраполяции к физической массе лёгких фермионов. Эти погрешности, как и статистические, являются контролируруемыми, то есть их величина может быть оценена и, в принципе, уменьшена до нужного значения.

Фиксация калибровки

$$S = \frac{4}{g^2} \sum_{P=x,\mu,\nu} \left(1 - \frac{1}{2} \text{Tr} U_P \right)$$

$$U_P = U_{x,\mu} U_{x+\hat{\mu},\nu} U_{x+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{x,\nu}^\dagger$$

$$U_{x,\mu} = u_0 + i \sum_{a=1}^3 u_a \sigma_a, \quad (14)$$

$$A_\mu^a = - \frac{2Z u_\mu^a}{ga}, \quad (15)$$

$$\Omega : U_{x,\mu} \rightarrow \Omega_x^\dagger U_{x,\mu} \Omega_{x+\hat{\mu}},$$

Мы фиксируем **абсолютную** калибровку Ландау путём нахождения **глобального** максимума функционала

$$\mathcal{F}[U] = \frac{1}{2} \sum_{x,\mu} \text{Tr} U_{x,\mu}, \quad (16)$$

Условие стационарности:

$$\partial_\nu A_\nu^a = 0.$$

Используется алгоритм имитации отжига с последующей **переделкой**

Поля зависящие от "температурной" координаты $x_4 = \tau$

$$\hat{\chi}(\tau) = \exp(\tau H) \hat{\chi}(0) \exp(-\tau H)$$

и их функции Грина

$$D(\tau', \tau'') = \langle\langle T \hat{\chi}(\tau'') \hat{\chi}(\tau') \rangle\rangle \quad (0 < \tau', \tau'' < 1/T),$$

where

$$\langle\langle \hat{A} \rangle\rangle = \int dx' dx'' \varrho(x'', x') A(x', x').$$

Thus

$$D(\tau', \tau'') = \int_{x(0)=x(1/T)} Dx \chi(\tau') \chi(\tau'') \exp(-S_E[X])$$

Эти величины интересны в контексте **теории линейного отклика**

$H = H_0 + H_1(t)$, где $H_1(t)$ - внешнее возмущающее воздействие на систему.

Динамика описывается уравнениями

$$\dot{A} = i[H, A], \quad \dot{\varrho} = -i[H, \varrho]$$

Будем искать матрицу плотности

$$\varrho = e^{-itH_0} \tilde{\varrho} e^{itH_0}, \quad \frac{d\tilde{\varrho}}{dt} = -i[\tilde{H}_1, \tilde{\varrho}], \quad \varrho_0 = \exp\left(-\frac{H}{T}\right)$$

$$\tilde{\varrho}(t) = \varrho_0 - i \int_{-\infty}^t [\tilde{H}_1(t'), \varrho_0] - \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' [\tilde{H}_1(t'), [\tilde{H}_1(t''), \varrho_0]] + \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Tr } \rho \mathbf{A} &= \text{Tr} \left(e^{-\imath H_0 t} \tilde{\rho} e^{\imath H_0 t} \mathbf{A} \right) \\ &= \text{Tr } \rho \mathbf{A} - \imath \int_{-\infty}^t dt' \text{Tr} \left(\rho_0 [\tilde{\mathbf{A}}(t), \tilde{H}_1(t')] \right) + \underline{Q}(H_1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$H_1 = j(t) \hat{F}$$

$$\delta \text{Tr } \rho \mathbf{A} = -\imath \int_{-\infty}^t dt' G_{FA}^R(t-t') j(t') dt'$$

$$G_{FA}^R(t-t') = \theta(t-t') \text{Tr } \rho_0 [\tilde{\mathbf{A}}(t), \tilde{F}(t')]$$

Запаздывающая функция Грина G_{FA}^R -
восприимчивость наблюдаемой \mathbf{A} к воздействию F .

$$\begin{array}{lll} \tilde{H}_1 = e^{\imath t H_0} H_1 e^{-\imath t H_0} & H_1 = j(t) \hat{x} & H_1 = j \hat{\phi}(\vec{x}) \\ \tilde{\mathbf{A}} = e^{\imath t H_0} \mathbf{A} e^{-\imath t H_0} & \mathbf{A} = \hat{x} & \mathbf{A} = \hat{\phi}(\vec{x}) \end{array} \quad (18)$$

Среднее смещение под действием возмущающей силы

$$\langle\langle \delta x(t) \rangle\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G_R(t-t') j(t') + \underline{O}(j^2)$$

где

$$G_R(t-t') = i \sum_n e^{-E_n/T} \theta(t-t') \langle n | [\hat{x}(t'), \hat{x}(t)] | n \rangle .$$

Запаздывающая функция Грина связана с аналитическим продолжением фурье-компонент температурной функции Грина формулой

$$\tilde{G}_R(\omega) = -\tilde{D}(i\omega - \epsilon) , \quad \mathcal{D}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) = \tilde{D}_n$$

где

$$\tilde{D}_n = \int_0^{1/T} d\tau \exp\left(-\frac{2i\pi\tau n}{T}\right) \langle\langle \hat{x}(\tau) \hat{x}(0) \rangle\rangle$$

Пропагаторы в калибровочной теории при $T \neq 0$

Вычисляем “глюонный” пропагатор в $SU(2)$ теории

$$D_{\mu\nu}^{bc}(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{Z} \int_{A_\mu(0, \vec{x}) = A_\mu(\beta, \vec{x})} DA_\mu^a(x) A_\nu^b(\tau, \vec{x}) A_\mu^c(0, 0) e^{-S_E[A]} |\det M_{FP}(A)| \quad (19)$$

$$S_E[A] = \int_0^\beta d\tau \int_V d^3\vec{x} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A_\mu^a)^2 \right) \quad (20)$$

$$D_{\mu\nu}^{bc}(\tau, \vec{x}) = \delta^{bc} D_{\mu\nu}(\tau, \vec{x})$$

$$(D(p))^{-1}_{\mu\nu} = (D^0(p))^{-1}_{\mu\nu}(p) + \Pi_{\mu\nu}(p)$$

$$p_\mu \Pi_{\mu\nu}(p) = 0 \quad (21)$$

$$p_\mu p_\nu D_{\mu\nu}(p) = \alpha$$

$$P_{\mu\nu}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|\vec{p}|^2} \end{pmatrix} \quad P_{\mu\nu}^L = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} |\vec{p}|^2 & p_4 \vec{p} \\ p_4 \vec{p} & \frac{p_4^2}{|\vec{p}|^2} p_i p_j \end{pmatrix}$$

$$P_{\mu\nu}^{L,T} P_{\nu\lambda}^{L,T} = P_{\mu\lambda}^{L,T}, \quad P_{\mu\nu}^L P_{\nu\lambda}^T = 0$$

$$p_\mu P_{\mu\nu}^L = p_\mu P_{\mu\nu}^T = 0, \quad P_{\mu\mu}^L = 1, \quad P_{\mu\mu}^T = 2$$

$$D_{\mu\nu}(p) = D_L(p)P_{\mu\nu}^L + D_T(p)P_{\mu\nu}^T + \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{p^4}$$

$$D_L(p) = \frac{1}{p^2 + F(p)}, \quad D_T(p) = \frac{1}{p^2 + G(p)}$$

$$\Pi_{\mu\nu} = F(p)P_{\mu\nu}^L + G(p)P_{\mu\nu}^T$$

Исследуемые величины:

$$D_{ii}(|\vec{p}|^2) = 2D_T(0, \vec{p}), \quad D_{44}(|\vec{p}|^2) = D_L(0, \vec{p}),$$

Мы рассматриваем калибровку Ландау ($\alpha = 0$)

Массы экранирования в КЭД

Рассмотрим два заряда в электрон-позитронной плазме:

$$\vec{E}_1^{cl} = -i \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|^2} Q_1 e^{-i\vec{p}\vec{x}_1}$$

$$\vec{E}_2^{cl} = -i \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|^2} Q_2 e^{-i\vec{p}\vec{x}_2}$$

В теории линейного отклика поле каждого из них может быть рассмотрено как малое возмущение.

$$H_1 = \int d\vec{x} \vec{E}^{cl}(\vec{x}) \vec{E}(\vec{x}),$$

результатирующее поле имеет вид

$$E_i^{tot}(\vec{p}) = E_i^{cl} + \langle\langle \delta E_i \rangle\rangle = \frac{p_i p_j E_j^{cl}(\vec{p})}{|\vec{p}|^2 + F(0, \vec{p})}.$$

Потенциальную энергию их взаимодействия можно представить в виде

$$\begin{aligned} V &\simeq \frac{1}{2} \int d\vec{x} \left(\langle\langle \vec{E}_1^{tot} \rangle\rangle \vec{E}_2^{cl} + \langle\langle \vec{E}_2^{tot} \rangle\rangle \vec{E}_1^{cl} \right) \\ &= Q_1 Q_2 \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}}{|\vec{k}|^2 + F(0, \vec{k})} \\ &\simeq \frac{Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{e^{-m_e |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|}}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|} \end{aligned}$$

$$m_e = \frac{eT}{\sqrt{3}}$$

Массы экранирования в $SU(N_c)$ теориях в однопетлевом приближении

Фейнмановская калибровка:

$$F(0, \vec{p} \rightarrow 0) = \frac{1}{3}g^2 T^2 N_c - \frac{1}{4}g^2 T N_c |\vec{p}|$$

$$G(0, \vec{p} \rightarrow 0) = -\frac{3}{16}g^2 T N_c |\vec{p}|$$

Статическая аксиальная калибровка ($A_0 = 0$ с обходом полюсов в смысле главного значения):

$$F(0, \vec{p} \rightarrow 0) = \frac{1}{3}g^2 T^2 N_c - \frac{1}{4}g^2 T N_c |\vec{p}| - \frac{11g^2}{48\pi^2} N_c |\vec{p}|^2 \ln \left(\frac{|\vec{p}|^2}{T^2} \right)$$

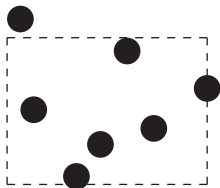
$$G(0, \vec{p} \rightarrow 0) = -\frac{5}{16}g^2 T N_c |\vec{p}|$$

Химический потенциал

$$\mu = -T \left(\frac{\partial S}{\partial N} \right)_{E,V} = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S,V}$$

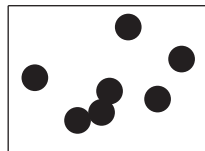
$$dE = TdS - pdV + \mu dN$$

$$\Phi = E - TS + PV = \mu(p, T)N.$$



$\Omega(V, T, \mu)$

$E(V, S, N)$



Химический потенциал

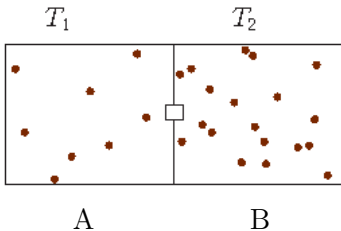
$$\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, V}$$

Для идеального газа:

$$\mu = T \ln \left[\frac{P}{T^{5/2}} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m} \right)^{3/2} \right] = T \ln \left[\frac{N}{V} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT} \right)^{3/2} \right]$$

$$N_0 \simeq \left(\frac{pL}{2\pi\hbar} \right)^3 = \left(\frac{\sqrt{mT}}{2\pi\hbar} \right)^3 V \quad \Rightarrow \quad \mu = T \ln \left[\frac{N}{N_0} \right]$$

N_0 - число “клеток” в фазовом пространстве



Между сосудами с идеальным газом пористая перегородка, через которую газ может квазистатически просачиваться. Найти отношение давлений при равновесии, если отношение температур известно.

Условие равновесия: плотность заполнения фазового пространства одинакова,

$$\left(\frac{N}{N_0}\right)_A = \left(\frac{N}{N_0}\right)_B$$

$$\frac{\mu}{T} = \ln \left[\frac{N}{N_0} \right]$$

$$\frac{\mu_1}{T_1} = \frac{\mu_2}{T_2}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{5/2}$$

$$Z_{GC} = \text{Tr} \exp \left(- \frac{\hat{H} - \mu \hat{N}}{T} \right), \quad \langle N \rangle = T \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$$

$$[\hat{N}, \hat{H}] = 0, \quad \hat{N} = \sum_{f,c} \int d\vec{x} \psi_{fc}^\dagger \psi_{fc}, \quad \mu_B = 3\mu_q$$

$$\Omega(V, T, \mu) = - T \ln (Z_{GC})$$

Большой ТД потенциал газа свободных фермионов

$$T \ln (Z_{GC}) = \frac{N_s N_c N_f V}{12} \left(\frac{7\pi^2}{30} T^4 + T^2 \mu^2 + \frac{1}{2\pi^2} \mu^4 \right)$$

Зависимость среднего барионного числа от кваркового химпотнециала:

$$n_B = \frac{N_F N_C}{9} \left(\mu_q T^2 + \frac{\mu_q^3}{\pi^2} \right)$$