

Влияние плотной кварковой материи
на глюонный пропагатор в КХ₂Д. Часть 2.
Плотная кварковая материя в решёточной КХД

Р. Н. Роголёв

НИЦ “Курчатовский Институт” - ИФВЭ

11.05.2021

Содержание

- 1 Фермионы на решётке
- 2 Фермионы Когута-Зюскинда
- 3 Аналитические свойства статсуммы газа свободных фермионов
- 4 Аналитическое продолжение барионной плотности по кварковому химпотенциалу

По материалам электронного препринта [2103.07442](#)

“Quark Density in Lattice QCD
at Imaginary and Real Chemical Potential”

A.Begun, V.Borniyakov, N.Gerasimeniuk, V.Goy, A.Nakamura,
R.Rogalyov, V.Vovchenko

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hat{\partial} - m)\psi,$$

где

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d^3p}{2\omega(p)} \left(u(p)b(p)e^{-ipx} + v(p)d^\dagger(p)e^{ipx} \right),$$

$$u(p) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\omega - p} \\ \sqrt{\omega + p} \end{pmatrix}, \quad v(p) = \begin{pmatrix} i\sqrt{\omega - p} \\ \sqrt{\omega + p} \end{pmatrix}.$$

$$\omega = \sqrt{p^2 + m^2}, \quad \gamma^0 = \sigma_2, \quad \gamma_1 = i\sigma_1, \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3,$$

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \bar{\psi}(i\gamma^1\partial^1 + m)\psi \\ &= \int d^3p \omega(p) \left(b^\dagger(p)b(p) + d^\dagger(p)d(p) \right)\end{aligned}$$

$$\hat{Q} = \int d^3p \left(b^\dagger(p)b(p) - d^\dagger(p)d(p) \right)$$

$$\{b^\dagger(p)b(q)\} = \delta(p - q), \quad \{d^\dagger(p)d(q)\} = \delta(p - q) .$$

$$[\hat{H}, \hat{Q}] = 0$$

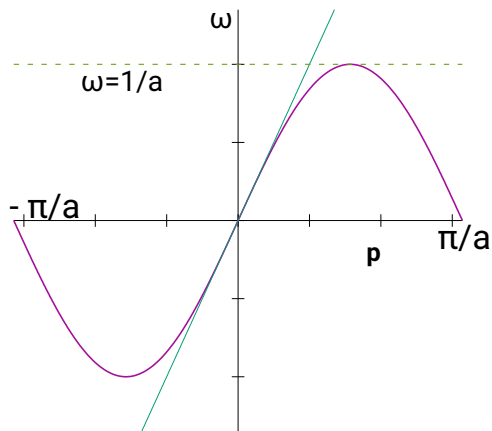
$$Z_{GC} = \text{Tr} \exp \left(- \frac{\hat{H} - \mu \hat{Q}}{T} \right)$$

$$\hat{H} = \int dx^1 \bar{\psi}(\gamma^1 \partial^1 + m)\psi$$

$$\rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} a \left(i\bar{\psi}_n \gamma^1 \left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} \right) + m\bar{\psi}_n \psi_n \right)$$

где $x = na$, $n \in \mathbb{Z}$. Однако, гамильтониан, регуляризованный таким образом, неэрмитов. Эрмитов гамильтониан на решётке можно получить так:

$$\rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} a \left(i\bar{\psi}_n \gamma^1 \left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_{n-1}}{2a} \right) + m\bar{\psi}_n \psi_n \right)$$



Зависимость частоты ω
от импульса p
для безмассовых
свободных фермионов
на одномерной решётке
при условии $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$
(фиолетовая линия)
и в континууме
(цвета морской волны)

Выражение матрицы плотности (и статсуммы) через функциональный интеграл для фермионов

$$\begin{aligned} Z(V, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Tr} \left[\hat{P} \exp \left(- \frac{\hat{H}}{NT} \right) \right]^N \\ &= \int D\bar{\psi}_x \psi_x \exp \left[- S_F(\bar{\psi}, \psi, U) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

$$S_F = \sum_{x,y;\alpha,\beta} \bar{\psi}_{x;\alpha} K_{x,y}^{\alpha\beta} \psi_{y,\beta}$$

$$K_{x,y}^{\alpha\beta} = \sum_{\mu} \frac{1}{2} \gamma_{\alpha,\beta}^{\mu} [\delta_{x,y+a\hat{\mu}} - \delta_{x,y-a\hat{\mu}}] + M \delta_{x,y} \delta_{\alpha,\beta}$$

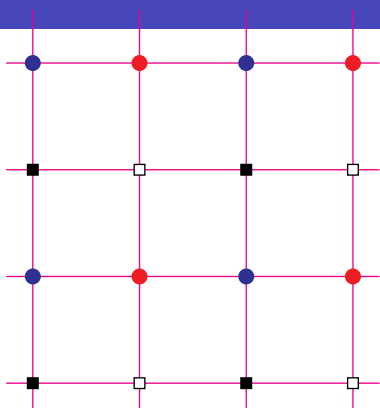
$$S_F = \sum_x \left\{ \bar{\psi}_x \psi_x + \kappa \sum_{\mu} \left[\bar{\psi}_x (1 + \gamma^{\mu}) U_{x;\mu} \psi_{x+a\hat{\mu}} + \bar{\psi}_{x+a\hat{\mu}} (1 - \gamma^{\mu}) U_{x;\mu}^{\dagger} \psi_x \right] \right\} \quad (2)$$

Staggered fermions

Staggered fermions are described by odd variables

- **odd** - странный, нечётный, необычный, лишний, случайный, чудной, непарный, эксцентричный, разрозненный, добавочный, свободный
- **stagger** - шататься, колебаться, располагаться в шахматном порядке, покачиваться, заплетаться, быть в нерешительности

$$S_F^{stag} = \sum_{f=1}^{2^{D/2}} \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^D} \left\{ M \bar{\psi}_{\vec{n}}^f \psi_{\vec{n}}^f + \sum_{\mu} \left[\bar{\psi}_{\vec{n}}^f \gamma^{\mu} \psi_{\vec{n}+\hat{\mu}}^f - \bar{\psi}_{\vec{n}}^f \gamma^{\mu} \psi_{\vec{n}-\hat{\mu}}^f \right] \right\}$$



$$\psi(\vec{n}) = T(\vec{n})\chi(\vec{n})$$

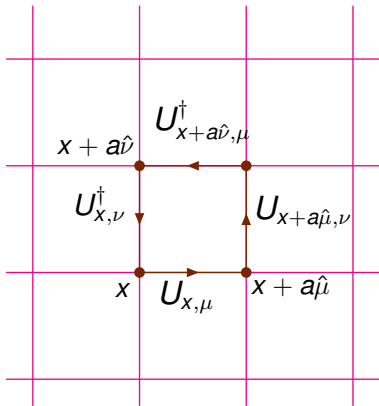
$$\bar{\psi}(\vec{n}) = \bar{\chi}(\vec{n})T^\dagger(\vec{n})$$

$$T^\dagger(\vec{n})\gamma_\mu T(\vec{n} + \hat{\mu}) = \eta_\mu(\vec{n})\mathbb{I}$$

$$T(\vec{n}) = \gamma_1^{n_1} \dots \gamma_D^{n_D}$$

$$\eta_\mu = (-1)^{n_1 + \dots + n_{\mu-1}}, \quad \eta_\mu(\vec{n}) = 1.$$

$$S_F^{stag} = \left\{ M\bar{\chi}\vec{n}\chi\vec{n} + \sum_{\mu} \eta_\mu(\vec{n}) \left[\bar{\chi}\vec{n}\chi\vec{n} + \hat{\mu} - \bar{\chi}\vec{n}\chi\vec{n} - \hat{\mu} \right] \right\}$$



$$S = \frac{2N}{g^2} \sum_{P=X,\mu,\nu} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } U_P \right)$$

$$U_P = U_{X,\mu} U_{X+\hat{\mu},\nu} U_{X+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{X,\nu}^\dagger$$

$$U_{X,\mu} = \exp \left(\frac{igaA_\mu}{2} \right),$$

Калибровочные преобразования

$$\Omega : U_{X,\mu} \rightarrow \Omega_X^\dagger U_{X,\mu} \Omega_{X+a\hat{\mu}},$$

живут в узлах решётки, а калибровочные поля - на рёбрах U ,
 $\Omega \in SU(N)$.

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z} \int DU \mathcal{O}[U] e^{-S_E[U]}$$

$$Z = \int DU e^{-S_E[U]}$$

$$\frac{1}{Z} \int DU U_P(\vec{x}) U_P(0) e^{-S_E[U]} \simeq C e^{-M|\vec{x}|} \quad \text{при } |\vec{x}| \rightarrow \infty$$

M - масса 0^{++} глобола. $M|\vec{x}| = Ma \frac{|\vec{x}|}{a}$;

Приравнивая M “экспериментальному” значению, получаем $a(g)$.

Для свободных безмассовых фермионов в $D = 3 + 1$ измерениях, локализованных в кубе со стороной длины L (периодич. граничные условия):

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p}=2\pi\vec{n}/L, \vec{n}\in Z} |\mathbf{p}| \left(\hat{\mathbf{b}}^\dagger(\mathbf{p})\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{p}) + \hat{\mathbf{d}}^\dagger(\mathbf{p})\hat{\mathbf{d}}(\mathbf{p}) \right)$$

$$Z = \text{Tr} \exp \left(- \frac{\hat{H} - \mu\hat{Q}}{T} \right)$$

$$\text{Tr} \exp \left(\lambda \hat{\mathbf{b}}^\dagger \hat{\mathbf{b}} \right) = 1 + e^\lambda$$

$$\ln Z = \sum_{\vec{p}} \ln \left[1 + \exp \left(\frac{\mu - |\mathbf{p}|}{T} \right) \right] + (\mu \rightarrow -\mu)$$

Большая каноническая статсумма

$$Z_{GC}(\theta, T, V) = \sum_j \langle j | \exp \left(\frac{-\hat{H} + \mu \hat{N}}{T} \right) | j \rangle \quad (3)$$

может быть разложена в ряд Лорана по фугитивности $\xi = e^\theta$ ($\theta = \mu/T = \theta_R + i\theta_I$):

$$Z_{GC}(\theta, T, V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n, T, V) \xi^n, \quad (4)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$Z_C(n, T, V) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_I}{2\pi} e^{-in\theta_I} Z_{GC}(\theta, T, V) \Big|_{\theta_R=0}. \quad (5)$$

$$Z_{GC} = \text{Tr} \exp \left(- \frac{\hat{H} - \mu \hat{N}}{T} \right), \quad \langle N \rangle = T \frac{\partial \Omega}{\partial \mu}$$

$$[\hat{N}, \hat{H}] = 0, \quad \hat{N} = \sum_{f,c} \int d\vec{x} \psi_{fc}^\dagger \psi_{fc}, \quad \mu_B = 3\mu_q$$

$$\Omega(V, T, \mu) = - T \ln (Z_{GC})$$

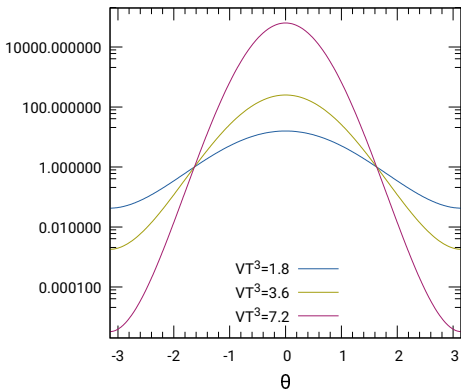
Большой ТД потенциал газа свободных фермионов

$$T \ln (Z_{GC}) = \frac{N_s N_c N_f V}{12} \left(\frac{7\pi^2}{30} T^4 + T^2 \mu^2 + \frac{1}{2\pi^2} \mu^4 \right)$$

Зависимость среднего барионного числа от кваркового химпотенциала:

$$N_B = \frac{N_F V T^3}{3} \left(\theta + \frac{\theta^3}{\pi^2} \right)$$

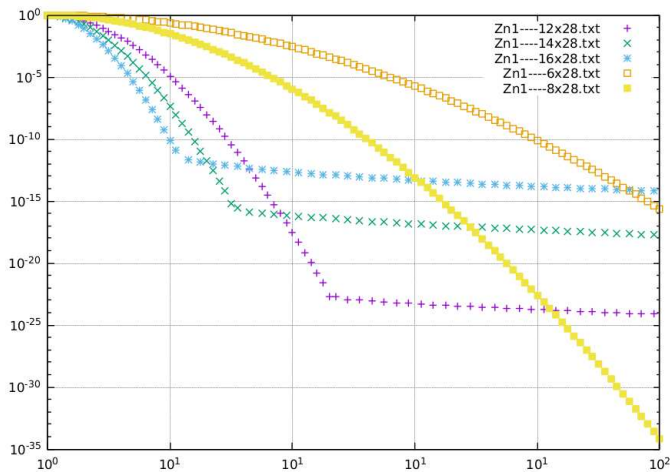
$$Z_{GC}(\theta = i\theta_I) = A \exp \left[c \left(-(\theta_I)^2 + \frac{(\theta_I)^4}{2\pi^2} \right) \right] \quad \text{если} \quad -\pi < \theta_I \leq \pi$$

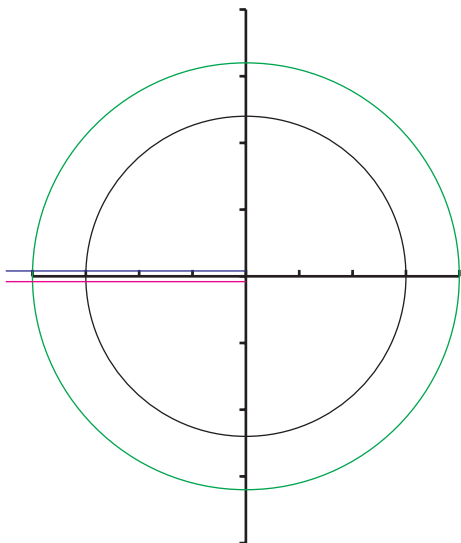
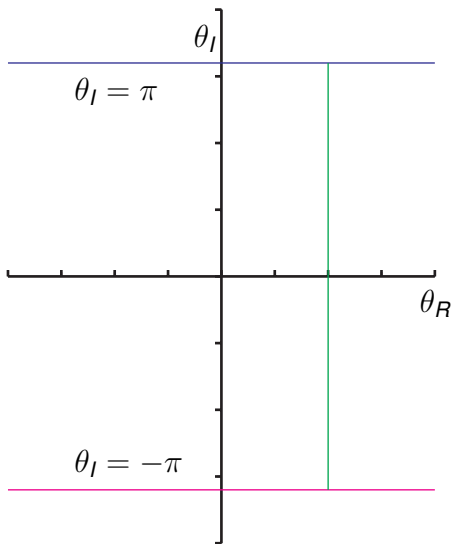


За пределы отрезка $[-\pi, \pi]$
 $Z_{GC}(\theta)$ продолжается
 по периодичности;
 разрывы в третьей
 производной \implies

$$Z_C(n, T, V) \simeq \frac{C}{n^4}$$

при $n \rightarrow \infty$





$$Z_{GC}(\theta) = \int \mathcal{D}U e^{-S_G} (\det \Delta(\mu_q))^{N_f}$$

$$\begin{aligned} B(\theta) &= \frac{1}{N_c} \frac{\partial \ln Z_{GC}}{\partial \theta} \\ &= \frac{N_f}{N_c Z_{GC}} \int \mathcal{D}U e^{-S_G} (\det \Delta(\mu_q))^{N_f} \text{tr} \left[\Delta^{-1} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} \right], \end{aligned}$$

Проблема знака

$$\mathcal{D}(\mu_q) = v\gamma^\mu D_\mu + (\mu_q\gamma^0 + m)I$$

I - ед. м-ца по цвету, при этом

$$\{\det \mathcal{D}(\mu_q)\}^* = \det\{\mathcal{D}(-\mu_q^*)\}$$

и при вещественных μ_q определитель комплексный. Однако, для $SU_C(2)$ имеют место равенства

$$\{\det \mathcal{D}(\mu_q)\}^* = \{\det(\tau_2 \mathbf{C}\gamma^5)\mathcal{D}(\mu_q)(\tau_2 \mathbf{C}\gamma^5)^{-1}\}^* = \det\{\mathcal{D}(\mu_q^*)\}$$

что даёт вещественность определителя.

Гипотеза Роберге-Вайсса:

Пространство состояний содержит только бесцветные состояния при всех значениях температуры и химпотенциала.

$$\theta_B = N_c \theta_q = N_c \theta; \quad \boxed{B \in \mathbb{Z}}$$

$$Z_{GC}(\theta_l) = Z_{GC}(\theta_l + 2\pi/N_c)$$

$$Z_C(n, T, V) = \int_0^{2\pi/N_c} \frac{d\theta_l}{2\pi} e^{-in\theta_l} Z_{GC}(\theta_l, T, V),$$

$$\xi = e^{\theta N_c}$$

Каноническое разложение (разложение по фугитивности)

$$Z_{GC}(\theta, T, V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n, T, V) \xi^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n e^{n\theta},$$

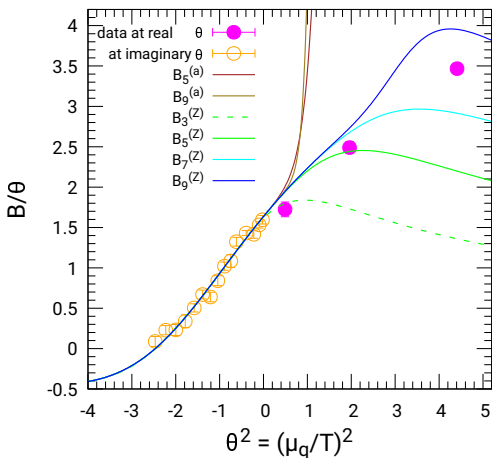
Число барионов в объёме решётки:

$$B = \frac{-1}{N_c} \frac{\partial (T \ln Z)}{\partial \mu_q} = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} n Z_n \sinh(n N_c \theta_l)}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \cosh(n N_c \theta_l)}$$

$$B(\theta_l) \Big|_{\theta_R=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nN_c \theta_l)$$

$$B(\theta) \Big|_{\theta_l=0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh(nN_c \theta_R)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nN_c \theta_l) = \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} n Z_n \sin(nN_c \theta_l)}{1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} Z_n \cos(nN_c \theta_l)}$$



$T = 227 \text{ MeV}$

$$B = \frac{2 \sum_{n=1}^J n Z_n \sin(n N_c \theta_l)}{1 + 2 \sum_{n=1}^J Z_n \cos(n N_c \theta_l)}$$

Модель кластерного разложения

$$B(\theta_l) \Big|_{\theta_R=0} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kN_c \theta_l)$$

$$b_k = (-1)^{k+1} \frac{b q^{k-1}}{k} \left[1 + \frac{6}{\pi^2(N_c^2 - 1)k^2} \right]$$

$$B = \frac{b}{2q} \left\{ \ln \frac{1 + q \exp(\theta N_c)}{1 + q \exp(-\theta N_c)} + \right. \\ \left. + \frac{6}{\pi^2(N_c^2 - 1)} \left[\text{Li}_3(-q e^{-\theta N_c}) - \text{Li}_3(-q e^{\theta N_c}) \right] \right\} .$$

