О массивных полях высших спинов в $d = 3$

М. В. Хабаров, Ю. М. Зиновьев

JHEP 04 (2022) 055

Частица = неприводимое представление группы Пуанкаре

- Группа Пуанкаре (P^a, M^{ab}) при $d = 3, 4$ имеет два оператора Казимира

$$P^2, \qquad W^2, \qquad W^a = \varepsilon^{abcd} P_b M_{cd}$$

которые и определяют неприводимое представление

$$P^2 \phi = m^2 \phi, \qquad W^2 \phi = m^2 s(s+1)\phi$$

- Пример: полностью симметричный тензор $\phi^{\mu(s)}$:

$$(\partial^2 - m^2)\phi^{\mu(s)} = 0, \qquad \partial_\mu \phi^{\mu\nu(s-1)} = 0, \qquad g_{\mu(2)} \phi^{\mu(2)\nu(s-2)} = 0$$

- Уравнения = динамические уравнения + связи
Проблема самосогласованности

Спин 2

- Лагранжиан Фирца-Паули для $h^{(\mu\nu)}$

$$\mathcal{L} \sim \partial h \partial h + m^2 h^2$$

- Векторная связь

$$\partial^\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^{\mu\nu}} \sim m^2 (\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h) \approx 0$$

- Скалярная связь

$$(\partial^\mu \partial^\nu - \frac{m^2}{2} g^{\mu\nu}) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h^{\mu\nu}} \sim m^4 h \approx 0$$

Спин 3

- Минимальный набор полей: $\Phi^{(\mu\nu\alpha)}$, ϕ
- Первичная связь

$$\partial^\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^{\mu\nu\alpha}} \sim \partial^\mu \Phi_{\mu\nu\alpha} + O(\partial_\nu \Phi_\alpha, \partial_\nu \partial_\alpha \phi)$$

- Вторичная связь

$$(\partial^\mu \partial^\nu + \dots) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^{\mu\nu\alpha}} \sim \Phi_\alpha + O(\partial_\alpha \phi)$$

- Третичная связь

$$(\partial^\mu \partial^\nu \partial^\alpha + \dots) \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi^{\mu\nu\alpha}} \sim \phi$$

Произвольный спин

- Бозоны и фермионы с произвольным спином
  Singh, Hagen Phys. Rev. D9 (1974) 898, 910
- Минимальный набор бесследовых тензоров для массивного бозона спина s
  $$\phi^s, \phi^{s-2}, \phi^{s-3}, \dots, \phi$$
- Минимальный набор бесследовых спин-тензоров для массивного фермиона спина $s + 1/2$
  $$\psi^s, \psi^{s-1}, (\psi^{s-2}, \chi^{s-2}), \dots, (\psi, \chi)$$

Примеры

- Спин 1

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}{A_{\mu\nu}}^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - mA^\mu \partial_\mu \phi + \frac{m^2}{2}{A_\mu}^2$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \xi, \qquad \delta\phi = m\xi$$

- Спин 3/2

$$\mathcal{L} = i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\bar{\Psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\alpha \Psi_\beta + i\bar{\chi}\hat{\partial}\chi + m\bar{\Psi}_\mu \sigma^{\mu\nu}\Psi_\nu - im(\bar{\Psi}\gamma)\chi + 2m\bar{\chi}\chi$$

$$\delta\Psi_\mu = (\partial_\mu - \frac{im}{2}\gamma_\mu)\zeta, \qquad \delta\chi = m\zeta$$

- Спин 2

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(h_{\mu\nu}, A_\mu, \phi)$$

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_{(\mu}\xi_{\nu)} + \frac{m}{2}g_{\mu\nu}\xi, \qquad \delta A_\mu = \partial_\mu \xi + m\xi_\mu, \qquad \delta\phi = m\xi$$

Произвольный спин

- В $d = 4$ массивное поле содержит спиральности $\pm s, \pm(s-1), \ldots, \pm 1/2(0)$, а безмассовое — спиральности $\pm s$
- Наиболее общий калибровочно инвариантный лагранжиан для набора полей $\Phi^s, \Phi^{s-1}, \ldots \phi$ определяется двумя произвольными параметрами, в качестве одного из которых можно выбрать массу
- Требование эрмитовости накладывает ограничения на возможные значения этих параметров и позволяет воспроизвести ВСЕ унитарные неприводимые представления группы Пуанкаре
- После фиксации калибровки воспроизводятся результаты Singh, Hagen
- Формализм допускает деформацию в $(A)dS$, включая частично безмасссовые представления, отсутствующие у группы Пуанкаре

Массивные фермионы в $d = 3$

- Набор полей: $\Phi_\mu^{\alpha(2s-2)}$, $\Phi_\mu^{\alpha(2s-4)}$, $\ldots$, Φ_μ^α, ϕ^α и калибровочных параметров: $\zeta^{\alpha(2s-2)}$, $\zeta^{\alpha(2s-4)}$, $\ldots$, ζ^α
- Разложение на неприводимые компонеты

$$\Phi_\mu{}^{\alpha(2s-2)} = e_{\mu,\beta(2)}\phi_+^{\alpha(2s)} + e_{\mu}^{\alpha}{}_{\beta}\phi_0^{\alpha(2s-2)\beta} + e_\mu{}^{\alpha(2)}\phi_-^{\alpha(2s-2)}$$

$$1 \otimes (s-1) = s \oplus (s-1) \oplus (s-2)$$

- Получаем:

$$\begin{array}{cccccc}
\phi_+^{\alpha(2s)} & \phi_0^{\alpha(2s-2)} & \phi_-^{\alpha(2s-4)} & & & \\
 & \phi_+^{\alpha(2s-2)} & \phi_0^{\alpha(2s-4)} & \phi_-^{\alpha(2s-6)} & & \\
 & & \phi_+^{\alpha(2s-4)} & \phi_0^{\alpha(2s-6)} & \phi_-^{\alpha(2s-8)} & \\
 & & & \phi_+^{\alpha(2s-6)} & \phi_0^{\alpha(2s-8)} & \phi_-^{\alpha(2s-10)}
\end{array}$$

- После фиксации калибровки — все $\phi_+ = 0$ (кроме $\phi_+^{\alpha(2s)}$) из уравнений следует, что все вспомогательные поля $\phi_0 = 0$, $\phi_- = 0$
- Остается старшее поле $\phi_+^{\alpha(2s)}$ и уравнения

$$\frac{2}{2s+1} D^\alpha{}_\beta \phi_+^{\alpha(2s-1)\beta} - m\phi_+^{\alpha(2s)} = 0, \qquad D_{\beta(2)}\phi_+^{\alpha(2s-2)\beta(2)} = 0$$

- Число степеней свободы

$$N = \frac{(2s+1)-(2s-1)}{2} = 1$$

- Оператор Дирака — проектор

$$(D^2 - m^2)\phi^{\alpha(2s)} = 0 \quad \Rightarrow \quad D^\alpha{}_\beta \phi^{\alpha(2s-1)\beta} \pm m\phi^{\alpha(2s)} = 0$$

Спасибо за внимание