

Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные

С.ДВОРЯНИНОВ, В.СОЛОВЬЕВ

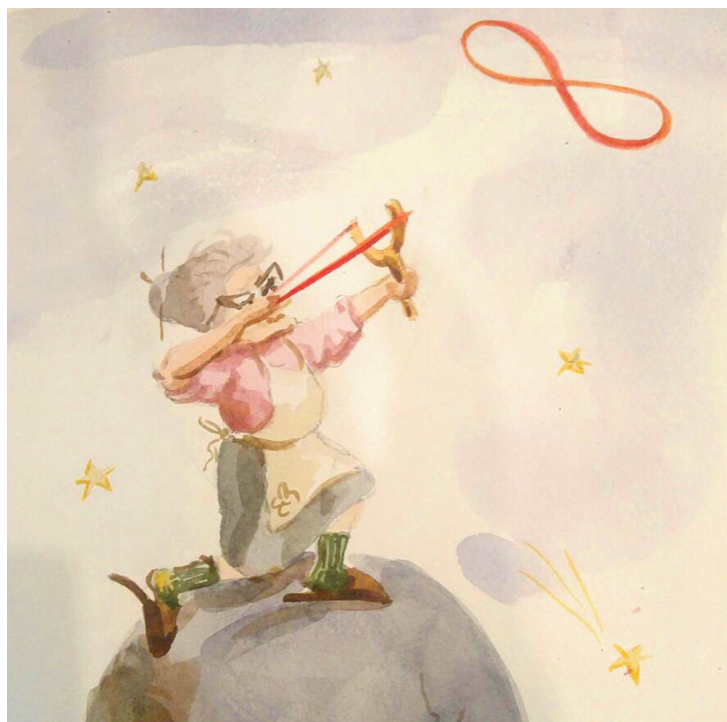
В 2015 ГОДУ ИСПОЛНИЛОСЬ 100 ЛЕТ общей теории относительности – ОТО, предложенная Альбертом Эйнштейном. Александр Александрович Фридман в 1922 году получил из десяти довольно сложных уравнений ОТО два уравнения, описывающие рождение, жизнь и смерть наблюдаемой Вселенной. Они стали фундаментом бурно развивающейся науки – космологии. Оказывается, что уравнения Фридмана можно получить не только в теории Эйнштейна, но и в привычной нам классической механике.

Модель первая: катание с гор

Представьте невысокую ледяную горку и хорошо скользящие санки (летом их можно заменить на скейт). Вы разгоняетесь, взлетаете на самую вершину горки, а потом по инерции скатываетесь с противоположного склона. Ваша скорость уменьшается при подъеме и увеличивается при спуске – об этом говорит нам и жизненный опыт, и формула закона сохранения механической энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U = E.$$

Здесь первое слагаемое в левой части это кинетическая энергия, второе – потенциальная, а в правой части – полная механическая энергия. Во многих школьных задачах считается, что полная механическая энергия сохраняется неизменной, причем точно. В жизни, конечно, это выполняется приблизительно – тем точнее, чем меньше трение. Если бы трения не было совсем, то санки никогда бы и не остановились. Потенциальную энергию тяготения обычно рассматривают как функцию высоты. Однако достаточно нарисовать сечение горки



вертикальной плоскостью, проходящей через траекторию саней, наложить на рисунок оси координат – и высота станет функцией от горизонтальной координаты x . Значит, подобрав соответствующий масштаб, мы получим график потенциальной энергии

$$U(x) = mgh(x).$$

И наоборот. Если дан график потенциальной энергии для некоторого тела, положение которого может быть задано одной координатой, то, не задумываясь о том, какой силе соответствует эта потенциальная энергия, мы можем отождествить движение тела с движением санок по реальным горам или ямам, имеющим изображенный на данном графике профиль. Далее, закон сохранения энергии позволит выразить кинетическую энергию одномерного движения как функцию координаты тела. Конечно, нужно также знать и полную энергию, которую можно найти по начальным данным: координате и скорости. Масса тела тоже должна быть известна. А по кинетической энергии можно определить скорость, правда с точностью до знака, так как направлений движения может быть два.

На рисунке 1 показаны три кривые, изображающие график потенциальной энергии, заданной функцией от координаты R :

$$U(R) = -\frac{a}{R} - \frac{bR^2}{2}$$

при трех разных значениях параметра b , причем рассматривается случай $a > 0$, $b > 0$. Горизонтальные линии иллюстрируют возможность положительной, нулевой и отрицательной полной энергии. Конечно, кататься с такой горы можно только в мыслях – с обеих сторон вы покатитесь в бездну. Однако ниже мы покажем, в каких

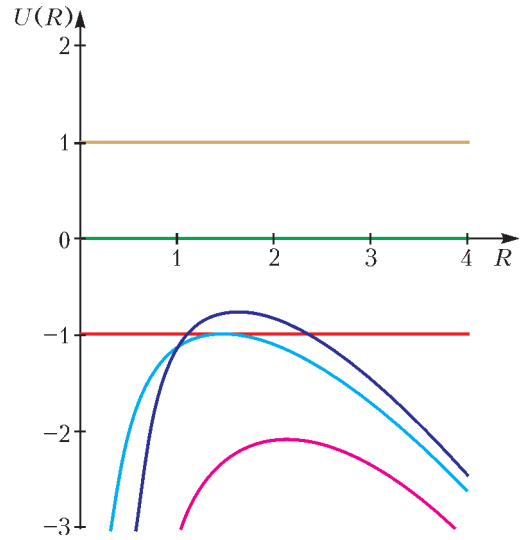


Рис. 1. Примеры графиков потенциальной энергии

именно физических задачах может встретиться обсуждаемая формула для потенциальной энергии.

Модель вторая: стрельба из рогатки в открытом космосе

Сначала рассмотрим совсем простой случай: $b = 0$. Пусть в космосе есть однородный шар массой M и с него вдоль направления его радиуса выстреливают пробным телом массой m . Будем полагать $m \ll M$, тогда шар можно считать неподвижным. Учтем закон всемирного тяготения Ньютона в его полном виде, т.е. силу тяжести будем считать не постоянной, как вблизи поверхности Земли, а зависящей от расстояния R между центрами обоих тел:

$$F = -\frac{GMm}{R^2},$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная. Знак “минус” должен напомнить нам, что направление силы, действующей на тело массой m , противоположно радиусу-вектору

этого тела, проведенному из центра тела массой M . Потенциальная энергия нашего пробного тела будет определяться формулой

$$U(R) = -\frac{GMm}{R}.$$

Здесь мы считаем, что потенциальная энергия стремится к нулю при неограниченном возрастании R . Для тех, кто умеет дифференцировать, заметим, что если известна потенциальная энергия, то силу можно найти, вычислив производную: $F = -U'(R)$.

Как будет двигаться наше брошенное тело? Есть ровно три возможности: при $E < 0$ тело вернется и упадет на свое прежнее место; при $E = 0$ оно улетит бесконечно далеко и там остановится; наконец, при $E > 0$ тело продолжит движение и на бесконечности. Во втором случае начальная скорость тела называется второй космической. Если тяжелым телом будет Земля, а пробное тело бросают с ее поверхности и пренебрегают сопротивлением атмосферы, то величина второй космической скорости будет равна

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} \approx 11200 \text{ м/с} = 11,2 \text{ км/с},$$

где $R_0 \approx 6,38 \cdot 10^6$ м – радиус Земли, $M \approx 5,98 \cdot 10^{24}$ кг – масса Земли.

Заметим, что последняя формула, несмотря на то что она была получена на основе механики Ньютона и без всякой связи с теорией относительности, может быть использована для нахождения гравитационного радиуса тела в ОТО. Достаточно вместо v_{II} подставить скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с и мы получим гравитационный радиус тела массой M :

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}.$$

Если тело сжать до размеров гравита-

ционного радиуса, то никакие силы не смогут остановить его дальнейшего сжатия под действием сил тяготения. Согласно ОТО, даже свет не может улететь от тела, радиус которого меньше R_g . Предоставим читателям возможность самостоятельно вычислить этот радиус, например, для Земли или для Солнца.

Модель третья: Ньютон против анти-Гука

Пусть теперь $b \neq 0$ в нашей формуле для потенциальной энергии. Что может означать второе слагаемое в этой формуле? Для $b < 0$ оно положительно и напоминает потенциальную энергию пружины. Воображаемая пружина тянет брошенное тело назад к центру шара с силой, подчиняющейся закону Гука $F = -kR$, причем $k = |b|$. Нас, однако, будет интересовать другой, весьма необычный случай: $b > 0$, который и отражен на рисунке 1. Тогда соответствующая сила должна отталкивать пробное тело от центра шара и возрастать с увеличением расстояния по закону $F = +bR$. В космологии аналогично ведет себя так называемая темная энергия. В задаче о брошенном теле мы позволим себе назвать это законом анти-Гука. Точку, в которой силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга, уместно, как будет видно из дальнейшего, назвать точкой Эйнштейна.

Теперь, наконец, выпишем обещанные уравнения динамики Вселенной, полученные Фридманом из общей теории относительности, сохраняя все использованные им обозначения:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2R''R}{R^2} + \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0, \quad (1)$$

$$\frac{3R'^2}{R^2} + \frac{3c^2}{R^2} - \lambda = \frac{\kappa}{2} c^2 \rho. \quad (2)$$

Здесь $\kappa = 16\pi G/c^2$, R – так называемый радиус мира (сейчас принят другой термин – масштабный множитель), ρ – средняя плотность вещества во Вселенной, λ – космологическая постоянная, введенная Эйнштейном. Штрихи обозначают производные по времени, т.е. $R' = v$ – скорость изменения радиуса мира, а $R'' = a$ – соответствующее ускорение. Далее мы постараемся убедить вас в том, что, даже не решая, а только обдумывая эти уравнения и построив по ним несколько графиков, можно понять закон эволюции Вселенной.

Будем предполагать, вслед за Эйнштейном и Фридманом, что Вселенная равномерно заполнена пылью, не создающей давления, что пространство одинаково в любой точке и по любому направлению, имеет постоянную положительную кривизну и простейшую топологию, а значит, оно подобно трехмерной сфере. Не советуем мучиться и пытаться себе ее вообразить – лучше представьте себя двумерным существом, живущим на поверхности обычного шара. Аналогом площади $4\pi R^2$ двумерной сферы служит объем сферы трехмерной: $V_3 = 2\pi^2 R^3$.

Ясно, что уравнения Фридмана можно преобразовывать. Например, воспользовавшись вторым уравнением, можно исключить из первого R' . Можно, конечно, умножать и делить уравнения на выражения, отличные от нуля. Давайте, вслед за Фридманом, введем полную массу вещества во Вселенной: $M = \rho V_3 = \rho \cdot 2\pi^2 R^3$. Эта величина сохраняется при изменении радиуса мира R , что следует из приведенных уравнений Фридмана, если применить дифференцирование. После выражения плотности через массу и радиус мира, переобозначения космологической постоянной в виде $\lambda = 3\omega^2$ и умножения обеих

частей уравнений на массу воображаемой частицы m мы приходим к таким формулам:

$$ma = -\alpha \frac{GmM}{R^2} + m\omega^2 R, \quad (3)$$

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(R), \quad (4)$$

где

$$U(R) = -\alpha \frac{GmM}{R} - \frac{m\omega^2 R^2}{2}, \quad (5)$$

$$E = -\frac{mc^2}{2}.$$

Мы видим, что уравнения Фридмана (1) и (2) для Вселенной после преобразований почти совпадают с уравнениями классической механики для частицы массой m , движущейся радиально под действием силы притяжения Ньютона и силы отталкивания анти-Гука (модель третья). В частном случае $\lambda = 3\omega^2 = 0$ модель третья сводится к модели второй. – формула (3) есть второй закон Ньютона, а уравнение (4) – закон сохранения механической энергии. Единственное отличие заключается в появлении перед гравитационной постоянной G множителя $\alpha = 2/(3\pi) \approx 0,21$, который возникает из-за замены выражения $V = (4/3)\pi R^3$ для объема шара в евклидовом пространстве на объем трехмерной сферы $V_3 = 2\pi^2 R^3$. Появление $\alpha = V/V_3$ равносильно небольшому изменению гравитационной постоянной: $G \rightarrow \alpha G$ и никак не отражается на качественной картине движения частицы, иллюстрирующего в нашей статье расширение Вселенной.

Новизна ОТО состоит, в частности, в том, что закон сохранения энергии оказывается одним из десяти уравнений этой теории, а при принятых Эйнштейном предположениях (о том, что Вселенная в среднем одинакова во

всех ее точках и во всех направлениях) этот закон выражается уравнением (2). И если в классической механике мы должны интегрировать по времени, чтобы вывести закон сохранения энергии из второго закона Ньютона, то в ОТО никакого интегрирования не требуется, все уже готово. Здесь энергия не вычисляется по свободно задаваемым начальным данным, а наоборот, эти данные оказываются связанными известным заранее значением энергии – здесь, например, $E = -\frac{mc^2}{2}$. Именно уравнение (2) является основным для космологии, именно оно называется в научной литературе уравнением Фридмана.

Потенциальные горы для Вселенной

Как должна вести себя Вселенная, подчиненная законам Фридмана? Оказывается так же, как брошенное в радиальном направлении от большой точечной массы M тело массой m с потенциальной энергией (5), подчиненное законам механики Ньютона. Заметим, что эти законы не запрещают движение со скоростью, сколь угодно большей скорости света. Правда, для лучшего сходства с эволюци-

ей Вселенной нам придется считать началом полета тела ситуацию, когда расстояние R почти равно нулю, скорость $v = R'$ почти равна бесконечности, но полная энергия конечна и равна минус $mc^2/2$ (однако, возможна и иная точка зрения – об этом будет рассказано во второй части этой статьи). Обратите внимание, что при такой постановке задачи тяжелое, но точечное тело массой M играет роль всего вещества Вселенной, а движение тела массой m описывает изменение геометрии Вселенной. При этом динамика геометрии (геометродинамика) определяется количеством вещества. Вы заметили, что, согласно уравнениям (3), (4), масса движущегося тела m никак не скажется на его движении?

Разделив уравнение (4) на модуль полной энергии тела, т.е. на $mc^2/2$, и вводя безразмерную переменную $x = R/R_\Sigma$, где $R_\Sigma = 3\sqrt{\frac{\alpha GM}{\omega^2}}$ – координата точки Эйнштейна, мы получим уравнение, связывающее безразмерные величины:

$$\tilde{E}_{\text{кин}} = -1 - \tilde{U} \quad \text{или}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = -1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{2}{x} + x^2 \right),$$

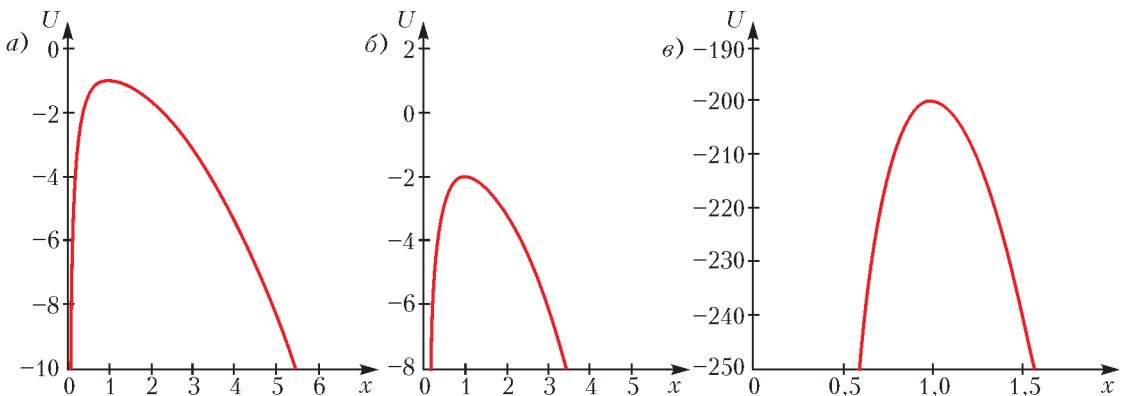


Рис. 2. Графики безразмерной потенциальной энергии: а) при $\beta = 1$, б) при $\beta = 2$, в) при $\beta = 200$

где

$$\tilde{E}_{\text{кин}} = \frac{v^2}{c^2}, \quad \tilde{U} = \frac{U}{|E|} = -\frac{\beta}{3} \left(\frac{2}{x} + x^2 \right),$$

$$\beta = \frac{R_g}{\pi R_{\text{Э}}}.$$

Построим графики зависимости безразмерной потенциальной энергии от безразмерного радиуса Вселенной при разных значениях параметра β (рис.2). Случай $\beta = 1$ соответствует желанию Эйнштейна получить неизменную Вселенную: уровень безразмерной полной энергии $E = -1$ касается вершины горы. Случай $\beta = 2$ дает небольшое, но качественное отличие от предыдущего: уровень безразмерной полной энергии $E = -1$ лежит выше кривой. Случай $\beta = 200$ учитывает современные данные – точнее, в отличие от предыдущих примеров, не противоречит им, здесь уровень безразмерной полной энергии *намного выше* вершины горы. Из рисунка 2 видно, что максимум потенциальной энергии все-

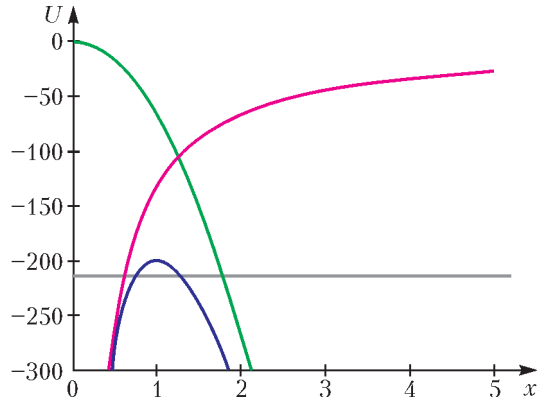


Рис. 3. Потенциальные энергии Ньютона (красная линия), анти-Гука (зеленая линия) и их сумма (синяя линия) при $\beta = 200$

гда находится в точке Эйнштейна, т.е. при $x = 1$.

Для большей наглядности построим теперь по отдельности потенциальные энергии Ньютона (гипербола) и анти-Гука (перевернутая парабола), а также и их сумму (рис.3).

(Продолжение следует)

Космология Фридмана: горы реальные и потенциальные

С.ДВОРЯНИНОВ, В.СОЛОВЬЕВ

Динамика Вселенной

Теперь займемся зависимостью скорости расширения Вселенной от ее радиуса.

Сначала построим графики безразмерной функции безразмерного аргумента:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{-1 + \frac{\beta}{3} \left(\frac{2}{x} + x^2 \right)}.$$

Из рисунка 4 видно, что при $\beta = 1$ в точке Эйнштейна $x = 1$ скорость изменения радиуса мира нулевая, при $\beta = 1,1$ скорость уже никогда не обращается в ноль, при $\beta = 200$ скорость

также не меняет знака, принимая намного большие значения по сравнению с предыдущим случаем. Конечно, независимо от β минимум скорости всегда находится в точке Эйнштейна $R = R_E$, т.е. при $x = 1$.

Затем построим графики для величины, которую назовем безразмерной постоянной Хаббла (из следующего раздела будет понятно, почему):

$$\tilde{H} = \frac{v}{cx} = \sqrt{-\frac{1}{x^2} + \frac{\beta}{3} \left(\frac{2}{x^3} + 1 \right)}.$$

Как видно из рисунка 5, минимум этой функции достигается при $x = \beta$, т.е. при $R = R_g/\pi$.

Как уже говорилось в первой части статьи, график потенциальной энер-

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.



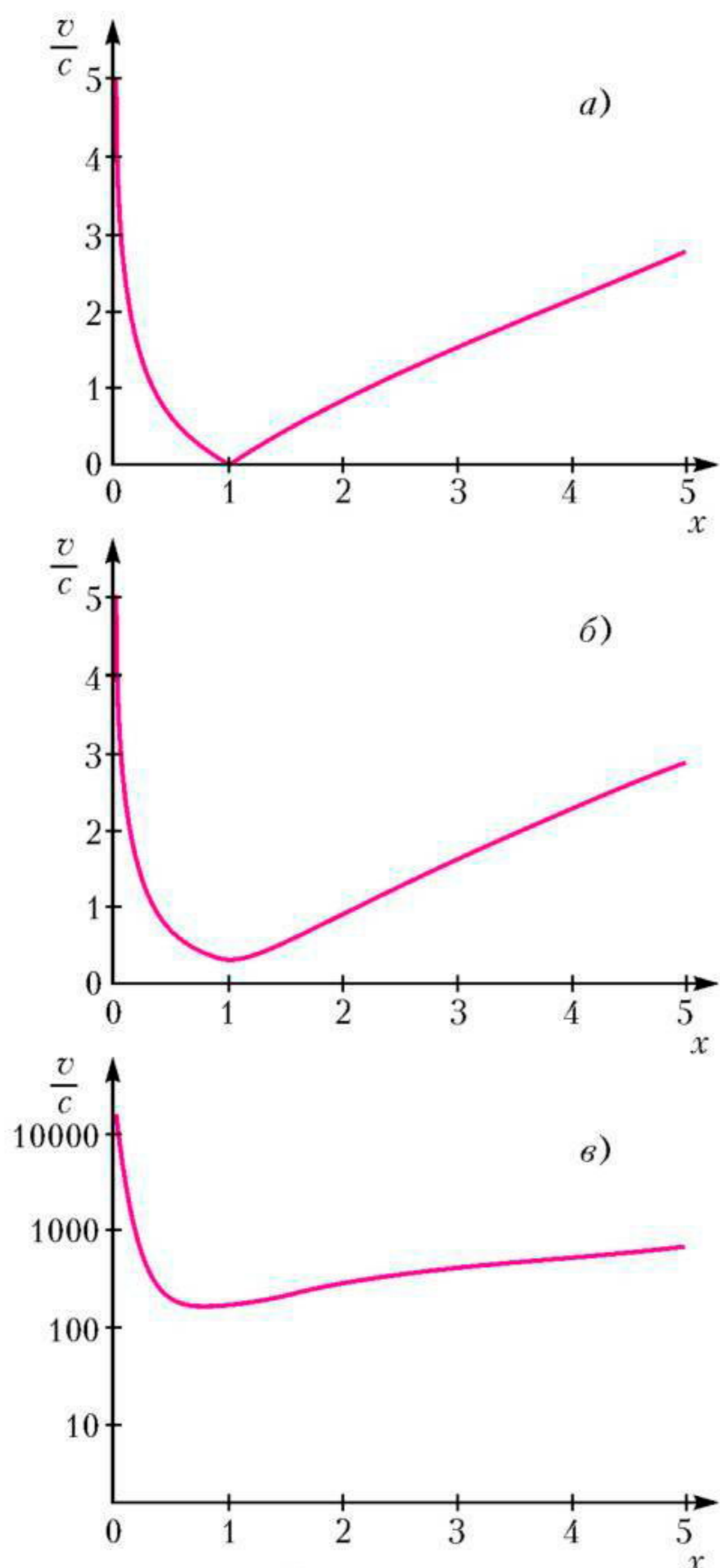


Рис. 4. Графики безразмерной скорости при $\beta = 1$ (а), $\beta = 1,1$ (б), $\beta = 200$ (в)

гии Вселенной напоминает крутую горку, по которой можно скатиться в бездну и слева и справа. Скатывание с горки справа налево соответствует все ускоряющемуся сжатию Вселенной, вплоть до нулевого радиуса; скатывание слева направо соответствует ускоренному расширению Вселенной, стремящейся к бесконечному радиусу. Достижима ли при движении слева направо вершина горы? Если максимум

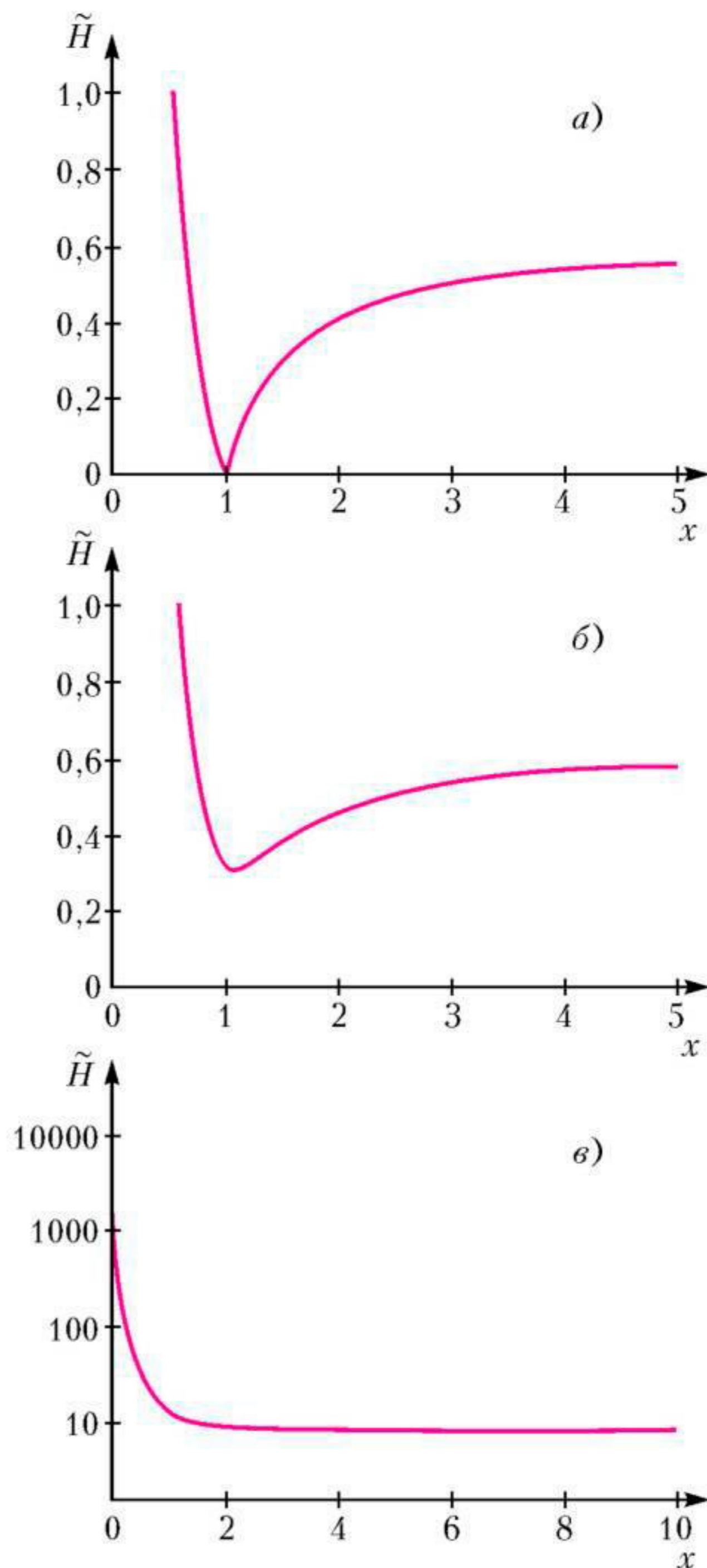


Рис. 5. Графики безразмерной постоянной Хаббла при $\beta = 1$ (а), $\beta = 1,1$ (б), $\beta = 200$ (в)

потенциальной энергии лежит выше значения полной энергии, то вершина недостижима. Это значит, что брошенное тело упадет обратно, а Вселенная, начавшая в момент Большого взрыва расширяться с бесконечной скоростью, будет постепенно замедляться, замрет на мгновение и покатится, наращивая скорость, обратно к нулевому радиусу. Это происходит при $0 < \beta < 1$.

Пройдет ли Вселенная через эту точку и начнет ли расширяться снова, повторяя цикл за циклом? Фридман допускал такую возможность, вспоминая индусскую мифологию о периодах жизни. Интегрируя, он вычислил так называемый период мира; принимая предложенную английским астрономом Артуром Эддингтоном среднюю плотность вещества и считая космологическую постоянную нулевой, получил 10000000000 лет. Этот сценарий Фридман назвал «периодическим миром».

Можно, конечно, думать, что падение нашего пробного тела приведет к смерти Вселенной. Если точка Эйнштейна лежит ниже значения полной энергии, что происходит при $\beta > 1$, то брошенное тело улетит в бесконечность, а Вселенная, соответственно, начав расширяться с бесконечной скоростью, будет сначала постепенно уменьшать скорость расширения, но затем, перевалив через вершину горы, снова начнет ускоряться. Этот сценарий Фридман назвал «монотонным миром первого рода».

Наконец, «монотонный мир второго рода» соответствует картине, когда тело начинает движение с нулевой начальной скоростью с правого склона горы и скатывается по нему с ускорением. «Большого взрыва» и горячей ранней Вселенной в этом сценарии нет, поэтому он не согласуется с наблюдениями. Добавим, что в ОТО допустим не только мир положительной кривизны, но и миры с отрицательной и нулевой кривизной. В нашей механической задаче это означает, что полная энергия тела может быть равна $mc^2/2$ или нулю. Оба эти случая гарантируют прохождение точки Эйнштейна и, значит, оставляют в силе только сценарий «монотонного мира первого рода».

Почему, обсуждая космологию, мы опираемся на Фридмана, а не на Эйнштейна, предложившего свое решение проблемы пятью годами раньше? Потому, что решение Эйнштейна было ошибочным. Оно описывало застывшую в точке – точке Эйнштейна – Вселенную, т.е. случай, когда наше пробное тело кто-то аккуратно поместил в ту самую точку, где силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга, иначе говоря, положил его на вершину потенциальной горы. Чтобы это вообще было возможно, надо еще и подогнать точку Эйнштейна под значение полной энергии, т.е. связать три числа: радиус мира R , космологическую постоянную λ и массу мира M двумя уравнениями. В нашем рассмотрении эти два уравнения выглядят так:

$$\beta = 1, x = 1,$$

или

$$R_g = \pi R_\lambda, R = R_\lambda.$$

Но каждый школьник знает, что положение на вершине является неустойчивым равновесием, а значит, рано или поздно тело покатится вниз.

Космологическую постоянную λ , т.е. силу всемирного отторжения, Эйнштейн ввел нарочно, изменив первоначальные уравнения ОТО ради того, чтобы получить для нас мир вечный и неизменный. Но все оказалось зря. Так интуиция иногда обманывает даже самые сильные умы. Не обманывает только математика! А космологическая постоянная спустя 80 лет все-таки пригодилась. В конце 1990-х годов было открыто ускоренное расширение Вселенной. Это значит, что точка Эйнштейна в ходе эволюции мира уже пройдена. Нам кажется, что случай Эйнштейна наглядно изображен на заставке к этой статье.

Несколько чисел

Спустя три месяца после открытия уравнений динамики Вселенной Фридман выпускает для широкой публики книгу «Мир как пространство и время». Она начинается цитатой из Козьмы Пруткова, а заканчивается стихами Г.Р.Державина. В конце книги Фридман пишет:

«Теория Эйнштейна оправдывается на опыте; она объясняет старые, казавшиеся необъяснимыми явления и предвидит новые поразительные соотношения. Вернейший и наиболее глубокий способ изучения, при помощи теории Эйнштейна, геометрии мира и строения нашей Вселенной состоит в применении этой теории ко всему миру и в использовании астрономических исследований. Пока этот метод немного может дать нам... Но в этих обстоятельствах нельзя не видеть лишь затруднений временных; наши потомки, без сомнения, узнают характер Вселенной, в которой мы обречены жить...»

Теперь можно дополнить получившуюся картину современными оценками параметров эволюции Вселенной. При жизни Фридмана (он умер в 1925 г.) о них не было известно ничего. Сейчас у нас есть данные о постоянной Хаббла, о процентном отношении вкладов материи, включая невидимую нами темную материю, и о темной энергии, роль которой, возможно, играет космологическая постоянная.

Постоянная Хаббла H названа в честь американского астронома Эдвина Хаббла, работавшего на крупнейшем в то время оптическом телескопе в обсерватории Маунт-Вилсон. В 1929 году он обнаружил прямую пропорциональность скорости v убегания галактик расстоянию r до них: $v = Hr$. В наших обозначениях: $H = R'/R$. Современ-

ное значение постоянной Хаббла составляет $H \approx 2,5 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ (но чаще H выражают в км/с на мегапарсек, тогда $H \approx 67 \text{ (км/с)/Мпк}$).

Темная энергия, которая, возможно, сводится к космологической постоянной, составляет примерно 70% полной плотности энергии. Вещество, включающее в себя и невидимую загадочную темную материю, дает примерно 30%. Есть еще излучение, плотность энергии которого убывает при расширении Вселенной как $1/R^4$, но его вкладом в первом приближении мы можем пренебречь. Вклад кривизны пространства не превышает 0,4%, поэтому пространство обычно предполагается плоским. Мы, однако, для наглядности сохраним за переменной R титул радиуса мира и будем считать пространство Вселенной трехмерной сферой, вслед за Эйнштейном и Фридманом (точнее, вслед первой работе Фридмана).

В нашей механической модели Вселенной соотношение между темной энергией и энергией вещества есть отношение потенциальных энергий

$$\frac{U_{\text{анти-Гук}}}{U_{\text{Ньютон}}} = \frac{m\omega^2 R/2}{\alpha GmM/R^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_{\text{Э}}} \right)^3 =$$

$$= \frac{x^3}{2} \approx \frac{70\%}{30\%} \approx 2,3,$$

следовательно, $x \approx \sqrt[3]{4,6} \approx 1,7$.

Соотношение между вкладом кривизны (у нас в механической задаче это полная энергия) и вкладом вещества

$$\frac{|E|}{U_{\text{Ньютон}}} = \frac{1}{2\beta/(3x)} = \frac{3x}{2\beta} < 0,013$$

дает нам оценку $\beta > 190$. Для безразмерной постоянной Хаббла \tilde{H} , график зависимости которой от x мы строили при разных значениях β (см.

рис.5), получаем

$$\tilde{H} = \frac{v}{cx} = H \frac{R_{\text{Э}}}{c} \approx 0,77 \cdot 10^{-26} R_{\text{Э}},$$

если $R_{\text{Э}}$ выражено в метрах. Из приведенной ранее формулы для \tilde{H} получаем

$$\tilde{H}(x = 1,7) \approx 0,68\sqrt{\beta} > 9,4,$$

следовательно, $R_{\text{Э}} > 1,2 \cdot 10^{27}$ м, или в более адекватных единицах – мегапарсеках $R_{\text{Э}} > 6 \cdot 10^4$ Мпк.

Таким образом, из данных о постоянной Хаббла мы можем получить оценку радиуса мира: $R > 1,7R_{\text{Э}} \approx \approx 10^5$ Мпк, или $R > 2 \cdot 10^{27}$ м. Для массы мира получаем $M > 1,5 \cdot 10^{57}$ кг, для космологической постоянной Эйнштейна – $\lambda = 3\omega^2 = 1,3 \cdot 10^{-35} \text{ с}^{-2}$, для гравитационного радиуса Вселенной – $R_g > 3,6 \cdot 10^7$ Мпк.

Рождение Вселенной из ничего?

«...является возможность также говорить о “сотворении мира из ничего”, но все это пока должно рассматривать как курьезные факты, не могущие быть солидно подтвержденными недостаточным астрономическим экспериментальным материалом...» – так говорится в упомянутой выше книге А.Фридмана.

В обеих наших моделях космологии было что-то искусственное. В примере с катанием на санях кто-то должен разогнать сани, во втором примере кто-то должен выстрелить из рогатки... Не следует ли представить все проще? Например, чтобы перевалить через одну горку, не лучше ли будет сначала забраться на горку более высокую и начать спуск оттуда? Тогда будет понятно, откуда взялись огромная кинетическая энергия и огромная по модулю, но отрицательная, потенциальная энергия. Причем начальная полная энергия может быть очень ма-

лой и даже нулевой. Вселенная может родиться... из ничего!

Приблизительно об этом говорит сценарий так называемой инфляции, когда Вселенная рождается как флуктуация вакуума и за первые 10^{-30} с своего существования увеличивает свои размеры более чем в 10^{30} раз. В этом сценарии вся огромная масса вещества Вселенной рождается при распаде первичного вакуума и переходе от эпохи инфляции к эпохе Фридмана. На рисунке 6 приведен примерный график

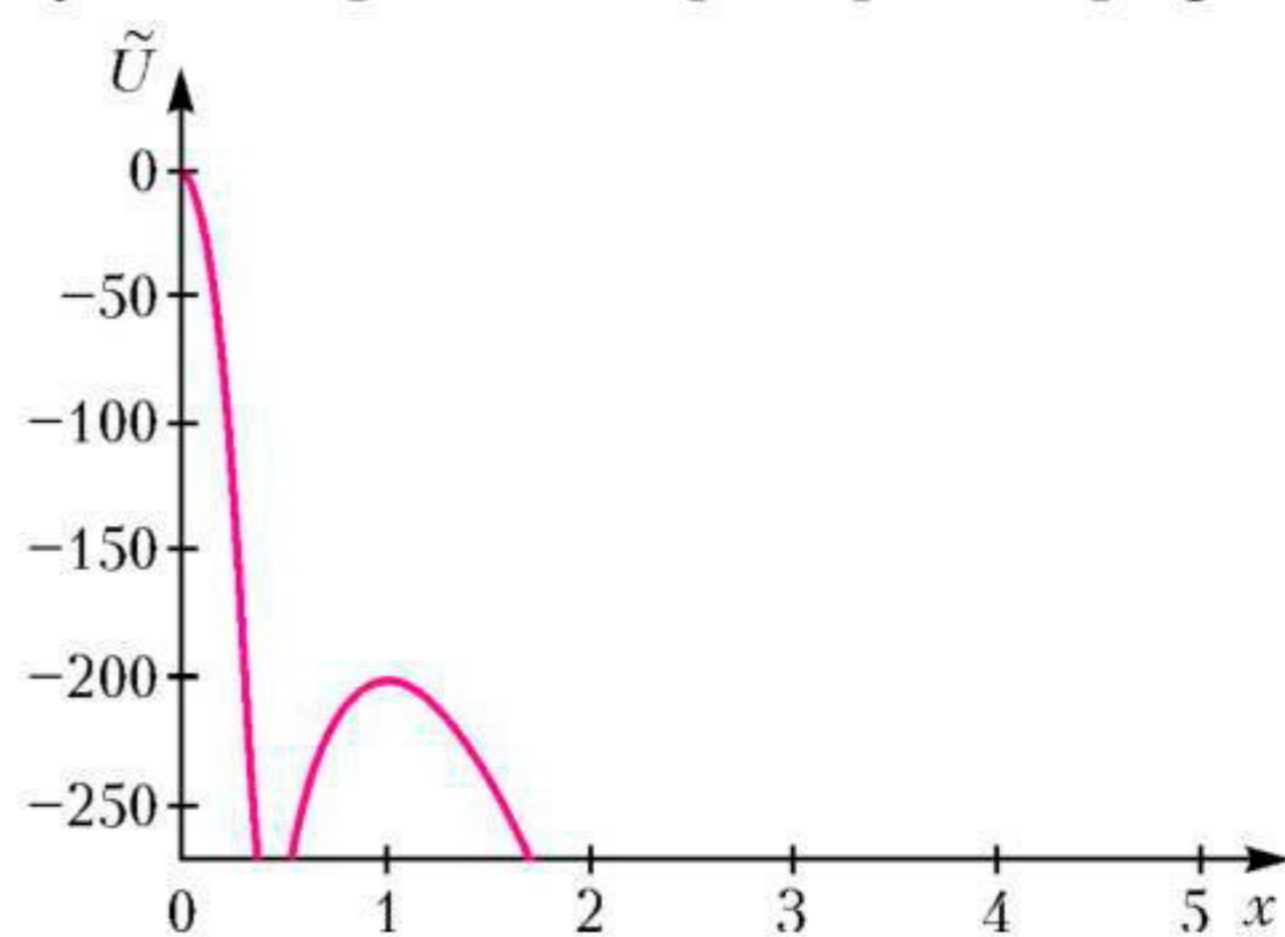


Рис. 6. График потенциальной энергии для сценария инфляции

зависимости безразмерной потенциальной энергии \tilde{U} от безразмерного радиуса Вселенной x для сценария инфляции.

Эпилог

Так ли проста космология, как было представлено выше? Конечно, здесь сказано далеко не все. Вещество, которое Эйнштейн, за ним Фридман и мы с вами считали пылью, на самом деле включает в себя и излучение и ведет себя по-разному при разных плотностях и температурах. Мы не знаем доподленно, что происходит в мире элементарных частиц при энергиях на много порядков выше тех, которые доступны современным ускорителям.

(Окончание см. на с. 23)

статьи. Мы же приведем следующее геометрическое рассуждение, из которого можно вывести сохранение площади.

Рассмотрим криволинейную трапецию – «чешуйку» ширины t , ограниченную вертикальными прямыми, находящимися на рас-

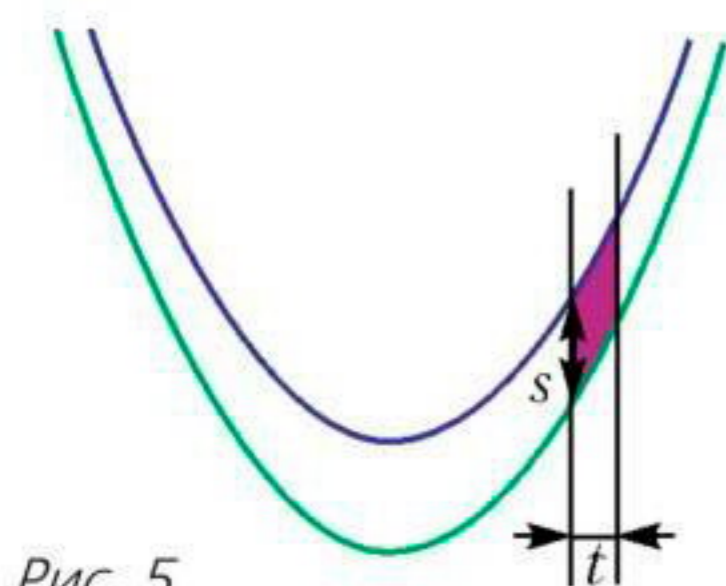


Рис. 5

стоянии t друг от друга, и параболлами $y = x^2 + b$, $y = x^2 + b + s$, где $s > 0$ (рис.5). Тогда площадь чешуйки равна ts .

Упражнение 5.
Докажите это.

Указание. Разрежьте горизонталями чешуйку на части, переложив которые можно получить прямоугольник $t \times s$.

При параболическом повороте любая вертикальная прямая сдвигается на k по горизонтали, значит, наша чешуйка перейдет в новую чешуйку той же ширины t , зажатую между теми же параболлами. Как видим, площадь новой чешуйки тоже равна ts . Итак, площади чешуек, зажатых между вертикальными прямыми и параболлами вида $y = x^2 + c$, сохраняются. Можно создать мелкую «криволинейную» сетку из таких чешуек (рис.6) и приближать заданную

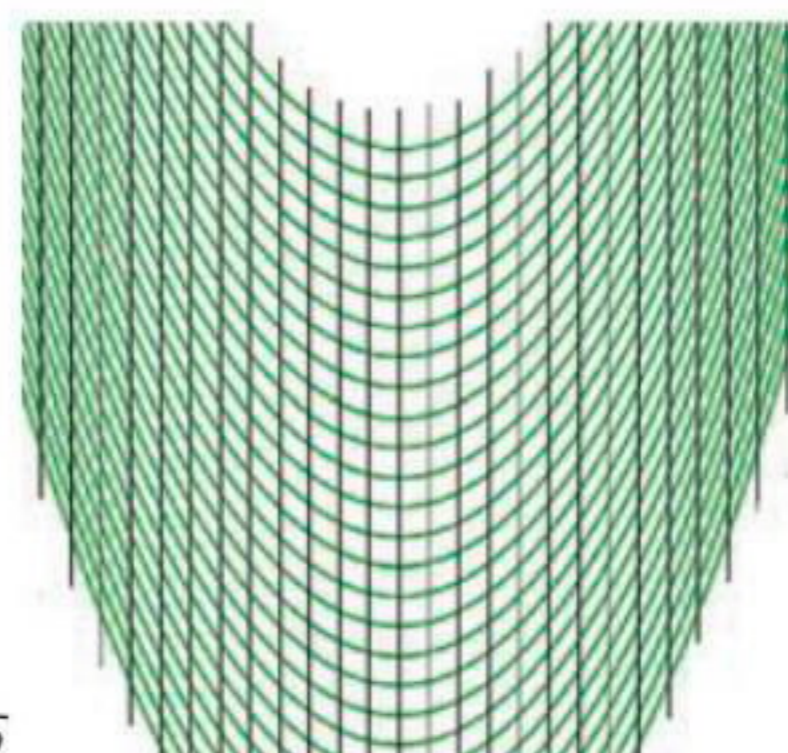


Рис. 6

фигуру набором чешуек (подобно тому, как при определении площадей сложных фигур фигура приближается набором ячеек мелкой квадратной сетки) – и вывести из сохранения площадей для чешуек сохранение площадей для любых фигур.

Итак, все три ключевых момента для решения готовы, теперь дело за малым.

Упражнения

6. Сформулируйте аналог упражнения 2, докажите его и завершите решение **задачи о параболах**.

7. Сформулируйте и докажите факт про середину отрезка, аналогичный упражнению 3.

В завершение предлагаем читателю придумать аналогичные пространственные задачи об эллипсоидах, гиперболоидах, параболоидах и объемах, отсекаемых касательными плоскостями.

(Начало см. на с. 9)

В ранней Вселенной имели место грандиозные фазовые переходы, распад вакуума и рождение из него новых и новых частиц. Эволюция Вселенной является неравновесным и необратимым процессом.

Первым физиком, всерьез обратившим на это внимание, был Георгий Гамов, которому, вместе с учениками, удалось вывести соотношение между количествами легких элементов системы Менделеева во Вселенной, предсказать существование реликтового излучения и правильно оценить его температуру.

Но это отдельная история...

Литература

1. Письма и рукописи А.Фридмана в архиве П.Эренфеста (www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Friedmann_archive/)
2. А.А.Фридман. Мир как пространство и время (5-е изд.) (М.: Либроком, 2009)
3. Номер журнала «Успехи физических наук», посвященный 75-летию Фридмана (т.80, в.3, 1963)
4. Э.А.Тропп, В.Я.Френкель, А.Д.Чернин. Александр Александрович Фридман: Жизнь и деятельность (2-е изд.) (М.: КомКнига, 2006)
5. А.Беленький. «Воды, в которые я вступаю, не пересекал еще никто». Александр Фридман и истоки современной космологии (электронный журнал «Наука из первых рук», № 5(47), 2012)
6. В.О.Соловьев. Как Фридман Эйнштейна подковал (журнал «Наукоград», №4(6), 2015)
7. М.В.Сажин. Современная космология в популярном изложении (М.: УРСС, 2002)
8. А.Д.Долгов. Космология: от Померанчука до наших дней (УФН, т.184, 2014)