Гамильтонов подход в теории гравитации[1]

Владимир Олегович Соловьев

[1]Спецкурс кафедры квантовой теории и физики высоких энергий физического факультета МГУ: ИФВЭ, Протвино, 1997

Оглавление

Лекция 1. Введение

В этих лекциях мы предполагаем, что студенты уже усвоили основные понятия классической теории поля. В первую очередь, это означает умение применять принцип наименьшего действия для вывода полевых уравнений и преобразование Лежандра для перехода к гамильтониану. Желательно также иметь представление о теоремах Нетер и о гамильтоновой механике систем со связями. В качестве литературы для повторения пройденного можно рекомендовать, например, такие книги, как [1], [2], [3].

Предполагается также некоторое знакомство с римановой геометрией (определения метрики, связности и кривизны, формулы, связывающие их) и общей теорией относительности (вывод уравнений из вариационного принципа, тождества Бианки и их связь с законами сохранения) [4], [5], [6].

Содержание этих лекций составит построение, обсуждение и применение к космологическим моделям гамильтонова формализма общей теории относительности. Вряд ли стоило бы посвящать 10 лекций, например, изучению гамильтонова формализма скалярного поля. Для повторения пройденного, однако, можно напомнить как это обычно делается. Плотность лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + m^2\phi^2), \tag{1}$$

где $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$, а требование экстремальности действия

$$S = \int \mathcal{L} d^4X$$

приводит к уравнениям движения

$$(\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu - m^2)\phi = 0.$$

В гамильтоновом формализме сначала определяют импульс, канонически сопряженный полю ϕ:

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,0}} = -\eta^{0\mu}\phi_{,\mu} = \phi_{,0} \equiv \dot{\phi}.$$

Затем с помощью преобразования Лежандра находят плотность гамильтониана

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L}|_{\dot{\phi}=\pi} = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2),$$

а сам гамильтониан находится ее интегрированием по пространству

$$\mathrm{H} = \int \mathcal{H} dX^1 dX^2 dX^3.$$

Канонические уравнения имеют вид

$$\dot{\phi} = \{\phi, \mathrm{H}\} = \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \pi} = \pi, \tag{2}$$

$$\dot{\pi} = \{\pi, \mathrm{H}\} = -\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \phi} = \Delta\phi - m^2\phi. \tag{3}$$

Очевидным недостатком такого подхода является отсутствие явной релятивистской инвариантности. Для ее восстановления, как и для явного восстановления любой другой инвариантности, требуется ввести дополнительные переменные. Если отказаться от отождествления координатного и физического времени, то в качестве физически одновременных мы можем выбрать, например, события, лежащие на произвольной пространственноподобной плоскости, а не ограничиваться плоскостью $X^0 = const$. Такая плоскость может быть задана линейной функцией

$$X^\alpha = A^\alpha_i x^i + B^\alpha, \tag{4}$$

где x^i - произвольные параметры $(i = 1, 2, 3)$, которые могут служить новыми независимыми координатами на этой плоскости, т.е. в физическом пространстве (в общем случае получается косоугольная система координат). Далее, мы можем позволить начальной плоскости эволюционировать не только оставаясь параллельной самой себе, но и изменяя свой наклон. Тогда величины A^α_i и B^α могут произвольным образом зависеть от параметра эволюции, при этом

$$\dot{X}^\alpha(t) = \dot{A}^\alpha_i(t)x^i + \dot{B}^\alpha(t).$$

Наше интуитивное представление о времени, разумеется, соответствует случаю, когда плоскость остается параллельной себе $\dot{A}^\alpha_i(t) = 0$ и ее движение в этом направлении равномерно $\dot{B}^\alpha(t) = const$. Однако, более общий подход позволяет включить в понятие движения (или эволюции) не только временные трансляции, но и произвольные преобразования группы Пуанкаре. При этом изменяется вид гамильтониана, который, с одной стороны приобретает зависимость от новых переменных $\dot{A}_i^\alpha$, $\dot{B}^\alpha$, а с другой — начинает зависеть не только от компоненты T^{00} тензора энергии-импульса, а и от других компонент $T^{0\alpha}$.

Представим теперь, что пространство-время искривлено, т.е. является (псевдо)-римановым. Тогда его сечения постоянного времени (пространственноподобные гиперповерхности) также оказываются искривленными и задающие их уравнения, аналогичные (4), перестают быть линейными

$$X^\alpha = e^\alpha(x^i, t).$$

Скорость движения такой гиперповерхности при эволюции будет теперь зависеть и от выбранной точки $x^i = const$

$$\dot{X}^\alpha(x^i, t) = \dot{e}^\alpha(x^i, t).$$

Только такой гибкий подход, когда течение времени задается четырьмя функциями в каждой точке пространства, позволяет сохранить необходимую в гравитации общую координатную инвариантность, или, говоря на более современном языке, — инвариантность относительно диффеоморфизмов пространства-времени. Ниже мы разовьем необходимый для этого математический аппарат.

Напомним, что общая теория относительности описывает гравитацию уравнениями Гильберта-Эйнштейна

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} T_{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \tag{5}$$

где $\kappa = 16\pi G$, G – гравитационная постоянная, которые, в свою очередь, следуют из принципа наименьшего действия при

$$S = \frac{1}{\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4X + \int \mathcal{L}_M d^4X. \tag{6}$$

Динамическими переменными являются метрика пространства-времени и поля материи. Принцип минимальности взаимодействия материи с гравитационным полем означает, что плотность лагранжиана материи $\mathcal{L}_M$ получается из аналогичной плотности в пространстве Минковского заменой $\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}$, так чтобы действие было инвариантом. Например, для скалярного поля вместо (1) получаем

$$\mathcal{L} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} (g^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + m^2 \phi^2).$$

Тензор энергии-импульса материи получается из вариационной производной действия материи по метрическому тензору, так для скалярного поля

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - \frac{g^{\mu\nu}}{2} (g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} + m^2 \phi^2).$$

Лекция 2. Теория пространственноподобных гиперповерхностей в пространстве-времени

Рассмотрим вложение 3-мерного многообразия m с координатами x^a в 4-мерное многообразие $\mathcal{M}$ с системой координат X^α

$$e: \quad x \in m \to X \in \mathcal{M}, \quad X^\alpha = e^\alpha(x^a),$$

образ m в $\mathcal{M}$ называется *гиперповерхностью*. Преобразования координат в m или в $\mathcal{M}$

$$x'^b \quad \to \quad x^a = x^a(x'^b), \tag{7}$$

$$X'^\beta \quad \to \quad X^\alpha = X^\alpha(X'^\beta), \tag{8}$$

очевидно не изменяют гиперповерхности самой по себе.

Отображение $e: \ x \in m \ \to \ e(x) \in \mathcal{M}$ индуцирует отображение $e_* = \partial e(x)/\partial x$ касательного пространства $T_x(m)$ в касательное пространство $T_{X=e(x)}(\mathcal{M})$

$$\lambda^\alpha = e^\alpha_a \lambda^a.$$

Переходная величина $e^\alpha_a = \partial X^\alpha / \partial x^a$ или $e_* = \underset{\sim}{\bar{e}}$, где $\alpha = 0, 1, 2, 3,\ a = 1, 2, 3$ является вектором в $T_X(\mathcal{M})$ и ковектором (линейной формой) в $T_x(m)$

$$\underset{\sim}{\bar{e}} = e^\alpha_a \ \bar{\partial}_\alpha \otimes \underset{\sim}{d} x^a,$$

$$e^{\alpha'}_{a'} = \frac{\partial X^{\alpha'}}{\partial X^\beta} \left(\frac{\partial X^\beta}{\partial x^b} \right) \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}} = \frac{\partial X^{\alpha'}}{\partial X^\beta} e^\beta_b \frac{\partial x^b}{\partial x^{a'}}.$$

Образ $T_x(m)$ в $T_{e(x)}(\mathcal{M})$ при отображении e_* будет 3-мерной плоскостью, проходящей через начало координат. Существует ненулевая линейная форма $n \in T^*_{X=e(x)}(\mathcal{M})$, такая что для любого вектора $\tilde{\lambda} \in T_x(m)$

$$\bar{\lambda} \lrcorner \underline{n} = 0, \quad \text{где} \quad \bar{\lambda} = e_*(\tilde{\lambda}).$$

Это означает условие

$$n_\alpha e^\alpha_a = 0.$$

Если $\mathcal{M}$ – риманово многообразие (не обязательно с положительно определенной метрикой), то на гиперповерхности возникает *индуцированная метрика*

$$g_{ab} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^a} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^b}, \quad \text{или} \quad \underset{\sim}{g} = e^* \underline{g} = \underline{g}(\underset{\sim}{\bar{e}}, \underset{\sim}{\bar{e}}),$$

ее называют также первой фундаментальной формой гиперповерхности.

На пространстве-времени мы будем рассматривать метрики с сигнатурой $(-,+,+,+)$ и пространственноподобные гиперповерхности, т.е. такие для которых метрика g_{ab} является положительно определенной. Будем считать вектор нормали единичным

$$g^{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta = -1, \quad \text{или} \quad \bar{g}(\underline{n}, \underline{n}) = -1. \tag{9}$$

Наличие метрики в m и $\mathcal{M}$ позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между векторами и ковекторами

$$\underline{\lambda} = \underline{g}(\cdot, \bar{\lambda}), \quad \underset{\sim}{\lambda} = \underset{\sim}{g}(\cdot, \tilde{\lambda}),$$

и, в частности, построить из e^α_a величины

$$e^{\alpha a} = g^{ab} e^\alpha_b, \quad e_{\alpha a} = g_{\alpha\beta} e^\beta_a, \quad e^a_\alpha = g_{\alpha\beta} g^{ab} e^\beta_b,$$

которые понадобятся нам в дальнейшем.

В качестве базиса мы можем выбрать четверку векторов из $T_X(\mathcal{M})$ (n^α, e^α_a), так что произвольный вектор $\bar{\lambda}$ представляется в виде

$$\lambda^\alpha = \lambda^\perp n^\alpha + \lambda^a e^\alpha_a, \quad \text{где} \quad \lambda^\perp = -\lambda^\beta n_\beta, \quad \lambda^a = \lambda^\beta e^a_\beta.$$

Аналогичным образом могут быть разложены произвольные тензоры, например,

$$\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\perp\perp} n_\alpha n_\beta + \lambda_{\perp b} n_\alpha e^b_\beta + \lambda_{a\perp} e^a_\alpha n_\beta + \lambda_{ab} e^a_\alpha e^b_\beta,$$

где

$$\lambda_{\perp\perp} = \lambda_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \ \lambda_{\perp b} = -\lambda_{\alpha\beta} n^\alpha e^\beta_b, \ \lambda_{a\perp} = -\lambda_{\alpha\beta} e^\alpha_a n^\beta, \ \lambda_{ab} = \lambda_{\alpha\beta} e^\alpha_a e^\beta_b.$$

Как видно, минус появляется в тех случаях, когда имеется нечетное число проекций на нормальное направление. Положение знака $\perp$ здесь безразлично, т.е. $\lambda^\perp = \lambda_\perp$.

Как нетрудно увидеть, для метрического тензора соответствующее разложение упрощается

$$g_{\alpha\beta} = -n_\alpha n_\beta + g_{ab} e^a_\alpha e^b_\beta.$$

Аффинная связность, т.е. правило параллельного перенесения, задаваемое в частном случае риманова многообразия $\mathcal{M}$ его метрикой (через символы Кристоффеля), и в более общем случае произвольного многообразия индуцирует на гиперповерхности некоторую новую аффинную связность. Продемонстрируем это подробнее. Для произвольного векторного поля $\lambda^a(x)$, заданного в *касательном расслоении* $T(m)$, и для вектора N^b в $T_x(m)$ сначала выполним преобразование к соответствующим величинам, отнесенным к объемлющему многообразию $\mathcal{M}$

$$\lambda^\alpha = \lambda^a e^\alpha_a, \quad N^\beta = N^b e^\beta_b,$$

затем найдем ковариантную производную по направлению $\lambda^\alpha_{;\beta} N^\beta$ и вновь спроектируем полученный вектор в $T_x(m)$. Результат наших действий определим в качестве индуцированной ковариантной производной

$$\lambda^a_{|b} = (\lambda^c e^\alpha_c)_{;\beta} e^\beta_b e^a_\alpha.$$

При этом аффинная связность

$$\gamma^a_{bc} = e^\alpha_{c;\beta} e^\beta_b e^a_\alpha, \tag{10}$$

индуцированная в римановом многообразии также оказывается римановой связностью, т.е. не имеет кручения

$$\gamma^a_{bc} = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^c \partial x^b} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} e^\beta_b e^\gamma_c = \gamma^a_{cb}$$

и сохраняет метрику

$$g_{ab|c} = (g_{mn} e^m_\alpha e^n_\beta)_{;\gamma} e^\gamma_c e^\alpha_a e^\beta_b = (g_{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta)_{;\gamma} e^\gamma_c e^\alpha_a e^\beta_b = 0.$$

Это означает, что коэффициенты связности выражаются через индуцированную метрику стандартной формулой Кристоффеля

$$\gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{dc,b} + g_{bd,c} - g_{bc,d}).$$

Ковариантная производная вектора нормали вдоль произвольного касательного к гиперповерхности направления характеризует искривление этой гиперповерхности по отношению к объемлющему пространству $\mathcal{M}$. Поскольку длина нормали фиксирована условием (9), то

$$n^{\alpha} n_{\alpha;\beta} = 0.$$

Введем *тензор внешней кривизны* или вторую фундаментальную форму гиперповерхности

$$K_{ab} = -n_{\alpha;\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} \equiv n_{\alpha} e^{\alpha}_{a;b}. \tag{11}$$

Очевидно, что из $e^{\alpha}_{a;b} = e^{\alpha}_{b;a}$ следует $K_{ab} = K_{ba}$. Зная теперь и нормальную (11) и тангенциальные (10) составляющие 4-вектора $e^{\alpha}_{a;b}$ мы можем записать *уравнение Гаусса-Вейнгартена*

$$e^{\alpha}_{a;b} = -K_{ab} n^{\alpha} + \gamma^{c}_{ab} e^{\alpha}_{c}.$$

По определению тензора кривизны

$$\phi_{\alpha;\beta\gamma} - \phi_{\alpha;\gamma\beta} = R^{\delta}_{\alpha\beta\gamma} \phi_{\delta}. \tag{12}$$

Проектируя это соотношение на касательные к гиперповерхности направления получаем

$$\phi_{a;bc} - \phi_{a;cb} = R_{dabc} \phi^{d} - R_{\perp abc} \phi^{\perp}.$$

В левой части этого равенства выразим проекции ковариантной производной объемлющего пространства через индуцированную ковариантную производную. Для этого заметим, что разница между $\phi_{a;b}$ и $\phi_{a|b}$ состоит в том, что во втором случае с самого начала “отрезается” нормальная составляющая ковектора ϕ_{α}, тогда как в первом случае параллельно переносится весь ковектор и лишь потом лишняя нормальная компонента “отрезается”:

$$\begin{aligned} \phi_{a;b} &= \phi_{\alpha;\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} = (\phi_{d} e^{d}{}_{alpha} + \phi_{\perp} n_{\alpha})_{;\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} = \\ &= \phi_{a|b} + \phi_{\perp} n_{\alpha;\beta} e^{\alpha}_{a} e^{\beta}_{b} = \phi_{a|b} - \phi_{\perp} K_{ab}, \end{aligned} \tag{13}$$

аналогично

$$\phi_{ab;c} = \phi_{ab|c} - \phi_{\perp b} K_{ac} - \phi_{a\perp} K_{bc}.$$

Комбинируя эти результаты получаем

$$\phi_{a;bc} = \phi_{a;b|c} - \phi_{\perp;b} K_{ac} - \phi_{a;\perp} K_{bc}.$$

Последнее слагаемое симметрично по (b, c) и поэтому не дает вклада в формулу (12). Найдем

$$\begin{aligned} \phi_{\perp;b} &= -n^\alpha \phi_{\alpha;\beta} e_b^\beta = (-n^\alpha \phi_\alpha)_{;\beta} e_b^\beta + \phi^{\ alpha} n_{\alpha;\beta} e_b^\beta = \\ &= \phi_{\perp|b} - \phi^d K_{db}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя найденные выражения для проекций вторых ковариантных производных в (12) и учитывая независимость величин ϕ^d и $\phi^\perp$ получаем

$$R_{dabc} = \tilde{R}_{dabc} + K_{ac} K_{db} - K_{ab} K_{dc}, \quad (15)$$

$$R_{\perp abc} = K_{ab|c} - K_{ac|b}. \quad (16)$$

Эти соотношения называются *уравнениями Гаусса-Петерсона-Кодацци.* Свертывая их с помощью метрики гиперповерхности, например,

$$\begin{aligned} g^{ac} g^{db} R_{dabc} = (g^{\alpha\beta} + n^\alpha n^\beta)(g^{\gamma\delta} + n^\gamma n^\delta) R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \\ = R + 2R_{\perp\perp} = 2G_{\perp\perp}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$$

есть тензор Эйнштейна, в результате получаем

$$G_{\perp\perp} = \frac{1}{2}(\tilde{R} + K^2 - \mathrm{Sp} K^2),$$

$$G_{\perp b} = K^a_{b|a} - K_{|b}.$$

Эти соотношения позволяют выразить 4 независимые линейные комбинации уравнений общей теории относительности (ОТО) через новые переменные: первую и вторую фундаментальные формы гиперповерхности g_{ab}, K_{ab}:

$$\tilde{R} + K^2 - \mathrm{Sp} K^2 = \kappa T_{\perp\perp},$$

$$2(K^a_{b|a} - K_{|b}) = \kappa T_{\perp b}.$$

Мы увидим в дальнейшем, что эти уравнения играют роль связей, которым с необходимостью должны удовлетворять начальные данные в ОТО.

Отметим, что мы пока не готовы выразить аналогичным образом через 3 + 1-величины остальные проекции уравнений ОТО.

Примечания

Математический аппарат этой главы, в основном, появился в прошлом веке, обобщения на пространства размерности больше трех, неевклидовой сигнатуры и ненулевой кривизны были сделаны заведомо до появления ОТО. Рекомендуемой литературой являются книги [5], [6], [7], [9] и статья [8].

Задачи

Вычислите тензоры внутренней и внешней кривизны для простейших поверхностей (сфера, цилиндр, конус) в 3-мерном евклидовом пространстве.

Лекция 3. Однопараметрические семейства гиперповерхностей

Итак, эволюция будет пониматься нами как непрерывный переход от одной пространственноподобной гиперповерхности из некоторого однопараметрического семейства к следующей. При этом гамильтоновы уравнения определяют эволюционное изменение физических полей и самой геометрии гиперповерхности. Если каждая отдельная гиперповерхность соответствует фиксированному моменту времени, то изучаемая область пространства-времени должна заметаться однопараметрическим семейством пространственноподобных гиперповерхностей

$$X^\alpha = e^\alpha(t, x^i).$$

При этом точки с фиксированными 3-координатами движутся по некоторым мировым линиям, а касательные к ним векторы образуют поле направлений выбранного нами времени

$$N^\alpha = \frac{\partial e^\alpha}{\partial t},$$

или поле деформаций гиперповерхности. Можно разложить его по нашему базису

$$N^\alpha = N n^\alpha + N^i e_i^\alpha, \quad \text{где} \quad N = -N^\alpha n_\alpha, \quad N^i = N^\alpha e^i_\alpha.$$

Обычно, следуя ADM[10] (Арновитту, Дезеру и Мизнеру), называют N функцией смещения, а N^i – вектором сдвига. Очевидно, мы сможем восстановить однопараметрическое семейство, если будем знать поле $N^\alpha(t, x^i)$ и хотя бы одну исходную гиперповерхность. Однако, если вместо этого поля будут известны только его компоненты разложения N, N^i, то нам потребуется дополнительная информация (о метрическом тензоре пространства-времени), так как, в общем случае мы ничего не можем сказать о векторе n^α, и следовательно, о базисе, связанном с гиперповерхностью.

Введем ковариантную производную по направлению эволюционного поля N^α

$$\left(\nabla_{\bar N}\bar M\right)^\alpha \equiv \frac{\nabla M^\alpha}{\partial t} = M^\alpha_{;\beta}N^\beta = \frac{\partial M^\alpha}{\partial t} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}M^\beta N^\gamma.$$

Заметим, что N^α не является истинным тензорным полем, заданным в пространстве-времени, так как его компоненты зависят не только от точки и от выбора системы координат X^α, но также от выбора однопараметрического семейства гиперповерхностей. Поэтому при переходе к другому семейству эта ковариантная производная преобразуется нестандартным образом, как будет видно из дальнейшего. Заметим, что эта ковариантная производная согласована с метрикой пространства-времени, но не обращается в нуль для индуцированной пространственной метрики, то есть, не коммутирует с операциями поднимания или опускания латинских индексов.

Получим формулы, описывающие изменение базиса (n^α, e^α_i) при переходе от гиперповерхности t к $t+\delta t$. С помощью связности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ параллельно перенесем векторы базиса из точки x^i второй гиперповерхности в соответствующую точку первой, найдем разности $\delta n^\alpha, \delta e^\alpha_i$, разделим их на δt и получим в результате $\nabla_{\bar N}n^\alpha$, $\nabla_{\bar N}e^\alpha$. Например,

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar N}e^\alpha_i &= N^\beta(e^\alpha_{i,\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}e^\mu_i) = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial t\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\frac{\partial X^\beta}{\partial t}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^i} = \\ &= e^\mu_i N^\alpha_{;\mu} = \frac{\nabla N^\alpha}{\partial x^i} = N^\alpha_{;i} = (Nn^\alpha + N^j e^\alpha_j)_{;\mu}e^\mu_i = \\ &= N_{,i}n^\alpha + N^j{}_{,i}e^\alpha_j + Nn^\alpha{}_{;\mu}e^\mu_i + N^j e^\alpha_{j;i}.\end{aligned}$$

В последнем выражении можно сделать следующее преобразование

$$n^\alpha_{;\mu}e^\mu_i = e^\alpha_j(e^j_\beta n^\beta_{;\mu}e^\mu_i) = e^\alpha_j(e^{\beta j}n_{\beta;\mu}e^\mu_i) = -K^j_i e^\alpha_j,$$

что позволяет переписать ковариантную производную от касательных к гиперповерхности векторов базиса в виде

$$\frac{\nabla e^\alpha_i}{\partial t} = (N_{|i} - K_{ij}N^j)n^\alpha + (N^j{}_{|i} - NK^j_i)e^\alpha_j.$$

Воспользовавшись свойствами единичной нормали

$$n_\alpha e^\alpha_i = 0, \quad g^{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta = -1,$$

получаем

$$n^\alpha\frac{\nabla n_\alpha}{\partial t} = 0, \quad e^\alpha_i\frac{\nabla n_\alpha}{\partial t} = N_{|i} - K_{ij}N^j,$$

то есть,

$$\frac{\nabla n^\alpha}{\partial t} = (N_{|i} - K_{ij}N^j)e^{\alpha i}.$$

Как уже упоминалось, индуцированная метрика не является ковариантно постоянной относительно $\frac{\nabla}{\partial t}$:

$$\frac{\nabla g_{ij}}{\partial t} = g_{\alpha\beta}\frac{\nabla}{\partial t}(e_i^\alpha e_j^\beta) = N_{i|j} + N_{j|i} - 2NK_{ij}.$$

Применяя стандартные формулы дифференцирования обратной матрицы и детерминанта получаем также соотношения

$$\frac{\nabla g^{ij}}{\partial t} = -g^{ik}g^{jl}\frac{\nabla g_{kl}}{\partial t} = -N^{i|j} - N^{j|i} + 2NK^{ij},$$

$$\frac{\nabla}{\partial t}\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}\frac{\nabla g_{ij}}{\partial t} = \sqrt{g}(-NK + N^i_{|i}).$$

Упомянутое выше нестандартное поведение нашей ковариантной производной по времени, то есть, по направлению векторного поля N^α, проявляется в том, что в полученные формулы входят производные от компонент этого поля N, N^i.

Если разделить нормальные и тангенциальные деформации базиса, то мы получим

$$\nabla_N n^\alpha = N_{|i}e^{\alpha i}, \quad \nabla_N e_i^\alpha = N_{|i}n^\alpha - NK_i^j e_j^\alpha,$$

$$\nabla_{\tilde{N}} n^\alpha = -N^jK_{ij}e^{\alpha i}, \quad \nabla_{\tilde{N}} e_i^\alpha = -N^jK_{ij}n^\alpha + N^j{}_{|i}e_j^\alpha.$$

Для пространственной метрики имеем соотношения

$$\nabla_N \underset{\sim}{g} = -2NK, \quad \nabla_{\tilde{N}} \underset{\sim}{g} = L_{\tilde{N}}\underset{\sim}{g},$$

где $L_{\tilde{N}}$ – производная Ли по направлению векторного поля N^i.

Выведем теперь формулы для ковариантных производных по нормальному и касательным направлениям от проекций пространственно-временных тензоров. Например,

$$\nabla_N\phi_\perp = \nabla_N(-n^\alpha\phi_\alpha) = -n^\alpha\nabla_N\phi_\alpha - \phi_\alpha\nabla_N n^\alpha =$$

$$= -n^\alpha\phi_{\alpha;\beta}n^\beta N - \phi_\alpha N_{|i}e^{\alpha i} = -\phi_{\perp;\perp}N - \phi^i N_{|i},$$

а также

$$\nabla_N\phi_i = \nabla_N(e_i^\alpha\phi_\alpha) = e_i^\alpha\nabla_N\phi_\alpha + \phi_\alpha\nabla_N e_i^\alpha =$$

$$= e_i^\alpha\phi_{\alpha;\beta}n^\beta N + \phi_\alpha(N_{|i}n^\alpha - NK_i^j e_j^\alpha) = -\phi_{i;\perp}N - \phi_\perp N_i - \phi_j K_i^j N.$$

Это позволяет выразить $\phi_{\perp;\perp}$ и $\phi_{i;\perp}$ через пространственную ковариантную производную и пространственно-временную производную в направлении нормали δ_N:

$$\phi_{\perp;\perp}N = -\delta_N\phi_\perp - \phi^i N_{|i}.$$

$$\phi_{i;\perp}N = -\delta_N\phi_i - \phi_\perp N_{|i} - \phi_j K_i^j N.$$

Можно аналогично вывести следующие формулы

$$N\phi_{\perp\perp;\perp} = -\delta_N\phi_{\perp\perp} - \phi^i{}_\perp N_{|i} - \phi_\perp{}^i N_{|i},$$

$$N\phi_{i\perp;\perp} = -\delta_N\phi_{i\perp} - K_{ij}\phi^j{}_\perp N - \phi_{\perp\perp}N_{|i} - \phi_i{}^j N_{|j},$$

$$N\phi_{\perp k;\perp} = -\delta_N\phi_{\perp k} - K_{kl}\phi_\perp{}^l N - \phi_{\perp\perp}N_{|k} - \phi^l{}_k N_{|l},$$

$$N\phi_{ik;\perp} = -\delta_N\phi_{ik} - K_{kl}\phi_i{}^l N - K_{il}\phi^l{}_k N - \phi_{i\perp}N_{|k} - \phi_{\perp k}N_{|i},$$

которые понадобятся для вычисления остальных проекций тензора Римана. В силу его свойств симметрии, кроме уже найденных в предыдущей лекции R_{ijkl} и $R_{\perp ijk}$, отличными от нуля независимыми компонентами будут только $R_{i\perp j\perp}$. Действуя как в предыдущей лекции запишем

$$\phi^i R_{i\perp k\perp} = \phi_{\perp;k\perp} - \phi_{\perp;\perp k}.$$

Домножая это равенство на N и пользуясь формулами для проекций можно получить соотношение

$$NR_{i\perp k\perp} = \delta_N K_{ik} + NK_i^j K_{jk} + N_{|ik}.$$

В прошлой лекции мы выразили $G_{\perp\perp}$ и $G_{\perp i}$ через переменные, связанные с гиперповерхностью. Теперь мы в состоянии выразить подобным образом и остальные компоненты, то есть, G_{ij}, однако, здесь явным образом используется уже заданное однопараметрическое семейство, а не единственная гиперповерхность,

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R,$$

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj} - R^\perp_{i\perp j},$$

$$R = R^{kl}{}_{kl} - 2R^{\perp k}{}_{\perp k},$$

$$NG_{ij} = N(R^k{}_{ikj} - R^\perp_{i\perp j}) - \frac{1}{2}g_{ij}N(R^{kl}{}_{kl} - 2R^{\perp k}{}_{\perp k}).$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для компонент тензора Римана получаем

$$NG_{ij} = N\tilde{G}_{ij} - (N_{ij} - g_{ij}N^{|k}_{\ |k}) - \delta_N(K_{ij} - g_{ij}K) -$$
$$-N\left[\frac{1}{2}g_{ij}(K^2 + \mathrm{Sp}K^2) - 3KK_{ij} + 2K_i^kK_{kj}\right],$$

где $\tilde{G}_{ij} = \tilde{R}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\tilde{R}$, $\tilde{R}_{ij}$ – тензор Риччи пространственной геометрии. Таким образом, все компоненты тензора Эйнштейна могут быть выражены через переменные гиперповерхности g_{ij} и K_{ij}, их производные в направлении нормали δ_N или производные по времени $\delta_{\hat{N}}$, а также через четыре функции деформации гиперповерхности N, N^i. Разрешив предыдущие уравнения относительно производной по нормали получаем

$$\delta_N(K_{ij} - g_{ij}K) = -NG_{ij} + N\tilde{G}_{ij} - (N_{|ij} - g_{ij}N^{|k}_{\ |k})$$
$$-N\left[\frac{1}{2}g_{ij}(K^2 + \mathrm{Sp}K^2) - 3KK_{ij} + 2K_i^kK_{kj}\right],$$

причем $\delta_N g_{ij} = -2NK_{ij}$.

Примечания

Наше изложение основано на работах Кухаржа[8].

Задачи

В качестве упражнения можно предложить рассмотреть семейство концентрических сфер в 3-мерном евклидовом пространстве в сферических координатах, или, аналогично, семейство соосных цилиндров в цилиндрических.

Лекция 4. ОТО как гамильтонова система со связями

Некоторые особенности гамильтонова формализма общей теории относительности можно проиллюстрировать на элементарном примере. Рассмотрим механическую систему с N степенями свободы

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt.$$

В канонической форме ее действие принимает вид

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) dt.$$

Сделаем теперь замену переменной интегрирования $t = t(\tau)$, тогда

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\sum_{i=1}^{N} p_i \frac{dq_i}{d\tau} - H(q_i, p_i, t) \frac{dt}{d\tau}) d\tau.$$

Если теперь считать τ новым временем, а старое время t рассматривать как динамическую переменную, то есть, как новую обобщенную координату q_{N+1}, получаем

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sum_{A=1}^{N+1} p_A \frac{dq_A}{d\tau} d\tau,$$

В нашем гамильтоновом формализме теперь появилась связь

$$R(q_A, p_A) \equiv p_{N+1} + H(q_i, p_i, q_{N+1}) = 0.$$

преобразование Лежандра приводит к нулевому гамильтониану

$$H_{new} = \sum_{A=1}^{N+1} p_A \frac{dq_A}{d\tau} - L \equiv 0.$$

Очевидно, однако, что настоящий гамильтониан должен приводить не к тривиальному превращению всех динамических переменных в интегралы движения, а к уравнениям, согласующимся с исходными. Это легко достигается включением в гамильтониан связи с произвольным множителем Лагранжа $N(\tau)$

$$\tilde{H} = NR(q_A, p_A)$$

так что

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\sum_{A=1}^{N+1} p_A \frac{dq_A}{d\tau} - NR) d\tau.$$

При этом гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\dot{q}_A = N\frac{\partial R}{\partial p_A}, \quad \dot{p}_A = -N\frac{\partial H}{\partial q_A}.$$

Ясно, что любая механическая система может быть описана с помощью такого параметризованного формализма[11]. Итак, обращение гамильтониана в нуль является следствием произвола в выборе временно́го параметра τ. Здесь, конечно, нельзя забывать, что гамильтониан равен нулю не тождественно, а лишь на решениях уравнения связи. В терминологии Дирака это называется слабым равенством и обозначается следующим образом

$$R \approx 0.$$

До вычисления скобок Пуассона, разумеется, нельзя полагать связи равными нулю (подобно тому как из обращения в нуль функции в некоторой точке еще не следует, что она имеет в ней и нулевую производную).

Дираком был предложен простой алгоритм, ведущий к построению гамильтониана по сингулярному (или вырожденному) лагранжиану, то есть, в случае когда

$$\det \| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \| \neq 0.$$

Определение импульсов по стандартной формуле

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

не позволяет здесь однозначно выразить все скорости через импульсы. Возникают, так называемые, первичные связи (то есть, ограничения на канонические переменные) и поэтому не все фазовое пространство, а только его подмногообразие отвечает физическим состояниям.

Разумеется, динамическая эволюция, порождаемая гамильтонианом и каноническими скобками Пуассона, не должна допускать схода с этой поверхности физических состояний ни в какой момент времени. Это гарантируется, если вектор скорости в фазовом пространстве всегда будет направлен по касательной к физической поверхности. Иначе говоря, скобки Пуассона связей с гамильтонианом должны обращаться в нуль (после учета самих связей)

$$\dot{\phi}_\alpha = \{\phi_\alpha, H\} \approx 0.$$

В общем случае, для первичных связей это условие может и не выполняться автоматически. Тогда, возможно, придется принять вторичные связи, которые еще больше ограничивают физическое подпространство, уменьшая его размерность. (В теории поля за размерностями уследить труднее, ибо все они бесконечны.) Кроме вторичных связей иногда можно получить уравнения, содержащие множители Лагранжа. Решая эти уравнения можно избавиться от произвольных функций времени в уравнениях движения.

Разумеется, аналогичные примеры можно построить и в теории поля. Так, для лагранжиана скалярного поля получаем

$$\mathcal{L} = \pi\dot{\phi} - NH - N^i H_i,$$

где

$$H = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}\phi_{,i}\phi_{,j} + \frac{1}{2}\sqrt{g}m^2\phi^2, \quad H_i = \pi\phi_{,i}.$$

Если теперь, по аналогии с параметризованной механикой, посчитать координаты пространства-времени $e^\alpha(x^i,\tau)$ динамическими переменными, то определяя сопряженные к ним импульсы мы получим 4 первичные связи

$$\mathcal{H}_\alpha \equiv p_\alpha + H_\alpha, \quad \text{где} \quad H_\alpha = -n_\alpha H + e^i_\alpha H_i,$$

которые послужат для построения нового (обращающегося в нуль на решениях) гамильтониана параметризованной теории поля

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^3x(\pi\dot{\phi} + p_\alpha \dot{e}^\alpha - \lambda\mathcal{H} - \lambda^i\mathcal{H}_i).$$

Перейдем теперь к нашей главной задаче — построению гамильтониана гравитационного поля в ОТО. Для того, чтобы переписать плотность лагранжиана в переменных, связанных с однопараметрическим семейством гиперповерхностей, мы должны выразить через них скалярную кривизну пространства-времени R и элемент 4-объема $\sqrt{-{}^{(4)}g}d^4X$. Формула для элемента объема представляет известный из школы результат: объем призмы есть произведение площади основания на высоту

$$\sqrt{-{}^{(4)}g}d^4X = N\sqrt{{}^{(3)}g}d^3x,$$

(основанием здесь является 3-мерный элемент объема $\sqrt{{}^{(3)}g}d^3x$, а высотой — проекция на нормаль 4-вектора N^α).

Воспользуемся теперь формулой

$$R = -2g^{ij}R_{i\perp j\perp} + g^{ij}g^{kl}R_{ikjl}$$

и с помощью найденных ранее выражений для проекций тензора кривизны получим

$$\sqrt{-{}^{(4)}g}R = -2\sqrt{g}g^{ij}\delta_N K_{ij} - 2\sqrt{g}N^{|i}_{|i} + \sqrt{g}(\tilde{R} + K^2 - 3\mathrm{Sp}K^2).$$

Преобразуем первое слагаемое

$$-2\sqrt{g}g^{ij}\delta_N K_{ij} = \delta_N(-2\sqrt{g}K) + 2N\sqrt{g}(2\mathrm{Sp}K^2 - K^2)$$

и перейдем от производной по направлению нормали δ_N к производной по времени $\delta_{\hat{N}}$, согласно $\delta_{\hat{N}} = \delta_N + L_{\tilde{N}}$, тогда

$$\delta_N(-2\sqrt{g}K) = \delta_{\hat{N}}(-2\sqrt{g}K) - L_{\tilde{N}}(-2\sqrt{g}K) =$$

$$= (-2\sqrt{g}K)_{,0} + (2\sqrt{g}N^iK)_{,i}.$$

Действие принимает вид

$$S = \frac{1}{\kappa}\int\sqrt{-{}^{(4)}g}Rd^4X = \frac{1}{\kappa}\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int d^3x\Big[N\sqrt{g}(\tilde{R} - K^2 + \mathrm{Sp}K^2) +$$

$$+ (-2\sqrt{g}K)_{,0} + (2\sqrt{g}N^iK - 2\sqrt{g}N^{|i})_{,i}\Big],$$

из которого видно, что за исключением первого слагаемого все остальные члены сводятся к поверхностным. Согласно стандартной точке зрения существенная для динамики часть гравитационного действия имеет вид

$$S' = \frac{1}{\kappa}\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int d^3xN\sqrt{g}(\tilde{R} - K^2 + \mathrm{Sp}K^2),$$

а полная производная по времени и пространственная дивергенция не дают вклада при выводе уравнений движения. Однако, если учитывать, что полная постановка задачи должна включать в себя и граничные условия, роль поверхностных интегралов в действии все же является существенной (см. например [11]). В общем случае полная вариация действия содержит как стандартный объемный интеграл вида

$$\int_\Omega d^4X \frac{\delta S}{\delta \Phi_A} \delta\Phi_A(X),$$

так и поверхностный интеграл по границе пространственно-временной области Ω

$$\oint_{\partial\Omega} dS_\alpha \left(F^{A\alpha}\delta\Phi_A + G^{A\alpha\beta}\partial_\beta\Phi_A + H^{A\alpha\beta\gamma}\partial_\beta\partial_\gamma\delta\Phi_A + \cdots \right),$$

куда входят вариации полей и их производные, если в лагранжевой плотности содержались высшие (вторые и т.д.) производные (здесь мы обозначили через F, G и H некие выражения, зависящие от полей и их производных различного порядка). При этом граница $\partial\Omega$ включает в себя и две пространственноподобные гиперповерхности $t = t_1$, $t = t_2$, и времениподобные гиперповерхности, образуемые при эволюции границами пространственной области. Это, в частности, может быть бесконечно удаленная граница, когда интеграл берется по всему бесконечному пространству. Вариационный принцип будет согласован с граничными условиями тогда, когда они будут автоматически обеспечивать обращение в нуль поверхностного интеграла в вариации действия. Ясно, что это не всегда возможно и выбор поверхностных интегралов в действии отнюдь не произволен. В применении к нашему случаю, пока будет достаточным сказать, что безусловно необходимо отбросить член с полной производной по времени, если мы понимаем краевую задачу как задачу Дирихле, то есть, если на обеих границах временного интервала будет фиксироваться только индуцированная метрика g_{ij}, а ее производные по времени $g_{ij,0}$ будут произвольны. Что же касается вклада пространственной границы и, соответственно, пространственной дивергенции, то его обсуждение требует детального анализа граничных условий и частично будет дано в дальнейшем, для случая асимптотически плоского пространства-времени. Пока же мы попросту будем отбрасывать все пространственные дивергенции. Они не могут повлиять на определение скобок Пуассона, а могут только изменить поверхностные члены в окончательном гамильтониане. К тому же, в ОТО часто рассматриваются задачи, когда пространство вообще не имеет границ и все 3-дивергенции дают строго нулевой вклад.

Довольно естественным представляется выбрать в качестве независимых переменных величины g_{ij}, N и N^i. Их столько же (10) сколько независимых переменных ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ в лагранжевом формализме. Заметим, однако, что при переводе на язык однопараметрического семейства гиперповерхностей мы дополнительно ввели 4 переменных $e^\mu(x^i, t)$, то есть, следовало бы ожидать увеличения числа переменных с 10 до 14. Этого не происходит так как 4 проекции метрического тензора тривиальны

$$g_{\perp\perp} = -1, \quad g_{\perp i} = 0.$$

В этом состоит одно из важных отличий гамильтонова формализма ОТО от параметризованных теорий поля на заданном фоне.

Интересно, что исходная версия (так называемый АДМ-формализм[10]) не обладала полной координатной инвариантностью, в ней принимались условия

$$X^0 = t, \quad X^i = x^i,$$

то есть,

$$\dot{e}^\mu \equiv N^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad e_i^\mu = \delta_i^\mu.$$

Тогда оказывалось, что метрика пространства-времени непосредственно выражается через g_{ij}, N, N^i. Из соотношения

$$N^\mu = N n^\mu + e_i^\mu N^i$$

находим

$$n^\mu = \left(\frac{1}{N}, -\frac{N^i}{N}\right),$$

а из

$$g^{\mu\nu} = -n^\mu n^\nu + e_i^\mu e_j^\nu g^{ij}$$

получаем

$$g^{00} = -N^{-2}, \quad g^{0i} = N^{-2} N^i, \quad {}^{(4)}g^{ij} = g^{ij} - N^{-2} N^i N^j.$$

Обратная матрица имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -N^2 + N_k N^k & N_i \\ N_j & g_{ij} \end{pmatrix}$$

Определим импульсы, сопряженные переменным g_{ij}

$$\pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij,0}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_{mn}} \frac{\partial K_{mn}}{\partial g_{ij,0}} = -\frac{1}{\kappa}\sqrt{g}(K^{ij} - g^{ij} K).$$

Как мы видели раньше, величины K_{ij} линейным образом связаны со скоростями изменения метрики g_{ij}, поэтому легко выразить эти скорости через импульсы

$$g_{ij,0} = N_{i|j} + N_{j|i} + \kappa \frac{2N}{\sqrt{g}} (\pi_{ij} - g_{ij} \frac{\pi}{2}).$$

Что касается переменных N, N^i, то скорости их изменения не входят в лагранжиан и поэтому сопряженные к ним импульсы обращаются в нуль, то есть, появляются первичные связи

$$\pi_\perp \approx 0, \quad \pi_i \approx 0.$$

Преобразование Лежандра с учетом первичных связей приводит к гамильтониану

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i + \lambda^\perp \pi_\perp + \lambda^i \pi_i),$$

конечно, с точностью до поверхностных интегралов. Здесь

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{1}{\kappa} g \tilde{R} + \kappa (\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2) \right).$$

Скобки Пуассона для наших канонических переменных

$$\{N(x), \pi_\perp(y)\} = \delta(x,y), \quad \{N^i(x), \pi_j(y)\} = \delta^i_j \delta(x,y),$$

$$\{g_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\} = \delta^{kl}_{ij} \delta(x,y),$$

где

$$\delta^{kl}_{ij} = \frac{1}{2} (\delta^k_i \delta^l_j + \delta^l_i \delta^k_j),$$

порождают вместе с гамильтонианом уравнения движения

$$\dot{N} = \lambda^\perp, \quad \dot{N}^i = \lambda^i,$$

$$\dot{\pi}_\perp = -\mathcal{H}, \quad \dot{\pi}_i = -\mathcal{H}_i,$$

$$\dot{g}_{ij} = N_{i|j} + N_{j|i} + \kappa \frac{2N}{\sqrt{g}} (\pi_{ij} - g_{ij} \frac{\pi}{2}),$$

$$\dot{\pi}^{ij} = -\frac{1}{\kappa} N \sqrt{g} (\tilde{R}^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R) + \frac{1}{\kappa} \sqrt{g} (N^{|ij} - g^{ij} N^{|m}{}_{|m}) +$$

$$+ \kappa \frac{N}{\sqrt{g}} (\pi \pi^{ij} - 2\pi^{ik} \pi^j_k) - \kappa \frac{g^{ij}}{2} \frac{N}{\sqrt{g}} (\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2) + (N^m \pi^{ij})_{|m} - \pi^{ik} N^j{}_{|k} - \pi^{kj} N^i{}_{|k}.$$

Сохранение первичных связей при эволюции требует, очевидно, наложения вторичных связей

$$\mathcal{H} \approx 0, \quad \mathcal{H}_i \approx 0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что “третичных” связей не требуется, так как вторичные связи образуют замкнутую алгебру

$$\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\} = \mathcal{H}_i(y)\delta_{,j}(x,y) - \mathcal{H}_j(x)\delta_{,i}(y,x),$$

$$\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} = \mathcal{H}(x)\delta_{,i}(x,y),$$

$$\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} = \left(g^{ij}(x)\mathcal{H}_j(x) + g^{ij}(y)\mathcal{H}_j(y)\right)\delta_{,i}(x,y).$$

В терминологии Дирака связи, которые имеют со всеми остальными связями нулевые (в слабом смысле) скобки Пуассона, называются связями первого рода.

Очевидно, что канонические переменные $(N, \pi_\perp)$ и (N^i, π_i) имеют весьма тривиальные уравнения движения и поэтому могут быть исключены из рассмотрения. Формально это достигается наложением дополнительных условий или калибровок

$$N - \tilde{N} = 0, \quad N^i - \tilde{N}^i = 0,$$

где $\tilde{N}(x)$ и $\tilde{N}^i(x)$ – произвольные функции пространственных координат. Тогда вместе с первичными связями эти калибровки образуют множество связей второго рода, которые учитываются в подходе Дирака путем переопределения скобок Пуассона. Пусть ξ_α – множество связей второго рода (их число всегда четно), образуем матрицу $\{\xi_\alpha, \xi_\beta\}$ и построим ей обратную матрицу $C_{\alpha\beta}$. Скобки Дирака определяются формулой

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \xi_\alpha\}C_{\alpha\beta}\{\xi_\beta, g\}.$$

Их замечательным свойством является то, что скобка любой связи второго рода с произвольной функцией фазовых переменных обращается в нуль. Поэтому связи второго рода после перехода к скобкам Дирака можно считать равными нулю “в сильном смысле”, то есть, учитывать еще до вычисления скобок.

Нетрудно видеть, что в нашем примере переход к скобкам Дирака равносилен простому сокращению списка канонических переменных до $g_{ij}(x), \pi^{ij}(x)$, с прежней скобкой между ними, то есть

$$\{F, G\}_D = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta g_{ij}}\frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} - \frac{\delta G}{\delta g_{ij}}\frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}}\right).$$

Таким образом, гамильтониан принимает вид

$$H = \int d^3x (N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i)$$

линейной комбинации 4-х связей первого рода, где N, N^i являются теперь уже не каноническими переменными и не заданными функциями, а лагранжевыми множителями при связях (вторичность этих связей утрачивается после ликвидации первичных, поэтому им становятся необходимы свои лагранжевы множители).

Начальными данными для задачи Коши являются индуцированная метрика $g_{ij}(x^k, t_0)$ и сопряженные к ней импульсы $\pi^{ij}(x^k, t_0)$. Что касается функций $N(x^k, t)$ и $N^i(x^k, t)$, то они должны быть заданы руками человека во все моменты времени.

Для возвращения к исходным переменным пространства-времени нужна дополнительная информация в виде функций $X^\mu = e^\mu(x^k, t)$. Вычислив частные производные от этих функций

$$e^\mu_{,i} \equiv e^\mu_i, \quad \dot{e}^\mu \equiv N^\mu,$$

мы сможем найти вектор единичной нормали из соотношений

$$N^\mu = N n^\mu + e^\mu_i N^i.$$

Тогда пространственно-временна́я метрика восстанавливается по формуле

$$g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + g^{ij} e^\alpha_i e^\beta_j.$$

Рассматривая задачу Коши с пространственно-временной точки зрения, т.е. задавая начальные данные в виде $g_{\mu\nu}(e^\alpha(x^k, t_0))$ и $g_{\mu\nu,\beta}(e^\alpha(x^k, t_0))$, а также заранее задав однопараметрическое семейство гиперповерхностей $X^\mu = e^\mu(x^k, t)$ во всей области, мы, конечно, тоже не избавимся от присутствия 4-х произвольных функций в уравнениях эволюции. Как раз это в свое время испугало Эйнштейна[12]:

> “При написании данной работы мы считали недостатком теории то, что для гравитационного поля нам не удалось найти общековариантные уравнения, т.е. ковариантные относительно произвольных преобразований. Впоследствии же я обнаружил, что уравнения, однозначно определяющие $g_{\mu\nu}$ по $T_{\mu\nu}$ и в то же время *общековариантные* вообще не могут существовать...”

и задержало построение ОТО на три года.

Лекция 5. Калибровки

В предыдущей лекции мы построили для ОТО канонический формализм, обладающий инвариантностью как относительно произвольных преобразований координат пространства-времени, так и относительно выбора однопараметрического семейства пространственноподобных гиперповерхностей и замен внутренних координат на гиперповерхности. Гамильтониан, по крайней мере с точностью до поверхностных членов, оказался равным линейной комбинации 4 связей первого рода.

Однако, для однозначности решения задачи Коши потребовалось зафиксировать лагранжевы множители при связях как функции $N(x^k, t)$, $N^i(x^k, t)$. Такое задание является частным случаем калибровочного условия. В общем случае, калибровка обязана избавлять нас от произвольных функций времени в уравнениях движения. Она также может избавлять от связей, то есть, сводить дело к независимым переменным, начальные условия для которых задаются совершенно произвольно. При решении задач квантовой или статистической теории методом континуального интегрирования важно, чтобы физическое состояние параметризовалось заданием соответствующих переменных единственным образом. Таким образом, целью наложения калибровочных условий является искусственное выделение из класса эквивалентности его единственного представителя. Калибровка не должна исключать ни одного из физических состояний, но должна полностью исключить саму калибровочную свободу. Особенностью гравитации (и других общековариантных теорий) является то, что временна́я эволюция оказывается в то же время и калибровочным (точнее, координатным) преобразованием.

Начнем с рассмотрения калибровки АДМ в линеаризованной теории. Принимая, что метрика пространства-времени взаимно-однозначно связана с набором переменных g_{ij}, N, N^i, будем сохранять в уравнениях движения только линейные по

$$\Phi_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$$

члены, где $\eta_{\mu\nu}$ – метрика Минковского в обычных ортогональных координатах. Тогда

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \Phi_{ij}, \quad \pi^{ij} = 0 + \Pi^{ij},$$

$$N = 1 + \xi, \quad N^i = 0 + \xi^i.$$

Гамильтоновы уравнения принимают вид

$$\Phi_{ij,0} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} + \kappa(2\Pi_{ij} - \delta_{ij}\Pi),$$

$$\Pi^{ij}{}_{,0} = \frac{1}{\kappa}\left(\xi_{,ij} - \delta_{ij}\Delta\xi + \frac{1}{2}(\Delta\Phi_{ij} + \Phi_{,ij} - \Phi_{ik,jk} - \Phi_{jk,ik}) - \frac{1}{2}\delta_{ij}(\Delta\Phi - \Phi_{kl,kl})\right).$$

По аналогии с электродинамикой, где вектор-потенциал разлагается на поперечную и продольную составляющие

$$\vec{A} = \vec{A}^T + \vec{A}^L, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A}^T = 0,$$

разложим симметричное тензорное поле на TT, T и L компоненты

$$A_{ij} = A^{TT}_{ij} + A^T_{ij} + A^L_{ij},$$

где

$$A^{TT}_{ii} = 0, \quad A^{TT}_{ij,j} = 0, \quad A^T_{ij,j} = 0.$$

Считая что все поля убывают на пространственной бесконечности, можно построить явный вид этого разложения

$$A^L_{ij} \equiv A_{i,j} + A_{j,i}, \quad A_{i,j} = \frac{1}{\Delta}\left[A_{ik,kj} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta}A_{kl,kl}\right)_{,ij}\right],$$

$$A^T_{ij} = \frac{1}{2}\left(A^T\delta_{ij} - \frac{1}{\Delta}A^T_{,ij}\right), \quad A^T = \frac{1}{\Delta}\left(A_{kk,ll} - A_{kl,kl}\right).$$

Поскольку гамильтоновы уравнения линеаризованы, они распадаются на уравнения для различных компонент, например,

$$\Phi^{TT}_{ij,0} = 2\kappa\Pi^{TT}_{ij}, \quad \Pi^{TT}_{ij,0} = \frac{1}{2\kappa}\Delta\Phi^{TT}_{ij}.$$

Линеаризованные уравнения связи имеют вид

$$\Delta\Phi^T = 0, \quad \Pi^L_{ij,j} = 0,$$

откуда следует $\Phi^T = 0$, $\Pi^L_{ij} = 0$. С учетом этих результатов, помимо уравнений для TT-составляющих, имеем лишь уравнения

$$\Phi^L_{ij,0} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i}; \quad \Pi^T_{ij,0} = \xi_{,ij} - \delta_{ij}\Delta\xi,$$

из чего следует, что калибровочно-зависимыми переменными здесь являются как раз Φ^L_{ij} и Π^T_{ij}. Напрашивается калибровочное условие АДМ

$$\Pi^T = 0, \quad \Phi_{i,j} = 0.$$

Как все это выглядит с точки зрения гамильтониана? Для получения линеаризованных уравнений нам требуется его разложение до квадратичных членов

$$H = \int d^3x \left((1+\xi)\mathcal{H} + \xi^i \mathcal{H}_i\right) = \int d^3x \left(\mathcal{H}^{(2)} + \xi\mathcal{H}^{(1)} + \xi^i \mathcal{H}^{(1)}_i + \mathcal{H}^{(1)}\right).$$

Последнее слагаемое есть просто дивергенция

$$\mathcal{H}^{(1)} = -R^{(1)} \equiv -(\Phi_{ij,ij} - \Phi_{ii,jj})$$

и дает чисто поверхностный вклад в гамильтониан: интеграл по бесконечно удаленной границе пространства. Здесь, в линеаризованной теории, мы имеем право рассматривать лишь быстро убывающие решения (локализованные волновые пакеты) и поэтому можем отбросить этот член. Слагаемые

$$\xi\mathcal{H}^{(1)} + \xi^i \mathcal{H}^{(1)}_i$$

дают нам при варьировании по переменным ξ, ξ_i связи

$$\mathcal{H}^{(1)} \approx 0, \quad \mathcal{H}^{(1)}_i \approx 0,$$

а при варьировании по Φ_{ij} и Π_{ij} — уже обсуждавшиеся уравнения для эволюции калибровочно-зависимых величин. Наконец, в гамильтониане присутствует ненулевой, даже на решениях уравнений связи, член

$$\int d^3x \mathcal{H}^{(2)},$$

который после учета всех связей и калибровок и превращается в редуцированный гамильтониан, зависящий только от физических переменных

$$H_{\mathrm{reduced}} = \int d^3x \mathcal{H}^{(2)}|_{\mathrm{reduced}} = \int \left(\kappa \Pi^{TT}_{ij}\Pi^{TT}_{ij} + \frac{1}{4\kappa}\Phi^{TT}_{ij,k}\Phi^{TT}_{ij,k}\right) d^3x,$$

который обладает явной положительной определенностью. Уравнения движения могут быть выведены из него с помощью скобок Дирака

$$\Phi^{TT}_{ij,0} = \{\Phi^{TT}_{ij}, H_{\mathrm{reduced}}\}_D, \quad \Pi^{TT}_{ij,0} = \{\Pi^{TT}_{ij}, H_{\mathrm{reduced}}\}_D,$$

причем

$$\{\Phi_{ij}^{TT}, \Pi_{kl}^{TT}\}_D = \left(\delta_{ij}^{kl}\right)^{TT} \delta(x,y),$$

где $\left(\delta_{ij}^{kl}\right)^{TT}$ – проектор на TT-составляющие.

Очевидно, что в полной, не упрощенной линеаризацией, теории также должен появляться ненулевой редуцированный гамильтониан, иначе мы получим "замороженный формализм" для физических степеней свободы. Однако, механизм появления такого ненулевого гамильтониана будет совсем другим, причем разным для случаев открытого и замкнутого пространства. В последнем случае применима аналогия с депараметризацией параметризованного формализма механики, которой воспользовались в своих пионерских работах[10] Арновитт, Дезер и Мизнер.

Итак, в механическом случае для возвращения к ненулевому гамильтониану нужно найти среди переменных ту, которая могла бы сыграть роль времени. Пусть у нас роль гамильтониана играет связь вместе с лагранжевым множителем

$$H = NR(q_A, p_A).$$

Перейдем к новым переменным

$$(q_A, p_A) \to (Q, P, q_i, p_i),$$

таким, что координата Q может быть выбрана в качестве времени. Тогда наложим калибровку

$$\xi \equiv Q - t = 0,$$

явным образом зависящую от времени. Одновременно разрешим уравнение связи относительно сопряженного этой координате импульса

$$P = P(t, q_i, p_i).$$

Редуцированный гамильтониан будет иметь вид

$$H_{\text{reduced}} = -P(t, q_i, p_i).$$

Покажем, что он, действительно, будет генерировать правильные уравнения движения. Для простоты мы предполагаем, что

$$\{Q, q_i\} = \{Q, p_i\} = 0, \quad \{P, q_i\} = \{P, p_i\} = 0,$$

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} \neq 0, \quad \{p_i, p_j\} \neq 0,$$

хотя на самом деле утверждение верно и при более общих условиях. Исходные уравнения движения в новых переменных будут иметь вид

$$\dot{Q} = N\frac{\partial R}{\partial P}, \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\} = \{q_i, p_j\}\frac{\partial H}{\partial p_j} = \{q_i, p_j\}N\frac{\partial R}{\partial p_j};$$

$$\dot{P} = -N\frac{\partial R}{\partial Q}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\{q_j, p_i\}N\frac{\partial R}{\partial q_j} + \{p_i, p_j\}N\frac{\partial R}{\partial p_j}.$$

Условие выполнения калибровки в любой момент времени означает, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \{\xi, H\} = 0, \quad \text{или} \quad -1 + N\frac{\partial R}{\partial P} = 0$$

и позволяет определить лагранжев множитель

$$N = \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)^{-1}.$$

Подставляя наше решение уравнения связи относительно импульса, сопряженного выбранному времени, в уравнение связи, мы получим тождество

$$R(Q, P(Q, q_i, p_i), q_i, p_i) \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество получаем

$$\frac{\partial R}{\partial Q} + \frac{\partial R}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial Q} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q_i} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} + \frac{\partial R}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p_i} = 0.$$

Редуцированный гамильтониан и скобка Дирака, полученная исключением переменных (Q, P), дают новые уравнения

$$\dot{q}_i = \{q_i, H_{\text{reduced}}\}_D = \{q_i, -P(Q, q, p)\}_D = -\frac{\partial P}{\partial p_j}\{q_i, p_j\},$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H_{\text{reduced}}\}_D = -\frac{\partial P}{\partial p_j}\{p_i, p_j\} + \frac{\partial P}{\partial q_j}\{q_j, p_i\}.$$

Сравним эти уравнения с теми, которые получаются из старых уравнений при подстановках

$$N = \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial R}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial R}{\partial p_i} = -\frac{\partial R}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial p_i}.$$

Они принимают вид

$$\dot{q}_i = \{q_i, p_j\}N\frac{\partial R}{\partial p_j} = \{q_i, p_j\}\left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)^{-1}\left(-\frac{\partial R}{\partial P}\cdot\frac{\partial P}{\partial p_j}\right) = -\{q_i, p_j\}\frac{\partial P}{\partial p_j},$$

$$\dot{p}_i = -\{q_j, p_i\} N \frac{\partial R}{\partial q_j} + \{p_i, p_j\} N \frac{\partial R}{\partial p_j} = -\{q_j, p_i\} \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)^{-1} \left(-\frac{\partial R}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial q_j}\right) +$$

$$+\{p_i, p_j\} \left(\frac{\partial R}{\partial P}\right)^{-1} \left(-\frac{\partial R}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial p_j}\right) = \{q_j, p_i\} \frac{\partial P}{\partial q_j} - \{p_i, p_j\} \frac{\partial P}{\partial p_j},$$

откуда очевидно, что результаты совпадают, то есть, учет калибровок в уравнениях движения равносилен их учету в гамильтониане и скобках Пуассона.

Теперь покажем, как это делается в ОТО. Возьмем в качестве выделенной пары переменных детерминант метрики и след тензора импульса. При этом у нас остаются свободными метрика с единичным детерминантом и бесследовая часть импульса

$$\tilde{g}_{ij} = g^{-\frac{1}{3}} g_{ij}, \quad \det|\tilde{g}_{ij}| = 1,$$

$$\tilde{\pi}^{ij} = g^{\frac{1}{3}} (\pi^{ij} - \frac{1}{3} g^{ij} \pi), \quad g_{ij} \tilde{\pi}^{ij} = 0.$$

Из выделенных переменных образуем канонически сопряженную пару

$$Q = \frac{2}{3} \frac{\pi}{\sqrt{g}}, \quad P = -\sqrt{g},$$

$$\{Q(x), P(y)\} = \delta(x, y), \quad \{Q(x), \tilde{g}_{ij}(y)\} = 0 = \{Q(x), \tilde{\pi}^{ij}\},$$

$$\{P(x), \tilde{g}_{ij}\} = 0 = \{P(x), \tilde{\pi}^{ij}\}.$$

Тогда скобки Пуассона имеют вид

$$\{\tilde{g}_{ij}, \tilde{\pi}^{kl}\} = \left(\delta^{kl}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}^{kl}\right) \delta(x, y) \equiv \tilde{\delta}^{kl}_{ij} \delta(x, y),$$

$$\{\tilde{\pi}^{ij}, \tilde{\pi}^{kl}\} = -\frac{1}{3} \left(\tilde{g}^{ij} \tilde{\pi}^{kl} - \tilde{g}^{kl} \tilde{\pi}^{ij}\right) \delta(x, y).$$

Двумя очевидными калибровками могут служить: калибровка “внешнего” времени

$$Q = t,$$

и калибровка “внутреннего” времени

$$-P = t.$$

Для разрешения уравнения связи

$$\mathcal{H} = 0,$$

которое здесь, конечно, является дифференциальным уравнением с частными производными, удобнее использовать “внутреннее” время, для которого уравнение оказывается алгебраическим. Связи, отвечающие координатной инвариантности в 3-пространстве, мы пока оставляем не затронутыми, их лагранжевы множители остаются произвольными функциями.

Итак, выберем калибровку

$$\xi \equiv t + P = 0, \quad \text{то есть}, \quad \sqrt{g} = t, \quad g = t^2,$$

тогда

$$\Gamma^k_{ij}(g) = \Gamma^k_{ij}(\tilde{g}), \quad R_{ij}(g) = R_{ij}(\tilde{g}), \quad R \equiv g^{ij} R_{ij} = g^{-\frac{1}{3}} \tilde{R},$$

$$\mathrm{Sp}\pi^2 = g^{\frac{2}{3}} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}_{kl} g^{-\frac{2}{3}} (\tilde{\pi}^{ik} + \frac{1}{3} \tilde{g}^{ik} \pi)(\tilde{\pi}^{jl} + \frac{1}{3} \tilde{g}^{jl} \pi) = \mathrm{Sp}\tilde{\pi}^2 + \frac{1}{3} \pi^2,$$

$$\mathcal{H} \equiv -\frac{1}{\sqrt{g}} \left(gR + \frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2 \right) = -t^{-1} \left(t^{\frac{4}{3}} \tilde{R} + \frac{\pi^2}{6} - \mathrm{Sp}\tilde{\pi}^2 \right).$$

Учитывая

$$\pi = \frac{3}{2} t Q,$$

получаем

$$\mathcal{H} = -t^{-1} \left(t^{\frac{4}{3}} \tilde{R} - \mathrm{Sp}\tilde{\pi}^2 + \frac{3}{8} t^2 Q^2 \right).$$

Отсюда найдем редуцированный гамильтониан

$$Q = \pm \sqrt{\frac{8}{3} \left(t^{-2} \mathrm{Sp}\tilde{\pi}^2 - t^{-\frac{2}{3}} \tilde{R} \right)},$$

$$H_{\text{reduced}} = -\int Q \left[\tilde{g}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}, t \right] d^3x + \int N^i \mathcal{H}_i \left[\tilde{g}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}, t \right] d^3x.$$

При этом в связях $\mathcal{H}_i$ мы должны сделать подстановку

$$Q = Q \left[\tilde{g}_{ij}, \tilde{\pi}^{ij}, t \right], \quad P = -t.$$

Дадим конспект доказательства согласованности редукции гамильтониана с редукцией уравнений движения. Это необходимо, потому что аналогичное доказательство из механики недостаточно для случая теории поля. Для простоты примем $N^i = 0$, что полностью исключает свободу выбора пространственных координат. Итак, редуцированный гамильтониан вместе со скобками Дирака дает уравнения

$$\tilde{g}_{ij,0} = \{\tilde{g}_{ij}, H_{\text{reduced}}\}_D = -\left(\delta^{kl}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}^{kl} \right) \frac{\delta Q}{\delta \tilde{\pi}^{kl}},$$

$$\tilde{\pi}^{ij}{}_{,0} = \{\tilde{\pi}^{ij}, H_{\text{reduced}}\}_D = \left(\delta^{kl}_{ij} - \frac{1}{3}\tilde{g}_{ij}\tilde{g}^{kl}\right)\frac{\delta Q}{\delta \tilde{g}_{kl}} + \frac{1}{3}\left(\tilde{g}^{ij}\tilde{\pi}^{kl} - \tilde{g}^{kl}\tilde{\pi}^{ij}\right)\frac{\delta Q}{\delta \tilde{\pi}^{kl}},$$

где

$$\frac{\delta Q}{\delta \tilde{\pi}^{kl}} = \frac{\partial Q}{\delta \tilde{\pi}^{kl}} = \frac{8\tilde{\pi}_{kl}}{3Qt^2},$$

$$\frac{\delta Q}{\delta \tilde{g}_{kl}} = \frac{4}{3Q}\left(t^{-2}2\tilde{\pi}^i_l\tilde{\pi}^{lj} + t^{-\frac{1}{3}}\tilde{R}^{ij}\right) + \frac{2}{3t^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{Q_{|lk}}{Q^2} - 2\frac{Q_{,k}Q_{,l}}{Q^3}\right)\left(\tilde{g}^{il}\tilde{g}^{kj} + \tilde{g}^{lj}\tilde{g}^{ki} - 2\tilde{g}^{ij}\tilde{g}^{kl}\right).$$

(Последняя формула получается после некоторых усилий.) В итоге, после подстановки найденных вариационных производных в уравнения движения, получаем

$$\tilde{g}_{ij,0} = -\frac{8Q}{3t^2}\tilde{\pi}_{ij},$$

$$\tilde{\pi}^{ij}{}_{,0} = \frac{8}{3t^2Q}\tilde{\pi}^i_l\tilde{\pi}^{lj} + \frac{4}{3t^{1/3}Q}\left(\tilde{R}^{ij} - \frac{1}{3}\tilde{g}^{ij}\tilde{R}\right) - \left(\frac{4}{3t^{1/3}Q}\right)_{|lk}\left(\tilde{g}^{il}\tilde{g}^{jk} - \frac{1}{3}\tilde{g}^{ij}\tilde{g}^{kl}\right).$$

Этот ответ надо сравнить с тем, который получится при учете наших калибровочных условий прямо в исходных гамильтоновых уравнениях ($N^i = 0$):

$$g_{ij,0} = \frac{2N}{\sqrt{g}}\left(\pi_{ij} - g_{ij}\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\pi^{ij}{}_{,0} = -N\sqrt{g}\left(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\right) + \sqrt{g}\left(N^{|ij} - g^{ij}N^{|m}{}_{|m}\right) +$$
$$+\frac{N}{\sqrt{g}}\left(\pi\pi^{ij} - 2\pi^{ik}\pi^j_k\right) - \frac{g^{ij}}{2}\frac{N}{\sqrt{g}}\left(\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2\right).$$

Из первого уравнения можно вывести

$$\tilde{g}_{ij,0} = -\frac{1}{2}NQ\tilde{g}_{ij} + \frac{2N}{t}\tilde{\pi}^{ij} - \frac{2}{3t}\tilde{g}_{ij}.$$

Далее, найдем лагранжев множитель из условия совместимости калибровочного условия с гамильтоновой динамикой

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \{\xi, \int N\mathcal{H}d^3x\} = 0,$$

$$1 + \{P, \int N\mathcal{H}d^3x\} = 0, \quad \text{или} \quad N\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q} = 1,$$

$$N = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}\right)^{-1} = -\frac{4}{3tQ}.$$

Тогда, в конечном итоге, получаем

$$\tilde{g}_{ij,0} = -\frac{8}{3t^2Q}\tilde{\pi}_{ij}.$$

Проверка второго уравнения проводится подобным образом, вычисления здесь длиннее.

Приняв $N^i = 0$ мы, фактически, использовали еще одну калибровку, нарушив свободу преобразований пространственных координат. Если вести доказательство в общем случае, то может показаться, что наш выбор времени неудачен, так как гамильтониан выглядит как интеграл от скаляра, а не от скалярной плотности. Однако, дело в том, что выбранная нами калибровка несколько ограничивает и произвол в координатных преобразованиях, так как мы фиксируем $\sqrt{g}$. В конце концов, оказывается

$$H_{\text{reduced}} = \int \left(tN^i{}_{|i} - 1\right) Q d^3x + \int N^i \left(-2\tilde{g}_{ik}\tilde{\pi}^{kj}{}_{|j}\right) d^3x.$$

Иногда выбирают несколько отличные переменные

$$Q = \frac{1}{3}\ln g, \quad P = \pi, \quad \{Q(x), P(y)\} = \delta(x, y).$$

Если принять $Q = t$, то получается $g = \exp(3t)$.

При выборе внешнего времени для нахождения сопряженного к нему импульса приходится решать уже дифференциальное уравнение в частных производных. Оно часто называется уравнением Лихнеровича

$$\tilde{\Delta}\phi + \frac{1}{8}M\phi^{-7} - \frac{1}{8}\tilde{R}\phi - \frac{3}{8}t^2\phi = 0,$$

где $M = \mathrm{Sp}\pi^2$. Зато редуцированный гамильтониан может стать физически весьма осмысленной величиной, например, объемом 3-мерного пространства.

Задачи

В качестве упражнений можно предложить записать в обсуждаемых калибровках простейшие точные решения (Шварцшильда или Фридмана). Полезно также проделать выкладки, опущенные в тексте этой лекции.

Лекция 6. Асимптотически плоское пространство-время

Общая теория относительности довольно сложна по сравнению, скажем, с электродинамикой. Поэтому ее изучение привязывается к свойствам отдельных решений или их классов. Решение Шварцшильда является одним из таких основных точных решений. Оно отвечает нашим интуитивным (ньютоновским) представлениям об изолированной системе масс. Родственными являются решения Рейсснера-Нордстрема и Керра, геометрия которых усложнена наличием электрического заряда или момента вращения. Удаляясь от системы масс мы попадаем в область слабого поля гравитации. Это не означает, однако, стремления к нулю всех компонент метрического тензора. При исчезновении гравитации мы предполагаем, что окажемся в хорошо знакомом мире специальной теории относительности (СТО), то есть, в пространстве Минковского. Небольшая разница состоит в том, что мы привыкли описывать пространство СТО в ортогональных галилеевых координатах, в которых метрика пространства-времени имеет всегда один и тот же вид. Трудность предельного перехода от ОТО к СТО заключается в его двойной природе. С одной стороны, к нулю должна стремиться кривизна пространства-времени (все компоненты тензора Римана или все его инварианты). С другой стороны, произвольные координаты должны переходить в галилеевы. Итак, при удалении от исходной системы масс на пространственную бесконечность мы должны, постепенно и одновременно, наблюдать исчезновение и кривизны, и общей ковариантности.[1] В самом простом виде, граничные условия вы-

[1] Конечно, дело не в том, что нельзя переписать СТО в криволинейных координатах (не одного только пространства, а пространства-времени), а скорее в том, что этот язык был бы для нас непривычен.

глядят так

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \to 0.$$

Но важным для дальнейшего является не только наличие стремления разности двух метрик к нулю, а и его скорость. Само решение Шварцшильда предлагает ту же самую скорость убывания, что и известное кулоновское решение в электродинамике. Опыт показывает, что увеличить эту скорость с помощью преобразований координат не удается. (Однако, можно ее уменьшить, сохраняя при этом предыдущее граничное условие.) Поэтому мы будем в дальнейшем предполагать, что

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = O(r^{-1}).$$

Нетрудно заметить, что дифференцирование по пространственным координатам (галилеевым, то есть, тем, в которых метрика Минковского имеет привычный вид) ускоряет убывание еще на одну степень расстояния от центра. Последнее свойство предполагает степенной характер зависимости от расстояния, что исключает волновой характер асимптотики. Действительно, обычно предполагается, что пространственная бесконечность лежит на бесконечном расстоянии в пространственноподобном направлении и гравитационные волны туда еще не дошли. (То есть, мы предполагаем, что в бесконечном прошлом гравитационные волны еще не существовали.) Радиальные координатные волны, преобразования координат, осциллирующие по радиусу, исключаются граничными условиями вида

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = O(r^{-1}), \quad g_{\mu\nu,\alpha} = O(r^{-2}).$$

Эти условия и мы примем в качестве определения асимптотически-плоского пространства-времени в ОТО.

Теперь будут разрешены только те преобразования координат, которые не испортят принятых граничных условий. Во-первых, к ним, очевидно, относятся преобразования Пуанкаре как сохраняющие вид метрики Минковского. Ясно, конечно, что в своем первозданном виде они выглядят чересчур жесткими для ОТО, они хороши только на бесконечности. Необходимая гибкость достигается добавлением супертрансляций (ничего общего с суперсимметрией!)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + \xi^{\mu}(x^{\alpha}).$$

Супертрансляции должны сохранять граничные условия не в силу того, что они точно удовлетворяют уравнениям Киллинга, а просто в силу наложенных на них граничных условий (условий убывания на пространственной бесконечности)

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = O(r^{-1}).$$

Тогда сами функции могут быть порядка на бесконечности, или даже иметь логарифмически растущее поведение. Для простоты, как это обычно принято, мы будем считать, что логарифмы в главной асимптотике отсутствуют

$$\xi^{\mu} = O(1), \quad \xi^{\mu}_{,\alpha} = O(r^{-1}), \quad \xi^{\mu}_{,\alpha\beta} = O(r^{-2}), \ldots$$

При переводе граничных условий для метрики и для допустимых координатных преобразований на язык гамильтонова формализма мы получаем

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O(r^{-1}), \quad g_{ij,k} = O(r^{-2}), \quad \pi^{ij} = O(r^{-2}), \ldots$$

$$N = A_k x^k + O(1), \quad N^i = \omega_{ik} x^k + O(1), \quad N_{,k} = O(r^{-1}) = N^i_{,k}, \ldots$$

(Здесь, в отличие от предыдущего, нужны только инфинитезимальные преобразования Лоренца.)

Возникает неудобство, связанное с тем, что трансляции из группы Пуанкаре утонули в более общих супертрансляциях. Интересно (и полезно для дальнейшего), что положение можно исправить, разделяя функции пространственных координат на четные и нечетные при инверсии (разумеется, нас интересуют только асимптотики на бесконечности)

$$f^{+} = \frac{1}{2}(f(x^i) + f(-x^i)), \quad f^{-} = \frac{1}{2}(f(x^i) - f(-x^i)).$$

Можно заметить, проделав преобразование Пуанкаре над решением Шварцшильда,

$$g'_{\mu\nu}(x'^{\gamma}) = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} \Lambda^{\beta}{}_{\nu} g_{\alpha\beta}(x^{\delta}), \quad \text{где} \quad x'^{\gamma} = \Lambda^{\gamma}{}_{\delta} x^{\delta} + a^{\gamma},$$

например, буст

$$\Lambda^{0'}{}_{0} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \ \Lambda^{0'}{}_{j} = \Lambda^{j'}{}_{0} = -\Lambda^{j}{}_{0'} = -\Lambda^{0}{}_{j'} = -\beta\gamma m^j,$$

$$m^j m^j = 1, \ \Lambda^{j'}{}_{k} = \Lambda^{k}{}_{j'} = (\gamma - 1) m^j m^k + \delta^{kj} = \Lambda^{k}{}_{j'} = \Lambda^{j}{}_{k'},$$

$$g_{ik} = \delta_{ik} + \frac{M}{8\pi r}\frac{\delta_{ik} + 2\beta^2\gamma^2 m_i m_k}{(1+\beta^2\gamma^2(mn)^2)^{1/2}}\left[1 - \frac{t}{r}\frac{\beta\gamma^2(mn)}{1+\beta^2\gamma^2(mn)^2}\right] +$$
$$+\frac{M^2}{8^3\pi^2 r^2}\frac{3\delta_{ik} - \beta^2\gamma^2 m_i m_k}{1+\beta^2\gamma^2(mn)^2} + O(r^3),$$

что в общем (с точки зрения СТО) случае асимптотики четных и нечетных функций отличаются на один порядок

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O^+(r^{-1})+, O^-(r^{-2}) \quad g_{ij,k} = O^{(-)}(r^{-2}) + O^+(r^{-3}),$$
$$\pi^{ij} = O^-(r^{-2}) + O^+(r^{-3}), \quad \pi^{ij}_{,k} = O^+(r^{-3}) + O^-(r^{-4}),$$
$$N = A_k x^k + a + O^-(1) + O^+(r^{-1}), \quad N^i = \omega_{ik}x^k + b^i + O^-(1) + O^+(r^{-1}),$$
$$N_{,k} = O^+(r^{-1}) + O^-(r^{-2}) = N^i_{,k}. \tag{18}$$

Эти граничные условия, впервые предложенные Редже и Тейтельбоймом[13] (1974), оказываются оптимальными для реализации в гамильтоновом формализме ОТО алгебры генераторов группы Пуанкаре. Заметим, что они также согласованы с уравнениями движения.

Итак, будем исходить из вариационного принципа, сохраняя при этом все возникающие поверхностные члены. Наше действие до сих пор имело вид

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x(\pi^{ij}g_{ij,0} - N\mathcal{H} - N^i\mathcal{H}_i), \tag{19}$$

теперь проверим, согласуется ли этот вид с принятыми граничными условиями, или требуется изменить действие на некоторый поверхностный интеграл. Как мы уже видели раньше, в общем случае вариация действия в теории поля будет содержать некоторый поверхностный вклад вида

$$\oint (A^\alpha_i \delta\phi_\alpha) dS^i.$$

Вариационный принцип Гамильтона требует, чтобы действие имело экстремальное значение тогда и только тогда, когда выполняются уравнения движения. Это значит, что возникшие поверхностные члены должны обратиться в нуль вследствие граничных условий задачи. У нас, в принципе, имеется три независимые возможности:

- вариации полей равны нулю на границе, так как значения полей там фиксируются (как функции пространственных координат и времени);

- коэффициенты при вариациях полей обращаются в нули, это, так называемые, естественные граничные условия для данного функционала;
- можно изменить действие на поверхностный интеграл, тогда естественные граничные условия также изменяются.

В нашем случае, когда граница удалена на бесконечность и поверхностные интегралы являются несобственными, обращение этих интегралов в ноль часто является результатом совместных усилий — к нулю стремятся и вариации полей и их коэффициенты, вместе давая нужную асимптотику. К тому же свою роль играют и условия четности, так например, $n^i = x^i/r$ – нечетная функция, поэтому

$$\oint f_i^+ dS^i \equiv \oint f_i^+ n^i dS = 0.$$

(Мы выбираем 2-границу в виде сферы.)

Редже и Тейтельбойм первыми записали общий вид вариации действия (19):

$$\delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{d}{dt} \int \pi^{ij} \delta g_{ij} d^3x + \int \left(\left(-\pi^{ij}_{,0} - \frac{\delta H}{\delta g_{ij}} \right) \delta g_{ij} + \left(g_{ij,0} - \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} \right) \delta \pi^{ij} \right) d^3x + \right.$$

$$\left. + \oint G^{ijkl} \left(N \delta g_{ij|k} - N_{,k} \delta g_{ij} \right) dS^l + \oint \left(2N_k \delta \pi^{kl} + (2N^k \pi^{jl} - N^l \pi^{jk} \right) dS^l \right].$$

Рассмотрим сначала не самые общие граничные условия (18), которые соответствуют интерпретации гамильтониана как генератора произвольного преобразования из группы Пуанкаре, а их упрощенный вариант

$$A_k = 0, \quad a = 1, \quad \omega_{ik} = 0, \quad b^i = 0.$$

Гамильтониан при этом будет иметь обычный смысл генератора временнóй эволюции. В поверхностном интеграле вариации действия останутся тогда ненулевые члены следующего вида

$$\oint \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \left(\delta g_{ij} \right)_{,k} dS_l,$$

или

$$\delta \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i}) dS^i.$$

Из последнего выражения очевидно, что мы можем избавиться от нежелательного вклада в вариацию действия, добавляя к гамильтониану поверхностный интеграл:

$$H = \int (N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i) d^3x + \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i}) dS^i.$$

До работы Редже и Тейтельбойма дискуссия о том, почему и когда необходимо добавлять этот или другой поверхностный интеграл, продолжалась около 15 лет. Участниками спора были Арновитт, Дезер, Мизнер; Дирак; Хиггс; Швингер; ДеВитт и другие.

Оказывается, что и при более общих граничных условиях (18) можно подобрать поверхностный интеграл, согласованный с вариационным принципом. Это означает, что обобщенный гамильтониан, имеющий вид

$$H = \int (N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i)d^3x - P_\mu\alpha^\mu + \frac{1}{2}M_{\alpha\beta}\beta^{\mu\nu}, \quad \beta^{\mu\nu} = -\beta^{\nu\mu},$$

где

$$\alpha^0 = a,\ \alpha^i = b^i,\ \beta^{0i} = A_i\ \beta^{ik} = \omega_{ik},$$

$$P^0 = \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i})dS^i, \quad P^i = -\oint 2\pi^{ij}dS_j,$$

$$M^{0k} = \oint \left[x^k(g_{ij,j} - g_{jj,i}) - g_{kj} + \delta_{kj}g_{ii}\right]dS_j,\ M^{ik} = 2\oint (x^k\pi^{ij} - x^i\pi^{kj})dS_j,$$

будет способен, при соответствующем выборе констант α^μ, $\beta^{\mu\nu}$ генерировать любое инфинитезимальное преобразование группы Пуанкаре на бесконечности. При этом скобка Пуассона[2] двух гамильтонианов друг с другом дает алгебру Пуанкаре

$$\{H(\beta^\mu_\nu x^\nu + \alpha^\mu + \ldots), H(\tilde{\beta}^\mu_\nu x^\nu + \tilde{\alpha}^\mu + \ldots)\} = H(\tilde{\tilde{\beta}}{}^\mu_\nu x^\nu + \tilde{\tilde{\alpha}}{}^\mu + \ldots),$$

где многоточия обозначают супертрансляции, а параметры в правой части получаются из параметров левой части в соответствии с обычной алгеброй диффеоморфизмов

$$\tilde{\tilde{\beta}}{}^\mu_\nu x^\nu + \tilde{\tilde{\alpha}}{}^\mu + \ldots \equiv \tilde{\tilde{\xi}}{}^\mu = [\xi, \tilde{\xi}]^\mu \equiv [\beta^\mu_\nu x^\nu + \alpha^\mu + \ldots, \tilde{\beta}^\mu_\nu x^\nu + \tilde{\alpha}^\mu + \ldots] =$$

$$= \xi^\nu\tilde{\xi}^\mu{}_{,\nu} - \tilde{\xi}^\nu\xi^\mu{}_{,\nu}.$$

Выражения для генераторов группы Пуанкаре инвариантны относительно супертрансляций при принятых граничных условиях (18).

[2]Как известно, скобка Пуассона двух функционалов определяется в теории поля формулой, использующей вариационные производные (для локальных функционалов, то есть, интегралов от локальных функций от полей, это производные Эйлера-Лагранжа)

$$\{F, G\} = \int\int \left(\frac{\delta F}{\delta\phi_A(x)}\frac{\delta G}{\delta\phi_B(y)}\{\phi_A(x), \phi_B(y)\}\right)d^3xd^3y.$$

В более общих случаях она может включать в себя и дополнительные поверхностные вклады, по-прежнему удовлетворяя при этом основным требованиям (антисимметрии и тождеству Якоби).

Калибровки в открытых пространствах

После наложения калибровок дивергенции перестают быть дивергенциями, по выражению АДМ, и поверхностный интеграл становится ненулевым редуцированным гамильтонианом. Мы могли видеть это уже на примере из линеаризованной (не самодействующей) гравитации. Если решать уравнение связи $\mathcal{H} = 0$ во втором порядке теории возмущений, то в калибровке АДМ

$$-\Delta g^T \equiv (g_{ij,j} - g_{jj,i})_{,i} = (\pi_{ij}^{TT})^2 + \frac{1}{4}(g_{ij,k}^{TT})^2.$$

В общем случае, разумеется, редуцированный гамильтониан получается в теории возмущений в виде ряда из нелокальных функционалов.

Необходимости в использовании калибровок, явно зависящих от времени, таким образом, больше нет (в этом пункте Арновитт, Дезер, Мизнер[10] ошиблись). Нет уже, однако, и такой возможности. В самом деле, все подлежащие варьированию локальные, то есть, образованные из полей g_{ij}, π^{ij} и конечного числа их производных, величины убывают на бесконечности, а время должно оставаться постоянным на всей гиперповерхности состояния. В то же время оно должно изменяться при переходе с одной гиперповерхности на другую. Если попытаться использовать калибровки, рассмотренные для замкнутых миров, как например,

$$\sqrt{g} = t, \quad \text{или} \quad \frac{2}{3}\frac{\pi}{\sqrt{g}} = t,$$

то с граничными условиями (18) совместимы только условия

$$\sqrt{g} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{2}{3}\frac{\pi}{\sqrt{g}} = 0.$$

Сохранение этих калибровок во времени дает условия на лагранжевы множители. Их проще получить прямо из уравнений движения, например,

$$(\sqrt{g})_{,0} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{ij}g_{ij,0} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\left(2N^k_{|k} - \frac{N\pi}{\sqrt{g}}\right),$$

следовательно, необходимо

$$N = 2\sqrt{g}N^k_{|k}/\pi.$$

Отсюда видно, что эта калибровка не позволяет сразу определить лагранжев множитель N, а только связывает его с другими лагранжевыми множителями N^i. Видно также, что мы не можем взять эти последние множители равными нулю, ибо граничные условия требуют для N ненулевой асимптотики на бесконечности.

Другая калибровка, аналогичным образом, приводит к дифференциальному уравнению

$$\dot{\pi} = 0 \leftrightarrow \Delta N - \left(\frac{R}{2} + \frac{3}{4}\frac{\mathrm{Sp}\pi^2}{g}\right) N = 0.$$

Здесь нужно искать решение с заданной ненулевой асимптотикой на бесконечности (в простейшем случае $N \to 1$). Что касается N^i, то в этом случае можно принять их равными нулю. Уравнение связи $\mathcal{H} = 0$ следует решить относительно сопряженной к π переменной $\phi = \frac{1}{3}\ln(g)$ и подставить ответ в поверхностный интеграл для получения редуцированного гамильтониана. Разумеется, в общем случае речь здесь не может идти о конструктивных формулах, а только о теоремах существования. Мы удовлетворимся тем, что как было показано, наложение калибровок в асимптотически плоском мире не приводит к нулевым значениям лагранжевых множителей, и следовательно, не приводит к “замороженному формализму.”

Литература

[1] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. М. Наука, 1984.

[2] Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. М. Наука, 1969.

[3] Дирак П.А.М. Лекции по квантовой механике. Мир, М. 1968. (См. также в книге Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики, Наука, М. 1979.)

[4] Ландау Л.Д., Лифшиц И.М. Теория поля. М. Наука, 1973.

[5] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Д. Гравитация. В 3-х томах. Мир, М. 1977.

[6] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М. Наука, 1964.

[7] Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Том 1. Алгебра и учение о перенесении. ОНТИ, М.–Л. 1939. Том 2. Геометрия. ГИИЛ, М. 1948.

[8] Kuchař K. *Journal of Mathematical Physics*, **17** (1977) 777-791; 792-800; 801-820; **18** (1978) 1589-1597.

[9] Хокинг С., Эллис Д. Крупномасштабная структура пространства-времени. Мир, М. 1977.

[10] Arnowitt R., Deser S. and Misner C. In: Gravitation, an Introduction to Current Research. Ed. L. Witten, N.Y.–London, 1963. (Перевод: Эйнштейновский сборник 1967, с. 233. М. Наука, 1967)

[11] Ланцош К. Вариационные принципы механики. Мир, М. 1965.

[12] Einstein A., Grossman M. Z. Math. und Phys. **62** (1913) 225-261. (Перевод: Эйнштейн А. Собрание научных трудов, т.2, стр. 265. М. Наука, 1969.)

[13] Regge T. and Teitelboim C. *Annals of Physics* **88** (1974) 286-318.

ПРОГРАММА

спецкурса кафедры квантовой теории и физики высоких энергий

"Гамильтонов подход в теории гравитации"

4 курс, 8 семестр, 20 часов

1. Физические идеи и математический аппарат общей теории относительности (ОТО). Основы римановой геометрии гиперповерхностей. Уравнения Гаусса-Вейнгартена и Гаусса-Петерсона-Кодацци. 3+1-разложение тензоров.

2. Ковариантное определение времени с помощью однопараметрических семейств гиперповерхностей. Параметризация метрики согласно Арновитту, Дезеру и Мизнеру (АДМ). 3+1-представление тензора кривизны Римана. Преобразование действия Гильберта-Эйнштейна к переменным АДМ.

3. Построение гамильтониана: определение сопряженных импульсов, первичных и вторичных связей. Гамильтоновы уравнения движения и постановка задачи Коши. Степени свободы гравитационного поля.

4. Линеаризация вблизи плоской фоновой метрики. Калибровка АДМ и положительность гамильтониана в первом приближении. Наложение калибровочных (координатных) условий в полной теории. Необходимость явной зависимости от времени калибровочных условий для замкнутых геометрий. Примеры калибровок в замкнутых мирах.

5. Асимптотически-плоское пространство-время и простейшие граничные условия. Роль граничных (поверхностных) членов в вариационных задачах. Понятие о естественных граничных условиях. Метод Редже-Тейтельбойма для нахождения поверхностных членов в гамильтониане. Реализация асимптотической алгебры Пуанкаре.

6. Особенности наложения калибровок в открытых пространствах. Невозможность выражения времени через канонические переменные в асимптотически-плоском случае. Примеры калибровочных условий.

7. Геометрический смысл алгебры связей ОТО. Параметризованные теории поля на фиксированном фоне. Диффеоморфизмы пространства-времени и их каноническая реализация.

8. Введение в космологию Фридмана. Противоречивость ньютоновской картины мира. "Дифференциальное уравнение Бога" в ОТО. Решения Эйнштейна, де Ситтера, Фридмана. Эффект Хаббла. Теория горячей Вселенной Гамова. Микроволновое фоновое излучение. Калибровочные теории и температурная история Вселенной.

9. Недостатки стандартной космологической модели: проблемы горизонта, однородности, плоскостности и др. Возврат к решению де Ситтера. Роль скалярных полей в калибровочных моделях. Понятие об эффективном потенциале, его вид в простейших моделях и температурная зависимость. Сценарий Гуса, его достижения и недостатки. Новый инфляционный сценарий. Хаотическое раздувание.

10. Проблема начальных условий для инфляционного сценария. Квантовая космология: квантово-механический подход к динамике Вселенной. Уравнение Уилера-де Витта. Граничные условия Хартла-Хокинга и Виленкина. Интерпретация волновой функции Вселенной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация. "Мир", 1977, гл.21.

2. Н.В.Мицкевич, А.П.Ефремов, А.И.Нестеров. Динамика полей в общей теории относительности. "Энергоатомиздат", 1985.

4. А.Д.Долгов, Я.Б.Зельдович, М.В.Сажин. Космология ранней Вселенной. Изд-во МГУ, 1988.

5. С.Хокинг. От большого взрыва до черных дыр. Краткая история времени. "Мир", 1990.

6. В.Н.Пономарев, А.О.Барвинский, Ю.Н.Обухов. Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. "Энергоатомиздат", 1985.

7. А.Д.Линде. Физика элементарных частиц и инфляционная космология. "Наука", 1990.

Автор программы ст. препод. к.ф.-м.н. В.О.СОЛОВЬЕВ