# Независимая от граничных условий алгебра в формализме Аштекара

**В.О. Соловьев**[1]
Институт физики высоких энергий,
142 284, Протвино, Московская область

**Аннотация**

Мы рассматриваем алгебру генераторов пространственных диффеоморфизмов и калибровочных преобразований в каноническом формализме общей теории относительности в переменных Аштекара и АДМ. Используется предложенная ранее модификация полевой скобки Пуассона поверхностными членами, которая позволяет рассматривать в качестве допустимых все локальные функционалы. Показано, что замыкание указанной алгебры можно обеспечить еще до наложения граничных условий путем выбора поверхностных членов в выражениях генераторов. При этом существенно, что на границе пуассонова структура для переменных Аштекара отлична от канонической.

## 1 Введение

Обычно принято считать, что в гамильтоновом формализме теории поля могут иметь смысл только скобки Пуассона между так называемыми "дифференцируемыми" функционалами [1, 2]. Так называют функционалы, вариация которых не содержит граничного вклада. Однако, как видно из дальнейшего, это ограничение не является необходимым. Так в работах [3, 4, 5], исходя из разных подходов, предлагалось выйти за рамки такого ограничения и распространить гамильтонов формализм на более широкие классы функционалов, а значит и на большее число задач. С этой целью были предложены различные модификации традиционной формулы для скобки Пуассона, получаемые путем добавления к ней граничных членов. Авторы работ [4, 5] использовали для этих членов нелокальную формулу, указывающую на наличие взаимодействия между полем Кортевега-де Фриза в бесконечно удаленных друг от друга точках границы одномерного пространства. Напротив, в статье [3], где обсуждалась гидродинамика идеальной жидкости, рассматривались только локальные граничные члены возникающие, например, в результате интегрирования полных дивергенций.

Недавно мы показали [6, 7], что подход, предложенный в работе [3], может быть обобщен на случай произвольных локальных функционалов, зависящих от любого конечного числа пространственных производных. После добавления к стандартному выражению

[1] e–mail: vosoloviev@mx.ihep.su

для скобки Пуассона формально бесконечной, но на самом деле всегда обрывающейся суммы дивергенций определенного вида получается, что новая скобка удовлетворяет тождеству Якоби и требованиям антисимметрии и замкнутости строго, а не с точностью до граничных членов. Интересно, что всем этим стандартным требованиям можно удовлетворить еще до наложения каких бы то ни было граничных условий. Таким образом, новая формула определяет алгебру скобок Пуассона для всех локальных функционалов, а не только для "дифференцируемых", как в стандартном подходе. Это позволяет надеяться на возможность применения этого результата к различным физическим проблемам. Что касается граничных условий, то нам представляется, что они могут быть приняты во внимание на следующем шаге, подобно калибровкам, учет которых сводится к лишь к последующей редукции исходной пуассоновой структуры.

В этой работе мы используем новое определение скобки Пуассона [6, 7] для анализа канонического формализма общей теории относительности в переменных Аштекара и АДМ. Будет показано, что известные алгебры могут быть реализованы здесь независимо от выбора граничных условий. Особенностью подхода Аштекара является использование преобразования переменных, которое при учете поверхностных членов отличается от канонического [8]. Подобная неканоничность недавно обсуждалась также в работе [9].

Содержание данной работы состоит в следующем.

Напомнив основные понятия гамильтонова формализма теории гравитации в переменных Арновитта, Дезера и Мизнера (АДМ) [10], мы анализируем замены переменных ведущие к формализму Аштекара. После этого излагается мотивировка введения новой формулы для скобок Пуассона в теории поля. Ее применение первоначально иллюстрируется в подходе АДМ. Преобразование к переменным Аштекара ведет к появлению необычного поверхностного вклада, который нарушает каноничность. Однако, именно этот вклад позволяет сохранить алгебру генераторов, найденную первоначально в переменных АДМ.

## 2 Формализм АДМ

Пространство-время может быть понято как 4-многообразие, возникающее в результате временно́й эволюции геометрии 3-мерной пространственноподобной гиперповерхности. При этом динамическими переменными являются поля *риманова* метрического тензора $\gamma_{ij}(x^k)$, так что $\gamma_{ij}dx^i dx^j \geq 0$, и тензорной плотности сопряженных импульсов $\pi^{ij}(x^k)$, которая линейно связана с тензором внешней кривизны гиперповерхности $K_{ij}(x^k)$

$$\pi^{ij} = -\sqrt{\gamma}(K^{ij} - \gamma^{ij}K), \tag{2.1}$$

где $\gamma^{ij}$ есть обратная к $\gamma_{ij}$ матрица, $K = \gamma^{ij}K_{ij}$, $\gamma = \det|\gamma_{ij}|$, латинские индексы соответствуют пространственным координатам и пробегают значения $1, 2, 3$. Знак суммирования везде опускается.

Направление эволюции в каждой точке гиперповерхности задается времениподобным 4-вектором $N^\alpha$, компоненты которого $N(x^k, t)$, $N^i(x^k, t)$ должны удовлетворять неравенству

$$N^2 \geq \gamma_{ij}N^i N^j. \tag{2.2}$$

Динамические уравнения порождаются гамильтонианом

$$H = \int\limits_{\Omega} \left( N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i \right) d^3x, \tag{2.3}$$

который является линейной комбинацией связей

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left( \gamma R + \frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2 \right), \quad \mathcal{H}_i = -2\pi^j_{i|j}, \tag{2.4}$$

и канонической скобкой Пуассона

$$\left\{ \gamma_{ij}(x), \pi^{kl}(y) \right\} = \delta^{kl}_{ij} \delta(x,y) \equiv \frac{1}{2} \left( \delta^k_i \delta^l_j + \delta^k_j \delta^l_i \right) \delta(x,y), \tag{2.5}$$

так что

$$\dot{\gamma}_{ij} = \{\gamma_{ij}, H\}, \quad \dot{\pi}^{ij} = \{\pi^{ij}, H\}. \tag{2.6}$$

Для явного восстановления 4-мерной геометрии пространства-времени в произвольных координатах $X^\alpha$, $\alpha = 0,1,2,3$ следует задать дополнительно 4 функции, связывающие их с координатами $(x^k, t)$

$$X^\alpha = e^\alpha(x^k, t). \tag{2.7}$$

Если $t_1$ соответствует началу, а $t_2$ — концу временной эволюции, то при каждом фиксированном значении $t_1 \le t \le t_2$ уравнения (2.7) определяют вложение соответствующей этому значению $t$ гиперповерхности в пространство-время. Тогда функции $N(x^k,t), N^i(x^k,t)$ надо понимать как компоненты разложения 4-вектора $N^\alpha$

$$N^\alpha = \dot{e}^\alpha = N n^\alpha + N^i e^\alpha_i, \tag{2.8}$$

по базису $(n^\alpha, e^\alpha_i)$, сопоставленному гиперповерхности $t = \mathrm{const}$ в каждой ее точке, причем,

$$e^\alpha_i = \frac{\partial e^\alpha}{\partial x^i}, \quad n_\alpha e^\alpha_i = 0, \quad n^\alpha n_\alpha = -1. \tag{2.9}$$

Найдя компоненты вектора единичной нормали $n^\alpha$ из (2.8) мы получаем искомую метрику пространства-времени

$$g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + e^\alpha_i e^\beta_j \gamma^{ij}. \tag{2.10}$$

Подробное обсуждение ковариантного гамильтонова формализма можно найти в работах Кухаржа[11].

Уравнения (2.6) пригодны не только для описания временной эволюции, но и, например, для описания преобразований пространственных координат на фиксированной гиперповерхности при $N = 0$

$$\dot{\gamma}_{ij} = \mathcal{L}_{\vec{N}} \gamma_{ij} = N_{i|j} + N_{j|i}, \tag{2.11}$$

$$\dot{\pi}^{ij} = \mathcal{L}_{\vec{N}} \pi^{ij} = -N^i{}_{|k} \pi^{kj} - N^j{}_{|k} \pi^{ik} + \left( N^k \pi^{ij} \right)_{|k}, \tag{2.12}$$

где $\mathcal{L}_{\vec{N}}$ - производная Ли по направлению векторного поля $N^i$. Разумеется, переменная $t$ в этом случае никак не может считаться временем.

Отметим, что для гамильтониана, как генератора преобразований координат $(x^k, t)$, задаваемых функциями $N, N^i$, имеет место пуассонова алгебра

$$\left\{H(N, N^i), H(M, M^j)\right\} = H(L, L^k), \tag{2.13}$$

где

$$L = N^i M_{,i} - M^i N_{,i}, \qquad L^k = \gamma^{ki}(NM_{,i} - MN_{,i}) + N^i M^k_{\ ,i} - M^i N^k_{\ ,i}. \tag{2.14}$$

На "локальном" языке эти равенства обычно представляют в виде

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= \left(\gamma^{ik}(x)\mathcal{H}_k(x) + \gamma^{ik}(y)\mathcal{H}_k(y)\right) \delta_{,i}(x, y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_k(y)\} &= \mathcal{H}_i(y)\delta_{,k}(x, y) + \mathcal{H}_k(x)\delta_{,i}(x, y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} &= \mathcal{H}(x)\delta_{,i}(x, y). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Благодаря этим соотношениям обеспечивается "независимость от пути"[12], то есть, независимость получаемой в результате интегрирования уравнений движения (2.6) 4-геометрии от выбора функций $N(x^k, t), N^i(x^k, t)$ при фиксированных начале и конце эволюции. Соотношения (2.14) в общем случае не задают алгебры Ли, так как в них входит динамическая переменная $\gamma^{ki}$. Однако для преобразований пространственных координат, то есть, при $N = M = 0$ алгебра Ли имеет место

$$\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} = H\left([N, M]^k\right), \tag{2.16}$$

где

$$[N, M]^k = N^i M^k_{\ ,i} - M^i N^k_{\ ,i}. \tag{2.17}$$

Естественно ожидать, что соотношения (2.14), (2.16) не зависят от выбора переменных и сохранятся при их заменах. Одну из таких замен мы и намерены рассмотреть в следующей главе.

В случае, когда гиперповерхность имеет границу (в том числе и бесконечно удаленную), все вышесказанное требует более детального рассмотрения. Гамильтониан может отличаться от (2.3) на поверхностные интегралы по границе, как например, в работах [1, 13]. Мы перейдем к этому случаю позже.

# 3 Преобразование Аштекара

Вместо метрического тензора $\gamma_{ij}$ введем триады $E^a_i$, так что $\gamma_{ij} = E^a_i E^a_j$, $a = 1, 2, 3$. Обратные к триадам матрицы будем обозначать $E^i_a$, то есть, $E^a_i E^j_a = \delta^j_i$, $E^a_i E^i_b = \delta^a_b$. Поскольку $\gamma^{kj}\gamma_{ji} = \gamma^{kj} E^a_j E^a_i = \delta^k_i$, то обратную матрицу можно получить поднимая индекс с помощью $\gamma^{kj}$, $E^k_a = E^{ka} = \gamma^{kj} E^a_j$. Положение внутреннего индекса $a$ безразлично. Нетрудно также убедиться, что

$$\gamma^{ij} = E^{ia} E^{ja}, \qquad \gamma = \det|E^a_i E^a_j| = (\det|E^a_i|)^2 = E^2. \tag{3.1}$$

Введем сопряженные к полям триад импульсы $\pi^i_a$

$$\left\{E^a_i(x), \pi^j_b(y)\right\} = \delta^j_i \delta^a_b \delta(x, y), \tag{3.2}$$

которые легко связать с импульсами $\pi^{ij}$

$$\pi^{ij} = \frac{1}{4}\left(\pi^i_a E^j_a + \pi^j_a E^i_a\right). \tag{3.3}$$

При этом оказывается, что скобки Пуассона для переменных АДМ частично изменяются

$$\left\{\gamma_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \delta^{kl}_{ij}\delta(x,y), \qquad \left\{\gamma_{ij}(x), \gamma_{kl}(y)\right\} = 0, \tag{3.4}$$

но

$$\left\{\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\mathcal{M}^{jl} + \gamma^{il}\mathcal{M}^{jk} + \gamma^{jk}\mathcal{M}^{il} + \gamma^{jl}\mathcal{M}^{ik}\right)\delta(x,y), \tag{3.5}$$

где

$$\mathcal{M}^{ij} = \frac{1}{4}\left(E^{ia}\pi^j_a - E^{ja}\pi^i_a\right) = \mathcal{M}^{[ij]}. \tag{3.6}$$

Сохранение соответствия пуассоновых структур требует наложения трех связей $\mathcal{M}^{ij} = 0$, что обеспечивает также сохранение числа степеней свободы (симметричный тензор $\gamma_{ij}(x)$ определялся в каждой точке 6 числами, а матрица триады $E^a_i(x)$ содержит 9 независимых компонент). Можно эквивалентным образом представить связи в виде

$$J^{ab} \equiv J^{[ab]} = 0, \quad \text{где} \quad J^{ab} = \mathcal{M}^{ij}E^a_i E^b_j. \tag{3.7}$$

При этом связи находятся в инволюции

$$\left\{\mathcal{M}^{ij}(x), \mathcal{M}^{kl}(y)\right\} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\mathcal{M}^{jl} - \gamma^{il}\mathcal{M}^{jk} - \gamma^{jk}\mathcal{M}^{il} + \gamma^{jl}\mathcal{M}^{ik}\right)\delta(x,y). \tag{3.8}$$

Разумеется, выбор $(E^a_i, \pi^i_a)$ в качестве канонических переменных не является единственным. С точки зрения предстоящего перехода к переменным Аштекара удобнее использовать переменные $\left(\tilde{E}^{ia}, K^a_i\right)$, так что

$$\tilde{E}^{ia} = EE^{ia}, \quad K^a_i = K_{ij}E^{ja} + E^{-1}E_{ib}J^{ab}, \tag{3.9}$$

тогда

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), K^b_j(y)\right\} = \frac{1}{2}\delta^i_j\delta^{ab}\delta(x,y), \tag{3.10}$$

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), \tilde{E}^{jb}(y)\right\} = 0, \qquad \left\{K^a_i(x), K^b_j(y)\right\} = 0. \tag{3.11}$$

В работах [14] Аштекаром было предложено замечательное преобразование, которое позволило представить плотность гравитационного гамильтониана в виде полинома четвертой степени по каноническим переменным. Наше изложение следует, в основном, работе [15]. Преобразование Аштекара аналогично каноническим преобразованиям классической механики вида

$$q^A \to q^A, \quad p_A \to p_A + \frac{\partial F(q)}{\partial q_A}. \tag{3.12}$$

В данном случае вместо порождающей преобразование функции $F(q)$ используется функционал

$$F = F\left[\tilde{E}^{ia}\right] = \int\limits_\Omega \tilde{E}^{ia}\Gamma^a_i d^3x, \tag{3.13}$$

где

$$\Gamma_i^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}E_{jc}E^{jb}_{\ |i}. \tag{3.14}$$

а вместо частной производной по координате — вариационная производная Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\delta F}{\delta \tilde{E}^{ia}} = \Gamma_i^a. \tag{3.15}$$

Если не принимать во внимание поверхностные члены, то такое преобразование будет каноническим. Аштекаром одновременно вводится комплексная параметризация, так что новой переменной является связность

$$A_i^a = iK_i^a + \Gamma_i^a, \tag{3.16}$$

причем

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), A_j^b(y)\right\} = \frac{i}{2}\delta_j^i\delta^{ab}\delta(x,y), \tag{3.17}$$

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), \tilde{E}^{jb}(y)\right\} = 0, \qquad \left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} = 0. \tag{3.18}$$

Замена переменных в гамильтониане приводит, с точностью до поверхностных членов, к анализу которых мы перейдем в следующих главах, к выражению

$$H = \int\limits_\Omega \left(\mathcal{N}\epsilon^{abc}\tilde{E}^{ia}\tilde{E}^{jb}F_{ij}^c + N^i 2i\tilde{E}^{ja}F_{ij}^a + \hat{\xi}^a 2\mathcal{D}_i\tilde{E}^{ia}\right)d^3x. \tag{3.19}$$

Здесь

$$\mathcal{D}_i\tilde{E}^{ia} \equiv i\epsilon^{abc}J^{bc} \equiv i\epsilon^{abc}E_{ib}E_{jc}\mathcal{M}^{ij}, \tag{3.20}$$

а новая ковариантная производная $\mathcal{D}_i$ определяется формулой

$$\mathcal{D}_i\lambda^{ka} = \lambda^{ka}_{\ |i} + \epsilon^{abc}A_i^b\lambda^{kc}. \tag{3.21}$$

Кривизна связности $A_i^a$ находится из соотношения

$$\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j - \mathcal{D}_j\mathcal{D}_i\right)\lambda^a = \epsilon^{abc}F_{ij}^b\lambda^c, \tag{3.22}$$

так что,

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + \epsilon^{abc}A_i^bA_j^c. \tag{3.23}$$

Отметим, что в этой работе, как и в [8], связи и гамильтониан отличаются множителем 2, а скобка Пуассона — множителем 1/2 от приведенных в публикациях [14]. Уравнения движения при этом совпадают. Мы предпочитаем пользоваться данными обозначениями, поскольку тогда лагранжев множитель $N^i$ совпадает с множителем АДМ формализма, а $\mathcal{N} = E^{-1}N$.

Приведем для сравнения с АДМ формализмом (2.15) и алгебру генераторов (3.19)

$$\{H(\mathcal{N}, N^i, \hat{\xi}^a), H(\mathcal{M}, M^j, \hat{\eta}^b)\} = H(\mathcal{L}, L^k, \hat{\lambda}^c), \tag{3.24}$$

$$\mathcal{L} = N^k\mathcal{M}_{,k} - \mathcal{M}N^k_{\ ,k} - M^k\mathcal{N}_{,k} + \mathcal{N}M^k_{\ ,k}, \tag{3.25}$$

$$L^k = \tilde{E}^{ka}\tilde{E}^{ja}\left(\mathcal{N}\mathcal{M}_{,j} - \mathcal{M}\mathcal{N}_{,j}\right) + N^jM^k_{\ ,j} - M^jN^k_{\ ,j}, \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}^c &= i\epsilon^{cab}\hat{\xi}^a\hat{\eta}^b + \\ &+ \frac{i}{2}F_{jk}^c(N^jM^k - M^jN^k) + \epsilon^{cab}F_{jk}^a\tilde{E}^{kb}N^j\mathcal{M}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Далее в этой работе нас будет интересовать ситуация, когда поверхностные члены играют существенную роль. Будет показано, что в этом случае преобразование Аштекара отлично от канонического, а именно

$$\left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} \neq 0. \tag{3.28}$$

# 4 Поверхностные члены и новая формула для скобок Пуассона

Напомним, что с геометрической точки зрения скобка Пуассона образована следующим образом

$$\{F, G\} = \mathsf{d}G \lrcorner (\mathsf{d}F \lrcorner \Psi), \tag{4.1}$$

где $\mathsf{d}$ – дифференциал (1-форма), $\Psi$ – пуассонов бивектор (скобка Схоутена-Нейенхейса его с самим собой равна нулю), знак $\lrcorner$ обозначает операцию внутреннего умножения (здесь 1-форм на бивектор и на 1-вектор).

В теории поля обычно предполагается [2],

- что $F, G$ – локальные функционалы,

$$F = \int\limits_\Omega f\left(\phi_A(x), \partial_i\phi_A, \partial_i\partial_j\phi_A, \ldots\right) d^n x \equiv \int\limits_\Omega f\left(\phi_A^{(J)}(x)\right) d^n x, \tag{4.2}$$

- что их дифференциал определяется вариационной производной Эйлера-Лагранжа,[3]

$$\mathsf{d}F = \int\limits_\Omega \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \delta\phi_A d^n x, \tag{4.3}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_A} = \frac{\partial f}{\partial \phi_A} - D_i \frac{\partial f}{\partial \phi_{A,i}} + D_i D_j \frac{\partial f}{\partial \phi_{A,ij}} + \ldots = (-1)^{|J|} D_J \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}}, \tag{4.4}$$

- что коэффициенты $\hat{I}_{AB}$ пуассонова бивектора,

$$\Psi = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \frac{\delta}{\delta \phi_A} \wedge \hat{I}_{AB} \frac{\delta}{\delta \phi_B} d^n x, \tag{4.5}$$

  определяются из фундаментальных скобок полей, которые также локальны, то есть,

$$\{\phi_A(x), \phi_B(y)\} = \hat{I}_{AB} \delta(x, y), \tag{4.6}$$

[2] В этой статье мы стараемся избегать мультииндексных обозначений $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $|J| = j_1 + \ldots + j_n$, $\partial_J = \frac{\partial^{|J|}}{\partial^{j_1} x^1 \ldots \partial^{j_n} x^n}$, которые являются основными в работах [6, 7]. Они приводятся только в этой главе, параллельно со стандартными, для иллюстрации возникающей экономии места.

[3] мы обозначаем $D_i$ полную частную производную $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi^{J+i} \frac{\partial}{\partial \phi^J}$ причем $D_J = {D_1}^{i_1} \ldots {D_n}^{i_n}$.

- что внутреннее произведение 1-формы и, например, 1-вектора (интегрированием по частям их всегда можно привести к виду, называемому каноническим) есть

$$\alpha \rfloor \psi = \left(\int_\Omega \alpha_A \delta\phi_A d^n x\right) \rfloor \left(\int_\Omega \psi_B \frac{\delta}{\delta\phi_B} d^n x\right) = \int_\Omega \alpha_A \psi_A d^n x. \tag{4.7}$$

Получающаяся в результате, согласно (4.1), скобка Пуассона дается формулой

$$\{F, G\} = \int_\Omega \frac{\delta F}{\delta\phi_A} \hat{I}_{AB} \frac{\delta G}{\delta\phi_B} d^n x, \tag{4.8}$$

где в простейшем случае канонических переменных $\phi_A = (q_\alpha, p_\alpha)$ оператор $\hat{I}_{AB}$ есть постоянная антисимметричная матрица

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & \delta^\alpha_\beta \\ -\delta^\alpha_\beta & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

а в общем случае $\hat{I}_{AB}$ является антисимметричным дифференциальным оператором любого конечного порядка с коэффициентами, зависящими от полей $\phi_A$ и их производных (также произвольного конечного порядка),

$$\hat{I}_{AB} = -\hat{I}^*_{BA}, \tag{4.10}$$

где

$$\hat{I}_{AB} = I^{(0)}_{AB} + I^{(i)}_{AB} D_i + I^{(ij)}_{AB} D_i D_j + \ldots = I^K_{AB} D_K, \tag{4.11}$$

$$\hat{I}^*_{AB} = I^{(0)}_{BA} - D_i \circ I^{(i)}_{BA} + D_i D_j \circ I^{(ij)}_{BA} - \ldots = (-1)^{|K|} D_K \circ I^K_{BA}. \tag{4.12}$$

Приведенная формула для скобки Пуассона (4.8) имеет в теории поля строгое обоснование (в рамках так называемого формального вариационного исчисления [17, 18, 19]) при “хороших” граничных условиях, то есть, когда любые интегралы от полных дивергенций обращаются в нуль.

Однако, в физике, и в частности в гамильтоновом формализме теории гравитации, приходится иметь дело с такими задачами, где это условие не выполняется. Например, при рассмотрении асимптотически плоского пространства-времени гамильтониан (2.3) должен быть дополнен поверхностными интегралами специального вида [1, 13]. Оказывается, тем не менее, что здесь можно использовать стандартную формулу для скобки Пуассона, если ограничиться классом “дифференцируемых” гамильтонианов, не содержащих поверхностных интегралов в своих вариациях. При этом удается сохранить определение дифференциала через производную Эйлера-Лагранжа. Работа [16] была посвящена доказательству того, что при асимптотических граничных условиях на пространственной бесконечности, принятых в [1], скобка Пуассона не выводит из класса “дифференцируемых” функционалов. Непосредственной проверкой можно убедиться и в справедливости тождества Якоби при условиях работ [1, 13].

В то же время, в указанных работах остаются неясности. Например, вычисляя скобки Пуассона генераторов АДМ формализма по формуле (4.8) при граничных условиях работ [1, 13] мы получим снова аналогичные генераторы, *включающие нужные* *поверхностные члены*, алгебра замыкается аналогично (2.13), (2.14). С другой стороны, нахождение скобки по таким формулам, как

$$\{H(N), H(M)\} = \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega N(x)M(y)\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} d^3x d^3y \tag{4.13}$$

с помощью алгебры связей (2.15) не позволяет получить нужных поверхностных интегралов. Причина в том, что возникающие в промежуточных вычислениях интегралы типа

$$\int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \xi(x)\eta(y) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \delta(x, y), \tag{4.14}$$

однозначно определены лишь при обращении в нуль всех поверхностных интегралов, а при граничных условиях работ [1, 13] это не так.

В середине 80-х годов появились публикации [3, 4, 5], выходящие за рамки описанного класса "дифференцируемых" функционалов. В них рассматривались функционалы, вариации которых могли иметь поверхностные составляющие при определенных граничных условиях. Тогда с неизбежностью оказывалось, что стандартная формула для скобок Пуассона неприменима, для нее нарушалось тождество Якоби. Были предложены новые формулы, отличающиеся от традиционной поверхностными членами.

Недавно нам удалось показать [7], что возможен подход к нетривиальным граничным задачам, основанный на расширении формального вариационного исчисления [17, 18, 19] на полные дивергенции. В этом подходе скобка Пуассона, определенная из общих геометрических соображений формулой (4.1), удовлетворяет стандартным требованиям: антисимметрии, тождеству Якоби и замкнутости области ее определения $\mathcal{A}$, так что $F, G \in \mathcal{A} \to \{F, G\} \in \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — множество всех локальных функционалов, независимо от выбора граничных условий.

Новая формула для скобки Пуассона возникает как результат обобщения всех трех ее "составляющих": дифференциала, пуассонова бивектора и операции спаривания. Это необходимо, если мы хотим сохранить все поверхностные члены в выражениях функционалов, $m$-форм и $m$-векторов. Дифференциал локального функционала будет теперь его *полной* вариацией, без отбрасывания граничных вкладов

$$\mathsf{d}F = \int\limits_\Omega f'_A \delta\phi_A d^n x, \tag{4.15}$$

где вводится производная Фреше

$$f'_A = \frac{\partial f}{\partial \phi_A} + \frac{\partial f}{\partial \phi_{A,i}} D_i + \frac{\partial f}{\partial \phi_{A,ij}} D_i D_j + \ldots = \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_J. \tag{4.16}$$

Часто удобно использовать симметризованные ковариантные производные вместо частных

$$f'_A = \frac{\partial f}{\partial \phi_A} + \frac{\partial f}{\partial (\nabla_i \phi_A)} \nabla_i + \frac{\partial f}{\partial (\nabla_{(i} \nabla_{j)} \phi_A)} \nabla_{(i} \nabla_{j)} + \ldots \tag{4.17}$$

Полезна также запись через высшие эйлеровы операторы [17]

$$\mathsf{d}F = \int\limits_{\Omega} \left( E^0_A(f)\delta\phi_A + D_i \left( E^{1,i}_A(f)\delta\phi_A \right) + D_i D_j \left( E^{2,ij}_A(f)\delta\phi_A \right) + \ldots \right) d^n x =$$
$$= \int\limits_{\Omega} D_J \left( E^J_A(f)\delta\phi_A \right) d^n x, \qquad E^J_A(f) = (-1)^{|J|+|K|} \binom{K}{J} D_{K-J} \frac{\partial f}{\partial \phi^{(K)}_A}, \tag{4.18}$$

причем оператором нулевого порядка $E^0_A$ является обычная вариационная производная Эйлера-Лагранжа (4.4). Третий способ записи использует формальный прием, сводящий интеграл по конечной области $\Omega$ к интегралу по всему бесконечному пространству $\mathbb{R}^n$

$$F = \int\limits_{\Omega} f d^n x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta_\Omega f d^n x, \tag{4.19}$$

где

$$\theta_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in \Omega \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}. \tag{4.20}$$

Ниже мы будем опускать у этой функции знак $\Omega$, а у интеграла по всему пространству — знак $\mathbb{R}^n$. Получаем

$$\mathsf{d}F = \int E^0_A(\theta f)\delta\phi_A d^n x = \int \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \delta\phi_A d^n x, \tag{4.21}$$

причем оказывается, что

$$E^0_A(\theta f) = \frac{\delta F}{\delta \phi_A} = \theta E^0_A(f) - \theta_{,i} E^{1,i}_A(f) + \theta_{,ij} E^{2,ij}_A(f) + \ldots = (-1)^{|J|} D_J \theta E^J_A(f). \tag{4.22}$$

Новая *полная* вариационная производная, для которой мы используем то же самое обозначение, что обычно применяется для производной Эйлера-Лагранжа, содержит в себе информацию не только о подынтегральном выражении $f$, но и об области интегрирования $\Omega$, благодаря функции $\theta$.

Вторым шагом является пересмотр определения бивектора, который также может быть понят как учет характеристической функции $\theta$ области $\Omega$. При этом изменяется определение сопряженного оператора, используемое при "перебрасывании" производных с одного аргумента $\delta$-функции на другой

$$\hat{I}_{AB}(x)\delta(x,y) = \hat{I}^*_{BA}\delta(x,y). \tag{4.23}$$

Например,

$$\theta(x) D_x \delta(x,y) = -\theta(y) D_y \delta(x,y) - \theta' \delta(x,y), \tag{4.24}$$

то есть, если

$$\hat{I} = \theta D, \tag{4.25}$$

то

$$\hat{I}^* = -\theta D - \theta' = -D \circ \theta. \tag{4.26}$$

Учет подобных членов позволяет, в частности, избежать неоднозначности и получать согласованные ответы при вычислениях по формулам типа (4.13) и (4.8). В качестве антисимметричного, в смысле нового определения сопряженности, оператора следует, очевидно, использовать выражение $1/2(\hat{I} - \hat{I}^*)$.

Наконец, операция спаривания $\rfloor$ (внутреннего умножения) 1-форм и бивекторов (в общем случае — $m$-векторов), или наоборот, 1-векторов и 2-форм (в общем случае — $m$-форм), также определяется заново, через след двух дифференциальных операторов. Если

$$\hat{A} = a_J D_J \equiv a + a_i D_i + a_{ij} D_i D_j + \ldots, \tag{4.27}$$

$$\hat{B} = b_K D_K \equiv b + b_k D_k + b_{kl} D_k D_l + \ldots, \tag{4.28}$$

то

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\hat{A}\hat{B}\right) &= ab + a_i \cdot D_i b + D_k a \cdot b_k + D_k a_i \cdot D_i b_k + D_k D_l a \cdot b_{kl} + D_k D_l a_i \cdot D_i b_{kl} + \\ &+ a_{ij} \cdot D_i D_j b + D_k a_{ij} \cdot D_i D_j b_k + D_k D_l a_{ij} \cdot D_i D_j b_{kl} + \ldots = D_K a_J \cdot D_J b_K \end{aligned} \tag{4.29}$$

Тогда в качестве обобщения формулы (4.7) имеем:

$$\alpha \rfloor \psi = \left( \int_\Omega \hat{\alpha}_A \delta \phi_A d^n x \right) \rfloor \left( \int_\Omega \hat{\psi}_B \frac{\delta}{\delta \phi_B} d^n x \right) = \int_\Omega \mathrm{Tr}\left(\hat{\alpha}_A \hat{\psi}_A\right) d^n x. \tag{4.30}$$

В результате трех сделанных выше шагов по обобщению определений дифференциала (4.15), сопряженного оператора (4.23) и спаривания (4.30) и исходя из наиболее общего геометрического определения (4.1), как показано в работе [7], мы приходим к новой формуле для скобки Пуассона. В дальнейших расчетах будет использоваться ее представление через производные Фреше

$$\{F, G\} = \int \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}_{AB} g'_B\right) d^n x, \tag{4.31}$$

где $\hat{I}_{AB}$ — антисимметричный оператор, причем $\theta$-функции из оператора $\hat{I}_{AB}$ выносятся за знак следа. То есть, если

$$\hat{I}_{AB} = \theta \hat{I}^{\langle 0 \rangle}_{AB} + \theta_{,i} \hat{I}^{\langle i \rangle}_{AB} + \theta_{,ij} \hat{I}^{\langle ij \rangle}_{AB} + \ldots = D_J \theta \hat{I}^{\langle J \rangle}_{AB}, \tag{4.32}$$

то

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \int_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle 0 \rangle}_{AB} g'_B\right) d^n x - \int_\Omega D_i \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle i \rangle}_{AB} g'_B\right) d^n x + \int_\Omega D_i D_j \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle ij \rangle}_{AB} g'_B\right) - \ldots = \\ &= (-1)^{|J|} \int_\Omega D_J \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle J \rangle}_{AB} g'_B\right) d^n x. \end{aligned} \tag{4.33}$$

Можно записать результат также через высшие эйлеровы производные

$$\{F, G\} = (-1)^{|L|} \int_\Omega D_{J+K+L} \left( E^J_A(f) \hat{I}^{\langle L \rangle} E^K_B(g) \right) d^n x, \tag{4.34}$$

или в виде двойного интеграла с *полными* вариационными производными (4.22)

$$\{F, G\} = \int \int \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi_B(y)} \{\phi_A(x), \phi_B(y)\} d^n x d^n y, \tag{4.35}$$

вычисление которого должно проводиться по правилам, изложенным в работе [6].

# 5 Поверхностные члены в АДМ формализме

В качестве первого примера вычисления скобки Пуассона по формуле (4.31) рассмотрим скобку для функционалов, известных как генераторы пространственных диффеоморфизмов в асимптотически-плоском пространстве-времени,

$$\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} = \int_\Omega \mathrm{Tr}\left(h'_{\gamma_{ij}}(N^i)h'_{\pi^{ij}}(M^j) - h'_{\gamma_{ij}}(M^j)h'_{\pi^{ij}}(N^i)\right) d^3x, \tag{5.1}$$

где

$$H(N^i) = \int_\Omega N^i \mathcal{H}_i d^3x + \oint_{\partial\Omega} 2\pi_i^j N^i dS_j \equiv \int \pi^{ij}(N_{i|j} + N_{j|i})d^3x. \tag{5.2}$$

Вариация такого функционала имеет вид

$$\delta H = \int \left((N_{i|j} + N_{j|i})\delta\pi^{ij} + 2\pi^{ij}\delta(\gamma_{ik}(N^k{}_{,j} + \Gamma^k_{jm}N^m))\right) d^3x. \tag{5.3}$$

Воспользовавшись известной формулой

$$\delta\Gamma^k_{jm} = \frac{1}{2}\gamma^{kn}\left(\delta\gamma_{nj|m} + \delta\gamma_{nm|j} - \delta\gamma_{jm|n}\right), \tag{5.4}$$

находим

$$\delta H(N^i) = \int_\Omega \left((N_{i|j} + N_{j|i})\delta\pi^{ij} + (\pi^{ik}N^j{}_{|k} + \pi^{kj}N^i{}_{|k})\delta\gamma_{ij} + N^k\pi^{ij}(\delta\gamma_{ij})_{|k}\right) d^3x, \tag{5.5}$$

откуда видно, что производные Фреше по каноническим переменным равны:

$$h'_{\pi^{ij}}(N^i) = N_{i|j} + N_{j|i}, \tag{5.6}$$

$$h'_{\gamma_{ij}}(N^i) = \pi^{ik}N^j{}_{|k} + \pi^{kj}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{ij}\nabla_k, \tag{5.7}$$

где $\nabla_k$ обозначает ту же ковариантную производную, согласованную с метрикой $\gamma_{ij}$, что и вертикальная черта. Таким образом, здесь производная Фреше генератора по импульсам является функцией, а производная по метрике — дифференциальным оператором. В отличие от вычислений, проводимых для нахождения производной Эйлера-Лагранжа, здесь нет необходимости интегрировать по частям.

Вычислим след

$$\mathrm{Tr}\left(h'_{\gamma_{ij}}(N^i)h'_{\pi^{ij}}(M^j)\right) = \left(\pi^{ik}N^j{}_{|k} + \pi^{kj}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{ij}\nabla_k\right)(M_{i|j} + M_{j|i}). \tag{5.8}$$

Симметричные по $N, M$ члены не дадут вклада в скобку Пуассона, и после переобозначения индексов получаем

$$\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} = \int_\Omega 2\pi^{ij}\left((N^k{}_{|j}M_{i|k} - M^k{}_{|j}N_{i|k}) + (N^kM_{i|jk} - M^kN_{i|jk})\right) d^3x. \tag{5.9}$$

Далее, изменим порядок вторых ковариантных производных согласно соотношению

$$M_{i|jk} = M_{i|kj} + R_{mijk}M^m, \tag{5.10}$$

тогда вклад

$$2\pi^{ij} R_{mijk} \left( N^k M^m - M^k N^m \right) \tag{5.11}$$

обращается в нуль, в силу свойств симметрии тензора Римана, следовательно

$$\left\{ H(N^i), H(M^j) \right\} = \int\limits_{\Omega} 2\pi^{ij} \left( N^k M_{i|k} - M^k N_{i|k} \right)_{|j} d^3x = H([N, M]^k). \tag{5.12}$$

Мы видим, что генераторы $H(N^i)$ реализуют представление алгебры диффеоморфизмов 3-мерной гиперповерхности. При этом мы не задавали каких-либо специальных граничных условий, то есть, при обычном подходе эти генераторы не являются "дифференцируемыми" функционалами. С нашей точки зрения, это означает лишь то, что стандартной формулой для скобки Пуассона нельзя пользоваться в общем случае. Если попытаться формально вычислить ту же самую скобку применяя обычную формулу (4.8), то результат будет отличаться от нашего ответа поверхностным интегралом

$$\Delta \left\{ H(N^i), H(M^j) \right\} = -\oint\limits_{\partial\Omega} \pi^{ij} \left( N^k (M_{i|j} + M_{j|i}) - M^k (N_{i|j} + N_{j|i}) \right) dS_k. \tag{5.13}$$

Естественно, что в общем случае тождество Якоби для скобки (4.8) также не будет выполняться.

$$\left\{ \{H(N^i), H(M^j)\}, H(L^k) \right\} + \left\{ \{H(L^i), H(N^j)\}, H(M^k) \right\} + \left\{ \{H(M^i), H(L^j)\}, H(N^k) \right\} \neq 0.$$

Условием выполнения тождества Якоби для стандартной скобки Пуассона будет здесь требование, чтобы $N^i, M^j, L^k$ были векторами Киллинга метрики $\gamma_{ij}$ на границе $\partial\Omega$ или чтобы они были касательными к границе. Очевидно, в первом случае новая и старая формулы дадут один и тот же результат, хотя функционалы $H(N^i)$, $H(M^j)$ и останутся "недифференцируемыми"

$$\delta H = \int\limits_{\Omega} \left( E^0_{\gamma_{ij}}(h) \delta\gamma_{ij} + E^0_{\pi^{ij}}(h) \delta\pi^{ij} \right) d^3x + \oint\limits_{\partial\Omega} N^k \pi^{ij} \delta\gamma_{ij} dS_k. \tag{5.14}$$

# 6 Поверхностные члены в формализме Аштекара

Естественно ожидать, что переход от переменных АДМ к переменным Аштекара не должен существенно повлиять на алгебру пространственных диффеоморфизмов (5.12). Однако, имеются по меньшей мере две особенности этого преобразования, которые нам хотелось бы обсудить подробнее.

Во-первых, выше уже отмечалось, что переход к триадам сохраняет прежние скобки Пуассона лишь на поверхности связей $\mathcal{M}^{ij} = 0$, а следовательно, чтобы получить полную (off-shell) структуру пуассоновой алгебры, необходимо проделать дополнительные вычисления.

Во-вторых, как также упоминалось ранее, преобразование Аштекара канонично лишь с точностью до поверхностных членов и важно понять, какую роль в алгебре играет неканонический вклад.

Поскольку речь идет о применении новой формулы для скобки Пуассона, мы считаем оправданным подробное изложение технических деталей расчетов. Общее доказательство инвариантности этой формулы при заменах зависимых переменных пока не опубликовано, и поэтому явная демонстрация этой инвариантности на конкретном примере не будет излишней.

Итак, начнем с проверки того, как изменится соотношение (2.16) при переходе к триадам. Поскольку

$$\left\{\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \mathcal{C}^{ijkl}_{mn}\mathcal{M}^{mn}\delta(x,y), \tag{6.1}$$

где

$$\mathcal{C}^{ijkl}_{mn} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\delta^{jl}_{mn} + \gamma^{il}\delta^{jk}_{mn} + \gamma^{jk}\delta^{il}_{mn} + \gamma^{jl}\delta^{ik}_{mn}\right), \tag{6.2}$$

то возникает дополнительный вклад в найденную ранее скобку, который обращается в нуль на поверхности связей $\mathcal{M}^{mn} = 0$,

$$\begin{aligned}
\Delta\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} &= \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(h'_{\pi^{ij}}(N^i)\mathcal{C}^{ijkl}_{mn}\mathcal{M}^{mn}h'_{\pi^{kl}}(M^j)\right)d^3x = \\
&= \int\limits_\Omega (N_{i|j} + N_{j|i})\mathcal{C}^{ijkl}_{mn}\mathcal{M}^{mn}(M_{k|l} + M_{l|k})d^3x = \\
&= \int\limits_\Omega (N^k{}_{|m} + N_m{}^{|k})(M_{k|n} + M_{n|k})\mathcal{M}^{mn}d^3x.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Эта добавка может обратиться в нуль и вне поверхности связей, если хотя бы одно из векторных полей $N^i(x)$, $M^j(x)$ удовлетворяет уравнению Киллинга, то есть, сохраняет метрику $\gamma_{ij}(x)$ в области $\Omega$.

Для вычисления скобки непосредственно в новых переменных, например в переменных $(E^a_i, \pi^i_a)$, не всегда необходимо использовать явные выражения генераторов через эти переменные. Часто достаточно бывает выразить вариации старых полей через новые

$$\delta\gamma_{ij} = E^a_i\delta E^a_j + E^a_j\delta E^a_i, \tag{6.4}$$

$$\delta\pi^{ij} = \frac{1}{4}\left(E^{ia}\delta\pi^{ja} + \pi^{ja}\delta E^{ia} + E^{ja}\delta\pi^{ia} + \pi^{ia}\delta E^{ja}\right). \tag{6.5}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\delta H &= \int\limits_\Omega \left(h'_{\gamma_{ij}}\delta\gamma_{ij} + h'_{\pi_{ij}}\delta\pi^{ij}\right)d^3x = \int\limits_\Omega \left(\tilde{h}'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + \tilde{h}'_{\pi^{ia}}\delta\pi^{ia}\right)d^3x = \\
&= \int\limits_\Omega \left(h'_{\gamma_{kj}}(\gamma_{kj})'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + h'_{\pi_{kj}}(\pi^{kj})'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + h'_{\pi_{kj}}(\pi^{kj})'_{\pi^{ia}}\delta\pi^{ia}\right)d^3x,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

откуда находим

$$\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(N^i) = h'_{\pi_{ij}}(N^i)\frac{1}{2}E^{ja} = \frac{1}{2}(N_{i|j} + N_{j|i})E^{ja}, \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i) &= h'_{\gamma_{ij}}(N^i)2E_{ja} + h'_{\pi^{kl}}(N^i)\left(-\frac{1}{2}\right)\pi^{kb}E^{ib}E^{la} = \\
&= \left(\pi^{ik}N^l{}_{|k} + \pi^{kl}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{il}\nabla_k\circ\right)2E_{la} - \frac{1}{2}(N_{k|l} + N_{l|k})\pi^{kb}E^{ib}E^{la}.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

При этом

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(M^j)\right) &= \left(\pi^{ik}N^l{}_{|k} + \pi^{kl}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{il}\nabla_k\right)(M_{i|l} + M_{l|i}) - \\
&- \frac{1}{4}\pi^{kb}E^{ib}(N_k{}^{|j} + N^j{}_{|k})(M_{i|j} + M_{j|i}).
\end{aligned} \tag{6.9}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} &= \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(M^j) - \tilde{h}'_{E_{ia}}(M^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(N^j)\right) d^3x = \\
&= H([N,M]^k) + \int\limits_\Omega (N^k{}_{|m} + N_m{}^{|k})(M_{k|n} + M_{n|k})\mathcal{M}^{mn} d^3x,
\end{aligned} \tag{6.10}
$$

как следовало ожидать, ответ не изменился при этой замене переменных по сравнению с деформированной, согласно (6.1), (5.12), скобкой АДМ (6.3).

Аналогичным образом, рассмотрим переход к $\left(\tilde{E}^{ia}, K^a_i\right)$. Для этого воспользуемся (3.9) и легко проверяемым соотношением

$$
\pi^{ia} = 2E\left(E^{ia}E^{jb} - E^{ib}E^{ja}\right)K^b_j, \tag{6.11}
$$

тогда получаем

$$
\begin{aligned}
\delta E_{ia} &= \frac{1}{2E}(E_{ia}E_{jb} - 2E_{ja}E_{ib})\delta\tilde{E}^{jb}, \\
\delta\pi^{ia} &= 2E(E^{ia}E^{jb} - E^{ib}E^{ja})\delta K^b_j + \Big(2(K^b_j E^{ia} + K^c_k E^{kc}\delta^i_j\delta^{ab} - K^c_j E^{ic}\delta^{ab} - \\
&\quad - K^b_k E^{ka}\delta^i_j) + K^c_k E_{jb}(E^{ic}E^{ka} - E^{kc}E^{ia})\Big)\delta\tilde{E}^{jb}.
\end{aligned} \tag{6.12}
$$

Вычисления, аналогичные предыдущим, также подтверждают, что результат не меняется при выборе новых переменных.

Отметим, что до сих пор мы рассматривали алгебраические преобразования, то есть, не содержащие зависимости от производных полей. При переходе к переменным Аштекара

$$
\tilde{E}^{ia} \to \tilde{E}^{ia}, \quad K^a_i \to A^a_i = iK^a_i + \Gamma^a_i, \tag{6.13}
$$

это свойство уже не имеет места, ибо

$$
\Gamma^a_i = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\tilde{E}_{jc}\tilde{E}^{jb}{}_{|i}, \tag{6.14}
$$

где $\tilde{E}_{jc}$ – обратная к $\tilde{E}^{ib}$ матрица. Выразив вариации старых переменных через новые, получаем

$$
\delta K^a_i = -i\delta A^a_i + i(\Gamma^a_i)'_{\tilde{E}^{jb}}\delta\tilde{E}^{jb}, \tag{6.15}
$$

и, таким образом, для произвольного функционала

$$
\delta F = \int\limits_\Omega \left(f'_{\tilde{E}^{ia}}\delta\tilde{E}^{ia} + f'_{K^a_i}\delta K^a_i\right) d^3x = \int\limits_\Omega \left(\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}}\delta\tilde{E}^{ia} + \tilde{f}'_{A^a_i}\delta A^a_i\right) d^3x, \tag{6.16}
$$

где

$$\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}} = f'_{\tilde{E}^{ia}} + f'_{K_j^b}\left(\Gamma_j^b\right)'_{\tilde{E}^{ia}}, \tag{6.17}$$

$$\tilde{f}'_{A_i^a} = -if'_{K_i^a}. \tag{6.18}$$

Если бы это преобразование было каноническим (с точностью до множителя $i$), то скобка Пуассона в новых переменных определялась бы по формуле

$$\{F, G\} = \frac{i}{2}\int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}}\tilde{g}'_{A_i^a} - \tilde{f}'_{A_i^a}\tilde{g}'_{\tilde{E}^{ia}}\right) d^3x = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(f'_{\tilde{E}^{ia}}g'_{K_i^a} - f'_{K_i^a}g'_{\tilde{E}^{ia}}\right) d^3x +$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(f'_{K_j^b}(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}g'_{K_i^a} - f'_{K_i^a}g'_{K_j^b}(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}\right) d^3x. \tag{6.19}$$

Но в таком случае инвариантность скобки была бы нарушена

$$\Delta_1\{F, G\} = \int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(f'_{K_i^a}\hat{C}_{aibj}g'_{K_j^b}\right) d^3x, \tag{6.20}$$

где

$$\hat{C}_{aibj} = \frac{1}{2}\left((\Gamma_i^a)'_{\tilde{E}^{jb}} - \left[(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}\right]^*\right). \tag{6.21}$$

Мы видим, что предположение о каноничности переменных Аштекара ведет к неинвариантности скобки Пуассона. Но ранее было показано [8], еще с использованием стандартной формулы (4.8), что

$$\left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} = i\hat{C}_{aibj}(x)\delta(x, y) \neq 0, \tag{6.22}$$

а именно,

$$\left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} = i\left\{\Gamma_i^a(x), K_j^b(y)\right\} + i\left\{K_i^a(x), \Gamma_j^b(y)\right\} = \frac{i}{2}\Bigg(\left(\Gamma_i^a(x)\right)'_{\tilde{E}^{jb}} -$$
$$- \left(\Gamma_j^b(y)\right)'_{\tilde{E}^{ia}}\Bigg)\delta(x, y) = \frac{i}{2}\left(\left(\Gamma_i^a(x)\right)'_{\tilde{E}^{jb}} - \left[\left(\Gamma_j^b(x)\right)'_{\tilde{E}^{ja}}\right]^*\right)\delta(x, y). \tag{6.23}$$

Если не учитывать поверхностных членов, то производная Фреше от производной Эйлера-Лагранжа является симметричным оператором [17], следовательно, здесь мы получаем чисто поверхностный вклад. Из-за неканоничности переменных Аштекара возникает, таким образом, вторая поправка

$$\Delta_2\{F, G\} = \int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(\tilde{f}'_{A_i^a}\hat{C}_{aibj}\tilde{g}'_{A_j^b}\right) d^3x = -\int\limits_{\Omega} \mathrm{Tr}\left(f'_{K_i^a}\hat{C}_{aibj}g'_{K_j^b}\right) d^3x, \tag{6.24}$$

которая компенсирует первую. Новая формула для скобки Пуассона является инвариантной при замене $\left(\tilde{E}^{ia}, K_i^a\right) \to \left(\tilde{E}^{ia}, A_i^a\right)$, не исключая инвариантности и для поверхностных вкладов.

Инвариантность скобки позволяет использовать для вычислений алгебры генераторов различные переменные. Явные вычисления, исходящие из записи генераторов в формализме Аштекара, значительно более трудоемки, чем рассмотренные выше. Приведем для сравнения явное выражение генератора $H(N^i)$ в переменных Аштекара, наиболее краткий вывод которого дан в работе [20]

$$H(N^i) = 2i \int_\Omega N^k \tilde{E}^{ia} F^a_{ki} d^3x - 2i \oint_{\partial\Omega} \left(A^a_i - \Gamma^a_i\right)\left(\tilde{E}^{ia}N^k - \tilde{E}^{ka}N^i\right) dS_k -$$
$$- 2i \int_\Omega \left(N^i A^c_i - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\tilde{E}_{ib}\left(\tilde{E}^{ia}{}_{|k}N^k - \tilde{E}^{ka}N^i{}_{|k}\right)\right) \mathcal{D}_j \tilde{E}^{jc} d^3x. \tag{6.25}$$

В качестве примера вычислений, проводимых непосредственно в переменных Аштекара, рассмотрим скобку генераторов комплексных вращений триад. Вариация генератора имеет вид

$$\delta H(\hat{\xi}^a) = \delta \int_\Omega \hat{\xi}^a 2\mathcal{D}_i \tilde{E}^{ia} d^3x = \int_\Omega \left(h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a)\delta\tilde{E}^{jc} + h'_{A^c_j}(\hat{\xi}^a)\delta A^c_j\right) d^3x, \tag{6.26}$$

где

$$h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a) = 2\hat{\xi}^c\partial_j + 2\hat{\xi}^a\epsilon^{abc}A^b_j, \tag{6.27}$$
$$h'_{A^c_j}(\hat{\xi}^a) = -2\hat{\xi}^a\epsilon^{abc}\tilde{E}^{jb}. \tag{6.28}$$

Скобка Пуассона дается формулой

$$\{H(\hat{\xi}^a), H(\hat{\eta}^b)\} = \frac{i}{2}\int_\Omega \mathrm{Tr}\left(h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a)h'_{A^c_j}(\hat{\eta}^b) - h'_{A^c_j}(\hat{\xi}^a)h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\eta}^b)\right) d^3x +$$
$$+ i\int_\Omega \mathrm{Tr}\left(h'_{A^c_j}(\hat{\xi}^a)\hat{C}_{cjdk}h'_{A^d_k}(\hat{\eta}^b)\right) d^3x. \tag{6.29}$$

Здесь необходим явный вид неканонической поправки

$$\hat{C}_{aibj} = \theta_{,k}C^k_{aibj} = \theta_{,k}\frac{i}{4E}\left(\epsilon^{acb}\delta^k{}_j E_{ic} - \epsilon^{bca}\delta^k{}_i E_{jc} - \epsilon^{acd}E_{ib}E_{jc}E^{kd} + \epsilon^{bcd}E_{ja}E_{ic}E^{kd}\right). \tag{6.30}$$

В итоге получаем следующие соотношения

$$\{H(N^i), H(M^j)\} = H\left([N, M]^k\right) + H(\hat{\lambda}^a), \tag{6.31}$$
$$\{H(N^i), H(\hat{\xi}^a)\} = 0, \tag{6.32}$$
$$\{H(\hat{\xi}^a), H(\hat{\eta}^b)\} = H\left(i(\hat{\xi}\times\hat{\eta})^c\right), \tag{6.33}$$

где

$$[N, M]^k = N^i M^k{}_{,i} - M^i N^k{}_{,i}, \qquad (\hat{\xi}\times\hat{\eta})^c = \epsilon^{cab}\hat{\xi}^a\hat{\eta}^b, \tag{6.34}$$
$$\hat{\lambda}^a = \epsilon^{abc}E^{ib}E^{jc}\left(N^k{}_{|i} + N_i{}^{|k}\right)\left(M_{k|j} + M_{j|k}\right), \tag{6.35}$$

где поверхностные члены фиксированы, а граничные условия остаются полностью свободными.

Последнее слагаемое в формуле (6.31) пропущено в аналогичной формуле (5.3) работы [20], что впрочем не было существенно для основного результата. Причина этой неточности, разумеется, в том, что переход от канонических скобок для переменных АДМ к деформированным скобкам (6.1) не является заменой переменных и сохраняет скобки Пуассона лишь на поверхности связей $\mathcal{M}^{ij} = 0$.

# 7 Заключение

Выше мы показали, как новое определение скобок Пуассона позволяет изучать пуассоновы алгебры на более широком, чем обычно, классе функционалов. Здесь мы считаем допустимыми произвольные локальные функционалы, а не только "дифференцируемые", то есть, те, вариация которых не содержит вклада от границы. При этом оказывается, что можно найти генераторы, отличающиеся, вообще говоря, от связей поверхностными интегралами, такие, что их алгебра замыкается. Найденные выражения генераторов нельзя назвать новыми, поскольку они встречаются, например, при рассмотрении асимптотически-плоского пространства-времени [20]. Однако, новым является утверждение об их применимости в гораздо более общем случае, независимо от выбора граничных условий. В другой работе [21] мы обсуждаем критерий того, что локальный функционал может считаться допустимым гамильтонианом, то есть, генерировать обычные, а не в смысле обобщенных функций, уравнения движения. Применительно к данной работе это, более жесткое, ограничение не изменило бы найденной пуассоновой алгебры (6.31), (6.32), (6.33), а лишь потребовало бы касательности к границе векторов сдвига пространственных координат.

Настоящая работа ограничена обсуждением алгебры генераторов пространственных диффеоморфизмов и вращений триад, то есть, преобразований внутри одной и той же гиперповерхности. Что будет происходить при движении гиперповерхности в нормальном к ней направлении, можно ли включить генераторы этих движений в алгебру, подобную существующей для пространства без границы, или в случае асимптотически-плоского пространства, пока неясно. Для этого необходимо знать, существует ли поверхностный интеграл, который позволил бы замкнуть при произвольных граничных условиях более широкую алгебру, включающую генератор $H(\mathcal{N})$.

Автор благодарен рецензенту за критические замечания.

# Литература

[1] T. Regge and C. Teitelboim, *Ann. of Phys.* **88** (1974) 286.

[2] Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев, "Гамильтонов подход в теории солитонов", Наука, М., 1986 (English translation: L.A. Takhtajan, L.D. Faddeev, "Hamiltonian Method in Soliton Theory", Springer-Verlag, N.Y., 1987).

[3] D. Lewis, J. Marsden, R. Montgomery and T. Ratiu, *Physica D* **18** (1986) 391.

[4] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 183.

[5] В.А. Аркадьев, А.К. Погребков, М.К. Поливанов, *ДАН* **298** (1988) 324;
В.А. Аркадьев, А.К. Погребков, М.К. Поливанов, *ТМФ* **75** (1988) 170.

[6] V.O. Soloviev, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 5747.

[7] V.O. Soloviev, Boundary values as Hamiltonian variables II. Graded structures, Preprint IHEP 94-145, Protvino, 1994; q-alg/9501017.

[8] V.O. Soloviev, *Phys. Lett. B* **292** (1992) 30.

[9] L. Smolin, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6417.

[10] R. Arnowitt, S. Deser and Ch.W. Misner, In: "Gravitation, an Introduction to Current Research" (Ed. L. Witten) N.Y., 1963 (Имеется русский перевод: Эйнштейновский сборник 1967, Наука, М., 1967).

[11] K. Kuchař, *J. Math Phys.* **17**, 777; 792; 801; **18**, 158 (1977).

[12] C. Teitelboim, *Ann. Phys.* **79** (1973) 542 .

[13] В.О. Соловьев, *ТМФ* **65** (1985) 400 (English Translation: ).

[14] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2244; A. Ashtekar, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1587; A. Ashtekar, P. Mazur, C.G. Torre, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 2955.

[15] M. Henneaux, J.E. Nelson, C. Schomblond, *Phys. Rev.* **D39** (1989) 434.

[16] J.D. Brown, M. Henneaux, *J. Math. Phys.* **27** (1986) 489.

[17] P.J. Olver, "Applications of Lie Groups to Differential Equations" (Graduate texts in mathematics) Springer-Verlag, N.Y., 1986 (Имеется русский перевод: П. Олвер, "Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям", Мир, М., 1989).

[18] I. Dorfman, "Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations" John Wiley and Sons, N.Y., 1993.

[19] L. Dickey, "Soliton Equations and Hamiltonian Systems" World Scientific, Singapore, 1991.

[20] T. Thiemann, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 181.

[21] В.О. Соловьев, О различии между допустимыми и "дифференцируемыми" гамильтонианами. Препринт ИФВЭ ОТФ 96-86, Протвино, 1996, (направлено в Phys. Rev. D) (English translation: V.O. Soloviev, On the Difference between Admissible and "Differentiable" Hamiltonians, hep-th/9611212).