ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

на правах рукописи

Соловьев Владимир Олегович

Роль граничных условий в гамильтоновой динамике теории поля

01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Протвино

2004 г.

Оглавление

Введение

Понятие поля в современной теоретической физике является основным, и в широком смысле вся теоретическая физика сейчас может быть названа теорией поля. Гамильтонов формализм также вездесущ, объединяет своим языком абсолютно непохожие области физики и радует нас несомненным математическим очарованием. Чувство глубокого удовлетворения вызывает возможность немедленно переходить с его помощью от классической к квантовой теории, а также исследовать различные важные свойства физических систем, такие как симметрии, интегрируемость, устойчивость и др.

Гамильтонов формализм теории поля появляется в результате предельного перехода от распределенных систем с конечным числом степеней свободы к системам с бесконечным числом степеней свободы, перехода от суммирования к интегрированию. И гамильтониан, и скобки Пуассона в теории поля обычно выражаются интегралами по области пространства, т.е. по ее объему. Однако в физике бывают существенны не только объемные, но и граничные (поверхностные) интегралы. Примерами могут служить энергия поверхностного натяжения жидкости, точечные массы и заряды на концах открытой струны, энтропия черной дыры и многое другое.

Изложение гамильтонова формализма в стандартных учебниках ничего не говорит нам о том, как работать с этими граничными членами, какова их роль в гамильтониане. Шаг вперед в этом направлении был сделан в работе, написанной в 1974 году Редже и Тейтельбоймом [1], число цитирований ее за год постоянно возрастает. По сути дела была установлена связь между поверхностными членами в гамильтониане и граничными условиями, основанная на вариационном принципе и понятии "свободных граничных условий" [2]. Следующим шагом, по логике вещей, должен был стать учет поверхностных интегралов в скобках Пуассона. Движение в этом направлении намечено уже в самой работе Редже-Тейтельбойма, но в не слишком явной форме, без акцентирования этого шага. А именно, была выведена алгебра Пуанкаре для генераторов гамильтонова формализма, т.е вычислены скобки Пуассона между ними с сохранением поверхностных членов, отличных от нуля при принятых граничных условиях. Однако само вычисление скобок Пуассона производилось по стандартной формуле, которая, как позже выяснилось, не удовлетворяет тождеству Якоби, точнее, удовлетворяет ему лишь по модулю поверхностных членов (интегралов от дивергенций). Иными словами, здесь скрывалось противоречие: с одной стороны при доказательстве тождества Якоби поверхностные члены игнорируются, с другой стороны, при рассмотрении алгебры Пуанкаре эти члены сохраняются и имеют физический смысл.

В диссертации предлагаются новые подходы к описанию в гамильтоновом формализме теории поля задач с нетривиальными граничными условиями. Например, предложен метод нахождения асимптотических законов сохранения, основанный на глобальном подходе к теореме Э. Нетер [3]. Предлагается новое определение скобок Пуассона, отличающееся от стандартного поверхностными членами и точно удовлетворяющее тождеству Якоби. Это позволяет с новой точки зрения рассматривать физические задачи с нетривиальными граничными условиями. Новая формула для скобок Пуассона позволяет работать с более широкими классами функционалов и поэтому создает простор для более детального изучения постановки граничных условий и возможностей их изменения в теории гравитационных и калибровочных полей, а также в теории струн и бран, в механике сплошных сред. В диссертации рассматриваются применения новых методов к задачам реализации алгебры Пуанкаре в общей теории относительности, к анализу особенностей формализма Аштекара, к вычислению энтропии черных дыр, к задачам со свободной границей в гидродинамике невязкой жидкости.

Первая глава диссертации посвящена рассмотрению задачи реализации алгебры Пуанкаре в асимптотически плоском пространстве-времени общей теории относительности с точки зрения поверхностных членов, возникающих при вычислении скобок Пуассона. Последнее отличает предложенный автором подход от подхода Редже и Тейтельбойма. Преимущества излагаемого метода позволили решить задачу при ковариантных граничных условиях, а в частном случае декартовой системы координат обобщить условия, использованные Редже и Тейтельбоймом.

Вторая глава посвящена развитию общего метода нахождения законов сохранения для физических величин, которые выражаются интегралами не по объему пространства, а по границе объема, т.е по поверхности. Эти законы могут быть названы асимптотическими. Метод не является специфически гамильтоновым, а может с успехом применяться и в лагранжевом формализме. Однако исторически сложилось так, что он появился в гамильтоновой формулировке общей теории относительности, поэтому значительное место будет отведено именно этой задаче.

В 3 главе обращается внимание на то, что стандартные скобки Пуассона не удовлетворяют тождеству Якоби, если во внимание принимаются поверхностные члены. Конечно, иногда положение может быть исправлено граничными условиями. Но представляется более интересной возможность модифицировать стандартные скобки, добавляя к ним поверхностные члены определенного вида, с тем чтобы новые скобки удовлетворяли тождеству Якоби точно. Здесь полезными оказываются так называемые высшие эйлеровы операторы. С их помощью строится новая формула для скобок Пуассона, которая может быть также выражена через производные Фреше. В этой главе для новых скобок Пуассона явными вычислениями доказывается тождество Якоби в нескольких важных случаях.

Построение наиболее общего доказательства тождества Якоби выполнено в 4 главе диссертации, где по аналогии с аппаратом формального вариационного исчисления, построенного в работах Гельфанда, Дикого, Дорфман и других авторов, но уже без отбрасывания дивергенций, вводятся такие конструкции как дифференциальные формы, эволюционные векторные поля и мульти-векторы. Тогда оказывается возможным определить скобку Схоутена-Нейенхейса и доказать, что ее обращение в ноль для бивектора означает, что построенная на его основе скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби точно.

В главе 5 рассматривается вопрос об инвариантности скобок Пуассона относительно произвольных локальных преобразований полей. Показано, что введенная в предыдущих главах скобка является инвариантной.

Попутно делается сравнение с введенной позднее скобкой Беринга [55] и показывается, что скобка Беринга не обладает необходимой инвариантностью. Показано также, что стандартная скобка Пуассона, как и скобка Беринга, инвариантна лишь с точностью до дивергенций.

Глава 6 посвящена приложению новой скобки Пуассона к гамильтонову формализму ОТО, предложенному Аштекаром. Отличия формализма Аштекара от более раннего формализма Арновитта, Дезера, Мизнера (АДМ) призваны облегчить переход к квантовой теории гравитации. Мы показываем, что преобразование переменных, сделанное Аштекаром, не является каноническим преобразованием, если учитываются поверхностные члены. Поэтому в задачах, где роль поверхностных интегралов может быть существенной, ко всем вычислениям, выполненным в предположении о каноничности переменных, должны быть сделаны поправки. В частности мы рассматриваем задачу о замыкании алгебры генераторов 3-мерных диффеоморфизмов и калибровочных вращений базисов и показываем, что при учете всех поверхностных членов можно путем добавления к связям поверхностных интегралов добиться замыкания алгебры независимо от граничных условий.

В главе 7 рассмотрена задача вычисления энтропии черной дыры исходя из идеи, что на горизонте меняется смысл координатных преобразований и некоторые из параметров таких преобразований становятся физическими степенями свободы. При граничных условиях, предложенных в работе Карлипа [56], показано, что построенные там генераторы не являются допустимыми в смысле Редже-Тейтельбойма и стандартные скобки Пуассона для них плохо определены. Область применимости новой формулы для скобок Пуассона существенно шире и с ее помощью корректно получается выражение для энтропии.

Глава 8 посвящена применению формализма главы 4 к задаче со свободной границей, конкретным примером здесь служит гидродинамика сжимаемой идеальной (т.е. невязкой) жидкости. Рассматривается как лагранжев, так и гамильтонов формализм, как в эйлеровых переменных, так и в лагранжевых. Показано, что известные из лагранжева формализма граничные условия возникают в гамильтоновом формализме с поверхностными членами как условия регулярности гамильтонова векторного поля.

В Заключении формулируются положения, выносимые на защиту.

Глава 1

Алгебра Пуанкаре в асимптотически плоском пространстве-времени

1.1 Постановка задачи

В этой главе вычисляются по стандартным формулам скобки Пуассона генераторов гамильтонова формализма ОТО с учетом всех поверхностных членов. Если рассматривать пространство Минковского как частное решение уравнений ОТО, то для него существует асимптотическая группа Пуанкаре, являющаяся полупрямым произведением группы Пуанкаре и бесконечной подгруппы, и алгебра генераторов этой группы, содержащих поверхностные члены, замыкается. Для асимптотически плоского пространства-времени оказывается также возможным реализовать алгебру асимптотической группы Пуанкаре. Найден инвариантный по отношению к выбору системы координат на гиперповерхностях одновременности критерий этой реализации. При этом на гиперповерхностях вводится и используется "фоновая" плоская метрика, которая вместе с сохраняющей ее группой Пуанкаре определена неоднозначно, однако численные значения генераторов на решениях уравнений связи не содержат никакого произвола. Для асимптотически галилеевской метрики получено уточнение широко используемых граничных условий. Дан рецепт применения разложения Арновитта-Дезера-Мизнера при медленно убывающем вкладе от преобразований координат и времени.

Известно, что канонический формализм ОТО для топологически открытых пространств обладает качественным своеобразием по сравнению со случаем замкнутого пространства. Как было показано в работах Дирака [5, 4] и Арновитта, Дезера, Мизнера (АДМ) [6], отличие состоит в необходимости добавления к гамильтониану поверхностных интегралов, в результате чего он может принимать ненулевые значения на решениях уравнений связи. Эвристическая аргументация работ [5, 4, 6] впоследствии получила более строгое математическое обоснование в статье Редже и Тейтельбойма [1]. Некоторые уточнения в постановку задачи, общую для всех этих публикаций, были внесены работой Пухова [30].

В этой главе будут изложены результаты, полученные в работах [31, 32], представляющие дальнейшее развитие методов статьи [1] в направлении снятия ряда ограничений и, таким образом, расширения области применимости гамильтонова формализма ОТО. Предлагаемые здесь граничные условия на пространственной бесконечности инвариантны по отношению к выбору системы координат на гиперповерхности одновременности и накладываются не на отдельные решения уравнений связи, а на орбиты, образуемые в фазовом пространстве действием группы Пуанкаре на состояния. Это позволило также уточнить условия и для того частного случая (асимптотически декартовых координат), рассмотрением которого ограничивались авторы работ [5, 4, 6, 1, 30].

1.2 Алгебра связей и поверхностные интегралы

Будем здесь использовать обозначения АДМ, т.е. примем в качестве канонической переменной метрику g_{ij}, индуцированную на пространственноподобной поверхности x^0 =const и сопряженные импульсы $\pi^{ij} = -\sqrt{g}(K^{ij} - g^{ij}K)$, где K_{ij} — вторая фундаментальная форма гиперповерхности, $g = \mathrm{Det}||g_{ij}||$, $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$, $K = g^{ij}K_{ij}$, жонглирование индексами производится с помощью g_{ij}, g^{ij}, латинские индексы пробегают значения 1,2,3, греческие — 0,1,2,3. Формализм римановой геометрии и описание гиперповерхностей исчерпывающим образом представлены в книге Схоутена и Стройка [7]. Переменные АДМ подчинены четырем уравнениям связи, которые при отсутствии полей материи имеют вид:

$$\mathcal{H} \equiv -\frac{1}{\sqrt{g}}\left(gR + \frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2\right) = 0, \qquad \mathcal{H}_i \equiv -2\pi^j_{i|j} = 0, \tag{1.1}$$

где R — скалярная кривизна гиперповерхности, $\mathrm{Sp}\pi^2 = \pi_{ij}\pi^{ij}$, вертикальная черта обозначает ковариантную производную, определяемую метрикой g_{ij}. Мы не рассматриваем поля материи, поскольку предполагается их быстрое убывание на бесконечности, когда они не дают вклада в поверхностные интегралы. Связи представляют собой 4 уравнения ОТО из 10, а именно, уравнения не содержащие вторых производных метрики $g_{\mu\nu}$ по времени. Остальные 6 уравнений ОТО эквивалентны 12 каноническим уравнениям

$$g_{ij,0} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}}, \qquad \pi^{ij}_{\ \ ,0} = -\frac{\delta H}{\delta g_{ij}},$$

где

$$H = H_0 \equiv \int \left(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i\right) d^3x,$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} &= N_{i|j} + N_{j|i} + \frac{2N}{\sqrt{g}}\left(\pi_{ij} - g_{ij}\frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\delta H}{\delta g_{ij}} &= N\sqrt{g}\left(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\right) - \sqrt{g}\left(N^{|ij} - g^{ij}N^{|m}_{|m}\right) - \frac{2N}{\sqrt{g}}\left(\pi^{ij}\frac{\pi}{2} - \pi^{im}\pi^j_m\right) + \\ &+ \frac{Ng^{ij}}{2\sqrt{g}}\left(\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2\right) - \left(N^m\pi^{ij}\right)_{|m} + N^i_{\ |m}\pi^{jm} + N^j_{\ |m}\pi^{im}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

R_{ij} — тензор Риччи гиперповерхности, N и N^i играют роль лагранжевых множителей при связях в гамильтониане. Скобка Пуассона определяется стандартной формулой

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta g_{ij}}\frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} - \frac{\delta G}{\delta g_{ij}}\frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}}\right) d^3x. \tag{1.3}$$

Связи в гамильтоновом формализме ОТО являются генераторами преобразований координат, например,

$$
\begin{aligned}
&\{g_{ij}(x), \int \lambda^k \mathcal{H}_k d^3y\} = \lambda_{i|j} + \lambda_{j|i}, \\
&\{\pi^{ij}(x), \int \lambda^k \mathcal{H}_k d^3y\} = \left(\lambda^m \pi^{ij}\right)_{|m} + \lambda^i{}_{|m}\pi^{jm} + \lambda^j{}_{|m}\pi^{im},
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

т.е. $\mathcal{H}_k$ генерирует преобразования координат гиперповерхности. В то же время $\mathcal{H}$ является генератором перехода на новую гиперповерхность. Для гамильтониана в целом выполняется соотношение

$$
\begin{gathered}
\left\{H_0(\lambda, \lambda^i), H_0(\beta, \beta^j)\right\} = H_0(\alpha, \alpha^k), \\
\text{где} \\
\alpha = \lambda^i \beta_{,i} - \beta^i \lambda_{,i}, \\
\alpha^k = \gamma^{ki}(\lambda\beta_{,i} - \beta\lambda_{,i}) + \lambda^i \beta^k{}_{,i} - \beta^i \lambda^k{}_{,i}.
\end{gathered}
\tag{1.5}
$$

Для полноты картины отметим, что поскольку в α^k входит, кроме параметров λ, β, λ^i, β^j, переменная γ^{ki}, имеющая ненулевые скобки Пуассона со связями, связи не образуют алгебры в строгом смысле слова, хотя и находятся в инволюции. Обсуждение этой тонкости можно найти, например, в работах [23, 24].

До сих пор нами рассматривались (1.4), (1.5) лишь генераторы преобразований, не затрагивающих границу области, и их коммутаторы. При этом очевидно, что добавление к связям каких-либо дивергентных членов никак не сказывалось, т.е. генераторы были определены лишь с точностью до поверхностных членов. Теперь перейдем к интересующему нас случаю параметров преобразований, отличных от нуля на границе.

Стандартное определение скобок Пуассона (1.3), использующее производные Эйлера-Лагранжа, позволяет формально вычислять эти скобки вместе со всеми поверхностными интегралами, исходя из еще не переопределенного генератора с помощью формул (1.2):

$$
\left\{H_0(\lambda, \lambda^i), H_0(\beta, \beta^j)\right\}_f = H_0(\alpha, \alpha^k) + \oint 2\pi^j_k \alpha^k dS_i + \tag{1.6}
$$

$$+\oint \mathcal{H}\left(\lambda\beta^j-\beta\lambda^j\right)dS_j-\oint \pi^{km}\left[(\beta_{k|m}+\beta_{m|k})\lambda^j-(\lambda_{k|m}+\lambda_{m|k})\beta^j\right]dS_i+$$

$$+\oint 2\sqrt{g}R^j_i(\lambda\beta^i-\beta\lambda^i)dS_j+\oint 2\sqrt{g}(g^{im}g^{jn}-g^{ij}g^{mn})(\lambda_i\beta_{|mn}-\beta_i\lambda_{|mn})dS_j,$$

где $\alpha,\ \alpha^k$ определяется также как и в (1.5). Мы будем помечать эти скобки Пуассона значком f, указывающим на формальность их вычисления, поскольку левая часть (1.6) пока не определена в смысле вариационного принципа Редже-Тейтельбойма, о котором будет говориться ниже. Поверхностные интегралы, необходимые для переопределения генераторов $H_0 \to H = H_0 + \oint$, будем искать среди членов правой части (1.6), с тем чтобы, подставив новые генераторы в левую часть, получить для них соотношение замкнутости (1.5).

В ОТО в случае компактных пространств без границы соотношение (1.5) выполняется при исходном гамильтониане H_0, все поверхностные интегралы при этом обращаются в нуль. Для некомпактных пространств, границей которых считается пространственная бесконечность, предлагается, используя асимптотические условия на бесконечности, искать алгебру преобразований, для которых правая часть (1.6) содержит только $\alpha,\ \alpha^k$, а не какие-либо другие комбинации параметров $\lambda,\ \beta,\ \lambda^i,\beta^j$. Тогда в правой части мы будем иметь новый генератор $H = H_0 + \oint$, для которого должно выполняться соотношение (1.5).

1.3 Асимптотическая группа Пуанкаре

Рассмотрим пространство Минковского в качестве частного решения уравнений ОТО, и будем использовать в нем сначала координаты, в которых метрика имеет вид

$$g_{\mu\nu} = -(dx^0)^2 + g_{ij}dx^i dx^j.$$

Выбрав гиперплоскость x^0 =const в качестве пространственноподобной гиперповерхности, получаем начальные данные $g_{ij} = h_{ij}$, $\pi^{ij} = 0$, где h_{ij} — плоская пространственная метрика, система пространственных координат здесь произвольная. Подставив эти g_{ij}, π^{ij} в правую часть соотношения, мы обнаружим только один отличный от нуля поверхностный интеграл

$$\oint 2\sqrt{h}(h^{im}h^{jn} - h^{ij}h^{mn})(\lambda_i \beta_{|mn} - \beta_i \lambda_{|mn})dS_i. \tag{1.7}$$

Преобразуя его к объемному, получаем

$$\int \left[(\lambda_{i|j} + \lambda_{j|i})(\beta^{|ij} - h^{ij}\beta^{|m}_{\ \ |m}) - (\beta_{i|j} + \beta_{j|i})(\lambda^{|ij} - h^{ij}\lambda^{|m}_{\ \ |m})\right] \sqrt{h}d^3x,$$

откуда видно, что при

$$\lambda_{i|j} + \lambda_{j|i} = 0, \qquad \beta_{i|j} + \beta_{j|i} = 0, \qquad \lambda_{|ij} = 0, \qquad \beta_{|ij} = 0 \tag{1.8}$$

интеграл (1.7) обращается в нуль. В силу равенства нулю внутренней кривизны гиперповерхности выполняются также равенства $\beta_{i|kl} = 0$, $\lambda_{i|kl} = 0$. Одновременное выполнение всех соотношений (1.8) не является необходимым для обращения в нуль отдельно взятого интеграла, однако требуется для существования алгебры инфинитезимальных преобразований, сохраняющих условие равенства выражения (1.7) нулю. Этой алгебре соответствует группа движений гиперплоскости (или любой ее части) в пространстве Минковского, т.е. группа Пуанкаре.

При рассмотрении всей гиперплоскости поверхностный интеграл (1.7) становится несобственным интегралом по бесконечно удаленной двумерной поверхности, и его сходимость зависит от асимптотического поведения подинтегрального выражения. Будем искать группу преобразований G_0, обращающих в нуль (1.7) и другие поверхностные интегралы в (1.6) в силу поведения функций $\lambda, \lambda^i, \beta, \beta^i$ на бесконечности, при дополнительных условиях инвариантности G_0 относительно преобразований группы Пуанкаре G_P и факторизации группы G, построенной объединением G_P

и G_0, т.е. $G_P = G/G_0$. Иначе говоря, асимптотическая группа Пуанкаре строится как полупрямое произведение $G = G_0 \leftthreetimes G_P$.

Поскольку поверхностный интеграл (1.7) инвариантен относительно замен координат на гиперповерхности, при рассмотрении можно ограничиться любой выбранной системой, например, декартовой, где $h_{ij} = \delta_{ij}$, ковариантные производные совпадают с частными, а условия (1.8) дают

$$\lambda = A_k x^k + a, \qquad \lambda^i = A^i{}_k x^k + a^i, \qquad \beta = B_k x^k + b, \tag{1.9}$$

$$\beta^i = B^i{}_k x^k + b^i, \qquad A^i{}_k = A_{ik} = -A_{ki}, \qquad B^i{}_k = B_{ik} = -B_{ki}.$$

Асимптотические условия будем задавать в виде порядка убывания функций на бесконечности (более строгие формулировки, основанные на взвешенных пространствах Соболева, можно найти, например, в работе [25]). Так

$$\xi^\alpha_{,\beta} = O(r^{-\varepsilon}), \qquad \varepsilon > 0, \qquad r = \sqrt{x^i x^i}, \tag{1.10}$$

означает, что $|r^\varepsilon \xi^\alpha_{,\beta}| < C$. Ограничение (1.10) характеризует преобразования координат пространства-времени $x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha(x^\beta)$, сохраняющие асимптотические условия $g_{ij} - \delta_{ij} \to 0$, $\pi^{ij} \to 0$. Условие (1.10) предполагает, вообще говоря,

$$\xi^\alpha = O(r^{1-\varepsilon}) \tag{1.11}$$

лишь с точностью до логарифмических множителей. В дальнейшем будем считать, что выбор сделан так, что в главном асимптотическом порядке ξ^α они отсутствуют.

Коммутируя ξ, ξ^i компоненты ξ^α с удовлетворяющими (1.9), по формулам (1.5) получим, что для сохранения (1.10) необходимо

$$\xi^\alpha{}_{,\beta j} = O(r^{-1-\varepsilon}); \tag{1.12}$$

для сохранения (1.12) требуется условие на третью производную и т.д. Это значит, что каждое дифференцирование ξ и ξ^i должно изменять порядок убывания на r^{-1}. Таким образом, из алгебры исключаются "координатные волны", т.е. функции, осциллирующие по радиальной переменной. Ясно, что пуанкаре-инвариантность требует такого же понижения порядка и при дифференцировании по времени.

Вернемся к условиям обращения в нуль интеграла (1.7) для $\xi^\alpha = (\xi, \xi^i)$, удовлетворяющих (1.10)–(1.12). Тогда подинтегральное выражение в (1.7) имеет асимптотику $O(r^{-2\varepsilon})$, и кажется необходимым потребовать выполнения условия $\varepsilon > 1$. Однако можно задать разные асимптотики для четных и нечетных по отношению к пространственной инверсии частей

$$\xi^\alpha = O^-(r^{1-\varepsilon}) + O^+(r^{1-\delta}); \tag{1.13}$$

тогда $\xi^\alpha{}_{,\beta} = O^+(r^{-\varepsilon}) + O^-(r^{-\delta})$ и т.д. Принять $\delta > 1$ необходимо для отделения преобразований из G_0 (в частности, "супертрансляций") от обычных трансляций, принадлежащих G_P, т.е. для выполнения $G_P = G/G_0$. Нетрудно убедиться, что условия (1.13) сохраняются при коммутации с инфинитезимальными преобразованиями Пуанкаре (1.9) при $|\epsilon - \delta| \leq 1$. Впервые угловая зависимость была принята во внимание в работе [1]. Приняв условия (1.13), мы получим в подинтегральном выражении (1.7) члены с асимптотиками $O^+(r^{-2\varepsilon})$, $O^+(r^{-2\delta})$, $O^-(r^{-\varepsilon-\delta})$. Вклад в интеграл может давать только нечетная часть, поэтому получаем для G_0 ограничение $\epsilon + \delta > 2$.

Анализ коммутаторов бесконечно малых преобразований показывает, что группа G_0 должна строиться в декартовых координатах на основе условий (1.13), причем $|\epsilon - \delta| \leq 1$, $\epsilon + \delta > 2$. Это подтверждается рассмотрением действия конечных преобразований с той же асимптотикой на переменные g_{ij}, π^{ij}, принимающие при этом вид

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i} + \xi_{m,i}\xi_{m,j} - \xi_{0,i}\xi_{0,j}, \tag{1.14}$$

$$\pi^{ij} = \xi^0{}_{,ij} - \delta_{ij}\xi^0{}_{,kk} + O^-(r^{-1-2\varepsilon}) + O^-(r^{-1-2\delta}) + O^+(r^{-1-\varepsilon-\delta}).$$

Гиперповерхность x'^0 =const не будет больше гиперплоскостью, причем в силу уравнений Гаусса-Петерсона-Кодацци [7] тензор Римана ее внутренней кривизны пропорционален квадратичной форме, построенной из π^{ij}, $R_{ijk\ell} = K_{ik}K_{j\ell} - K_{jk}K_{i\ell}$, причем $K_{ij} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\pi_{ij} - g_{ij}\frac{\pi}{2}\right)$. Для координатно-инвариантных оценок кривизны гиперповерхности следует использовать скалярные величины, например, $\mathrm{Sp}K^2$. Асимптотически главные члены, возникающие здесь при преобразованиях координат и времени с асимптотикой (1.13), имеют вид $\mathrm{Sp}K^2 \sim \xi^0{}_{,ij}\xi^0{}_{,ij}$ и являются заведомо неотрицательными, причем обращение в нуль достигается только для линейной зависимости $\xi^0 = A_k x^k + a$. Таким образом, условия (1.13) вместе с неравенствами $|\epsilon - \delta| \leq 1$, $\epsilon + \delta > 2$ приводят к ограничению

$$\mathrm{Sp}K^2 = O^+(r^{-3-\mu}) + O^-(r^{-4-\mu}), \qquad \mu > 0.$$

Проведенный в декартовой системе координат анализ, ввиду инвариантности поверхностных интегралов в (1.6), легко распространяется на случай произвольных координат на гиперповерхности. Пусть G_1 будет группой всех диффеоморфизмов гиперповерхности, тогда для $g_1 \in G_1$, $g \in G$, $g_1 g g_1^{-1}$ описывает преобразование асимптотической группы Пуанкаре G в новых координатах. Очевидно, что $g_1 G g_1^{-1}$ изоморфно G в соответствии с общей теоремой теории групп. Подставляя конкретный вид преобразования g_1, связывающего выбранную систему координат с декартовой, мы всегда получим асимптотические условия, заменяющие (1.13).

1.4 Линеаризация поверхностных интегралов

Перейдем теперь к общему случаю асимптотически плоского пространства с тем, чтобы найти условия замыкания алгебры генераторов. Подинтегральные выражения в поверхностных интегралах (1.6), возникающие при вычислении скобки Пуассона генераторов преобразований, произвольных на границе области, имеют вид билинейных комбинаций параметров λ, β, λ^i, β^j и их производных до второго порядка. Коэффициенты этих билинейных форм зависят от канонических переменных, причем π^{ij} входят линейно или квадратично, а от g_{ij} зависимость неполиномиальная.

Будем рассматривать поверхностные интегралы в (1.6) как несобственные по бесконечно удаленной двумерной поверхности. Предположим, что существует плоская фоновая метрика h_{ij} на гиперповерхности, такая что имеет смысл разложение подинтегральных выражений по степеням $\Phi_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$. При этом выберем параметры $\bar{\lambda}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\lambda}^i$, $\bar{\beta}^j$ удовлетворяющими (1.8), так чтобы они порождали группу движений гиперплоскости в пространстве Минковского. Ковариантные производные в (1.8) будем вычислять с помощью плоской метрики h_{ij} и обозначать точкой с запятой, в отличие от вертикальной черты, обозначающей ковариантную производную, построенную на основе g_{ij}. Индексы в (1.8) также будем поднимать и опускать при помощи фоновой метрики h_{ij}.

Тогда при подстановке разложения по степеням Φ_{ij} в поверхностные интегралы (1.6) оказывается, что члены нулевого по Φ_{ij}, π^{ij} порядка отсутствуют, а линейные имеют вид

$$\oint 2\pi^j_k \bar{\alpha}^k dS_j + \oint \sqrt{h}(h^{im}h^{jn} - h^{ij}h^{mn})(\Phi_{mn;i}\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_{,i}\Phi_{mn})dS_j,$$

где $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}^k$ вычисляются по формулам (1.5), но вместо g^{ik} следует подставлять h_{ik}. Разумеется, для $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}^k$ вновь выполняются условия (1.8) с h_{ij} вместо g_{ij}.

В результате мы видим, что линейный вклад в поверхностные интегралы (1.6) для скобки Пуассона генераторов с пока не определенными поверхностными членами содержит из всех возможных билинейных комбинаций $\bar{\lambda}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\lambda}^i$, $\bar{\beta}^j$ только $\bar{\alpha}$, $\bar{\alpha}^k$, что и требуется для алгебры группы Пуанкаре. В квадратичном порядке разложения, как и в полном выражении для поверхностных интегралов, не удается удовлетворить этому необходимому для существования алгебры требованию.

1.5 Критерий реализации алгебры Пуанкаре

Фазовое пространство в рассматриваемом случае асимптотически плоского пространства-времени требуется с помощью граничных условий задать так, чтобы на нем действовали генераторы группы Пуанкаре. Основной результат в этом направлении был получен в работе [1]:

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O^+(r^{-1}) + O^-(r^{-2}), \qquad \pi^{ij} = O^-(r^{-2}) + O^+(r^{-3}), \tag{1.15}$$

причем порядок понижается на r^{-1} при каждом дифференцировании. Как уже отмечалось, при таком граничном условии явно выделяется декартова система координат. Нашей целью является инвариантное по отношению к выбору системы координат на гиперповерхности задание условий на бесконечности.

Отметим, что алгебра Пуанкаре в строгом смысле может быть реализована только на решениях уравнений связи. Это следует из присутствия $g^{ik}(x)$ в выражении для α^k, о чем уже упоминалось. Нам, однако, требуется включить в рассмотрение более широкий класс пространств, необходимый для вариационного принципа. Здесь основополагающим является требование [1] вхождения решений уравнений связи в фазовое пространство.

Для решений уравнений ОТО критерий формулируется следующим образом. Потребуем, чтобы пространство-время с евклидовой топологией и метрикой, удовлетворяющей уравнениям ОТО, содержало пространственноподобные гиперповерхности с начальными данными g_{ij}, π^{ij}, такие что на них можно задать фоновую плоскую метрику h_{ij}, удовлетворив при этом трем условиям.

А. Внешняя кривизна гиперповерхностей стремится к нулю на бесконечности, причем существует $\mu > 0$, такое что

$$\mathrm{Sp}K^2 \equiv \frac{1}{g}\left(\mathrm{Sp}\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right) = O^+(r^{-3-\mu}) + O^-(r^{-4-\mu}). \tag{1.16}$$

Б. Поверхностные интегралы в (1.6) линеаризуются по $\Phi_{ij} = g_{ij} - h_{ij}$ и π^{ij} при параметрах $\bar\lambda$, $\bar\beta$, $\bar\lambda^i$, $\bar\beta^j$, задающих бесконечно малые преобразования группы Пуанкаре, т.е.

$$\bar\lambda_{;ik} = \bar\beta_{;ik} = 0; \qquad \bar\lambda_{i;k\ell} = \bar\beta_{i;k\ell} = 0, \tag{1.17}$$

$$\bar\lambda_{i;k} + \bar\lambda_{k;i} = \bar\beta_{i;k} + \bar\beta_{k;i} = 0,$$

$$\{H_0(\bar\lambda, \bar\lambda^i), H_0(\bar\beta, \bar\beta^j)\}_f = H_0(\bar\alpha, \alpha^k) + \oint 2\pi^{ik}\bar\alpha_i dS_k +$$

$$+ \oint \sqrt{h}(h^{im}h^{jn} - h^{ij}h^{mn})(\Phi_{mn;i}\bar\alpha - \bar\alpha_{,i}\Phi_{mn})dS_j,$$

где

$$H_0(\lambda, \lambda^i) = \int(\lambda\mathcal{H} + \lambda^i\mathcal{H}_i)d^3x, \qquad \bar\alpha = \bar\lambda^i\bar\beta_{,i} - \bar\beta^i\bar\lambda_{,i},$$

$$\bar\alpha^k = h^{ki}(\bar\lambda\bar\beta_{,i} - \bar\beta\bar\lambda_{,i}) + \bar\lambda^j\bar\beta^k{}_{,j} - \bar\beta^j\bar\lambda^k{}_{,j},$$

$$\alpha^k = g^{ki}(\bar\lambda\bar\beta_{,i} - \bar\beta\bar\lambda_{,i}) + \bar\lambda^j\bar\beta^k{}_{,j} - \bar\beta^j\bar\lambda^k{}_{,j}.$$

В. Любые конечные преобразования из группы Пуанкаре, соответствующие движениям гиперплоскости с метрикой h_{ij} в пространстве Минковского, не должны приводить к нарушению условий А и Б при неизменной фоновой метрике.

От фазового пространства Γ^h требуется, чтобы оно содержало семейство начальных данных для гиперповерхностей с евклидовой топологией, при данном выборе фоновой плоской метрики h_{ij}, удовлетворяющих условиям А, Б, В, причем решение уравнений связи (например, как в работе [30], по теории возмущений) не должно выводить за пределы фазового пространства и вариации $\delta\Phi_{ij}$, $\delta\pi^{ij}$ должны иметь ту же самую асимптотику, что и сами функции Φ_{ij}, π^{ij}.

Поскольку явный вид h_{ij} в определении фазового пространства Γ^h не конкретизируется, а все условия формулируются независимо от выбора системы координат, фазовые пространства, соответствующие различным фоновым метрикам h_{ij}, эквивалентны с точностью до преобразования координат на гиперповерхности. Поэтому в широком смысле можно понимать под фазовым пространством Γ всю совокупность Γ^h. Будем говорить, что какая-либо гиперповерхность с начальными данными g_{ij}, π^{ij} принадлежит фазовому пространству, если существует h_{ij}, такая что g_{ij}, π^{ij} принадлежат Γ^h. Это свойство принадлежности Γ может, по нашему мнению, использоваться в качестве одного из определений асимптотически плоских начальных данных и асимптотически плоского пространства-времени. Разумеется, весьма общее представление об асимптотически плоском пространстве-времени, требующее лишь, чтобы ${}^{(4)}R_{\alpha\beta\gamma\delta} \to 0$ при $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$ на бесконечности, недостаточно для реализации в каноническом формализме ОТО группы Пуанкаре.

Ниже будет показано, что на фазовом пространстве Γ^h переопределенные генераторы

$$H^h(\bar\lambda, \bar\lambda^i) = H_0(\bar\lambda, \bar\lambda^i) + \oint 2\pi^{ik}\bar\lambda_k dS_i + \tag{1.18}$$

$$+ \oint \sqrt{h}(h^{im}h^{jn} - h^{ij}h^{mn})(\Phi_{mn;i}\bar\lambda - \bar\lambda_{,i}\Phi_{mn})dS_j$$

удовлетворяют вариационному принципу Редже-Тейтельбойма [1], и поэтому формальную запись скобок Пуассона в (1.17) можно заменить обычной:

$$\{H_0(\bar\lambda, \bar\lambda^i), H_0(\bar\beta, \bar\beta^j)\}_f = \{H^h(\bar\lambda, \bar\lambda^i), H^h(\bar\beta, \bar\beta^j)\} \approx H^h(\bar\alpha, \bar\alpha^k), \tag{1.19}$$

где последнее равенство выполняется в слабом смысле по Дираку [12].

Мы покажем также, что на фазовом пространстве действует асимптотическая группа Пуанкаре, рассмотренная выше для пространства Минковского. При этом преобразования из подгруппы G_0 оставляют генераторы инвариантными.

Наконец, будет показано, что переход от фоновой метрики h_{ij} к любой другой плоской фоновой метрике $\tilde{h}_{ij}$, который может быть выполнен преобразованием координат из G_0 при неизменных начальных данных g_{ij}, π^{ij}, также не отражается на численных значениях генераторов. В то же время неудачный выбор плоской метрики приводит к выходу за пределы фазового пространства, т.е. к нарушению групповой структуры.

Перейдем к доказательствам. Поскольку все поверхностные интегралы в (1.6) и (1.7) явно инвариантны при заменах пространственных координат, рассмотрение можно проводить в любой координатной системе. Мы воспользуемся декартовыми координатами, поскольку асимптотические условия в этом случае накладываются наиболее просто.

Сначала покажем, что в декартовых координатах ($h_{ij} = \delta_{ij}$) наше задание фазового пространства приводит к обобщению условий (1.15), используемых в работе [1]. Параметры $\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}^i$ принимают вид (1.9), а генератор (1.18)

$$H^h(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i) = \int \left(\bar{\lambda}\mathcal{H} + \bar{\lambda}^i\mathcal{H}_i\right) d^3x + P^0 a - P^i a^i + M^k A_k + \frac{1}{2} M^{ik} A_{ik}, \tag{1.20}$$

где

$$\begin{aligned} P^0 = \oint (\Phi_{ij,i} - \Phi_{ii,j}) dS_j, \qquad P^i = -\oint 2\pi^{ij} dS_j, \\ M^k = \oint \left[x^k(\Phi_{ij,i} - \Phi_{ii,j}) - \Phi_{kj} + \delta_{kj}\Phi_{ii}\right] dS_j, \\ M^{ik} = 2\oint \left(x^k\pi^{ij} - x^i\pi^{kj}\right) dS_j.() \end{aligned} \tag{1.21}$$

Эти формулы совпадают с точностью до обозначений с соответствующими формулами из [1]. Принятые там асимптотические условия (1.15), с одной стороны, обеспечивают сходимость поверхностных интегралов в (1.20), а с другой, позволяют включить в фазовое пространство решения уравнений связи (1.1).

Однако, поскольку поверхностные интегралы, добавленные к связям в (1.20), в точности равны по абсолютной величине и противоположны по знаку объемным интегралам от линейных членов в самих связях

$$\mathcal{H}^L = -(\Phi_{ij,ij} - \Phi_{ii,jj}), \qquad \mathcal{H}^L_i = -2\pi^j_{i,j},$$

достаточно потребовать сходимости генератора в целом:

$$H^h(\bar\lambda, \bar\lambda^i) = \int \left[\bar\lambda(\mathcal{H} - \mathcal{H}^L) + \bar\lambda^i(\mathcal{H}_i - \mathcal{H}^L_i)\right] d^3x.$$

Предполагая возможность разного порядка убывания для четных и нечетных функций, а также считая, что первое и второе дифференцирования Φ_{ij} и первое для π^{ij} понижают порядок убывания каждый раз на r^{-1}, получаем

$$g_{ij} - \delta_{ij} = O^+(r^{-\varepsilon}) + O^-(r^{-\delta}), \qquad \pi^{ij} = O^-(r^{-1-\varepsilon}) + O^+(r^{-1-\delta}), \tag{1.22}$$

$$\mathcal{H} - \mathcal{H}^L = O^+(r^{-2-2\varepsilon}) + O^+(r^{-2-2\delta}) + O^-(r^{-2-\varepsilon-\delta}) = \mathcal{H}_i - \mathcal{H}^L_i.$$

Интеграл $H^h(\bar\lambda, \bar\lambda^i)$ сходится при $\varepsilon > 1/2,\ \delta > 1/2,\ \varepsilon+\delta > 2$. Требование включения в фазовое пространство решений уравнений связи дает условие $\varepsilon \leq 1$, требование пуанкаре-инвариантности — $|\varepsilon-\delta| \leq 1$. Объединяя все эти условия получаем

$$1/2 < \varepsilon \leq 1, \qquad 2 - \varepsilon < \delta \leq 1 + \varepsilon. \tag{1.23}$$

Оказывается, что эти же условия требуются и для сходимости интеграла симплектической формы, рассмотренного в работе [30], где предлагается частный выбор параметров $\varepsilon = 1$, $\delta > 1$. Отметим также, что конечность может достигаться и при $\varepsilon = 1/2$, если асимптотически главные члены возникают за счет преобразования координат, как например, в работе [58] , но преобразования Лоренца (бусты) приводят тогда к слишком искривленной гиперповерхности, нарушающей условие (1.16). В то же время граничные условия, используемые в обзоре [59] $\varepsilon = \delta = 1$, не обеспечивают сходимости ни генератора (1.20), ни симплектической формы и являются поэтому слишком широкими. С другой стороны, эти условия запрещают вполне допустимый с нашей точки зрения выбор параметров (1.20) при $\varepsilon < 1$. В работах [34, 20], где рассматриваются только выражения для генераторов трансляций, оказывается возможным принять $\varepsilon = \delta > 1/2$.

Нетрудно убедиться, что условия (1.22) при ограничениях (1.23) для параметров ε, δ и с оговоренными выше правилами для дифференцирования обеспечивают также линеаризацию поверхностных интегралов в (1.6) и, таким образом, эквивалентны нашему определению фазового пространства при выборе фоновой метрики в декартовых координатах.

Переходя к вариационному принципу, отметим, что вблизи бесконечности каноническими переменными являются Φ_{ij} и π^{ij}, а фоновая метрика не варьируется. Поскольку поиск экстремума функционала действия проводится на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям, этому классу должны принадлежать как Φ_{ij}, π^{ij}, так и $\Phi_{ij} + \delta\Phi_{ij}$, $\pi^{ij} + \delta\pi^{ij}$, следовательно для вариаций $\delta\Phi_{ij}$ и $\delta\pi^{ij}$ имеем те же асимптотические условия (1.22), (1.23), что и для самих функций. Общее выражение для δH_0, полученное в [1], при наших условиях сводится к виду

$$\delta H_0(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i) = \int \left[\frac{\delta H}{\delta g_{ij}(x)} \delta g_{ij}(x) + \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}(x)} \delta \pi^{ij}(x) \right] d^3x -$$
$$- \oint 2\bar{\lambda}_k \delta\pi^{k\ell} dS_\ell - \oint (\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{ij}\delta_{k\ell})(\bar{\lambda}\delta\Phi_{ij,k} - \bar{\lambda}_{,k}\delta\Phi_{ij}) dS_k,$$

где поверхностные интегралы линеаризуются около $h_{ij} = \delta_{ij}$ и вследствие этого сокращаются с вариациями поверхностных членов, дополняющих $H_0(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i)$ до $H^h(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i)$. Это и означает, что вариационные производные по каноническим переменным от $H^h(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i)$ на введенном фазовом пространстве определены в смысле Редже-Тейтельбойма, т.е. выполняется (1.19).

Нетрудно видеть, что асимптотические условия (1.22), (1.23) вместе с соответствующими условиями на производные $g_{ij,k}$, $g_{ij,k\ell}$, $\pi^{ij}_{\ \ ,k}$ инвариантны относительно преобразований (1.13) при тех же параметрах ε, δ и аналогичных условиях для производных. Одновременно для параметров $\tilde{\lambda},\ \tilde{\lambda}^i$, удовлетворяющих (1.13) и принадлежащих алгебре асимптотической группы Пуанкаре, получаем, что вариационный принцип применим и к $H^h(\bar{\lambda}+\tilde{\lambda}, \bar{\lambda}^i+\tilde{\lambda}^i)$, причем

$$H^h(\bar{\lambda}+\tilde{\lambda}, \bar{\lambda}^i+\tilde{\lambda}^i) \approx H^h(\bar{\lambda}, \bar{\lambda}^i), \qquad \{H^h(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}^i), H^h(\bar{\beta}, \bar{\beta}^j)\} \approx 0.$$

Это означает, что во введенном фазовом пространстве $H^h(\bar{\lambda}+\tilde{\lambda}, \bar{\lambda}^i+\tilde{\lambda}^i)$ генерируют преобразования асимптотической группы Пуанкаре, причем численные значения генераторов инвариантны относительно подгруппы G_0 на решениях уравнений связи.

Отметим, что при рассмотрении отдельных решений уравнений ОТО, а не всего фазового пространства, может встретиться ситуация, когда в асимптотиках (1.22) $\delta < 1$ и соответственно $\varepsilon > 1$ при $|\varepsilon - \delta| \leq 1$, $\varepsilon + \delta > 2$. Например, такой случай возможен для пространства Минковского. Группа инвариантности асимптотики имеет тогда вид $G = G_0 \leftthreetimes G_L$, где G_L — однородная группа Лоренца, а G_0 — подгруппа “супертрансляций”, включающая здесь в себя и обычные трансляции. Все 4 генератора трансляций обращаются при этом в нуль.

Наконец, покажем, что различный выбор фоновых метрик h_{ij} не изменяет численного значения генераторов (1.18) на решениях уравнений связи, если удовлетворяются условия А, Б, В.

Предположим, что для одних и тех же начальных данных g_{ij}, π^{ij} условия А, Б, В выполняются как относительно $h_{ij}^{(1)}$, так и относительно $h_{ij}^{(2)}$. Отличие $h_{ij}^{(1)}$ и $h_{ij}^{(2)}$ может быть обусловлено только координатным преобразованием, т.е.

$$h_{ij}^{(2)}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \tilde{x}^j} h_{k\ell}^{(1)}(x(\tilde{x})).$$

Ввиду координатной инвариантности $H^h(\lambda, \lambda^i)$ можно без ограничений общности принять одну из систем координат $x^i,\ \tilde{x}^i$ декартовой: $h_{k\ell}^{(1)} = \delta_{k\ell}$

тогда

$$h_{ij}^{(2)}(\tilde{x}) = \delta_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i} + \xi_{m,i}\xi_{m,j},$$

где

$$x^k = \tilde{x}^k + \xi^k(\tilde{x}^i). \tag{1.24}$$

Другой выбор фоновой метрики означает новое разбиение исходной метрики g_{ij}: $g_{ij} = \delta_{ij} + \Phi_{ij}^{(1)} = h_{ij}^{(2)} + \Phi_{ij}^{(2)}$, при этом

$$\Phi_{ij}^{(2)}(\tilde{x}) = \Phi_{ij}^{(1)}(\tilde{x}) - \xi_{i,j} - \xi_{j,i} - \xi_{m,i}\xi_{m,j}.$$

Предположим, что генератор, построенный с помощью второй фоновой метрики $h_{ij}^{(2)}$, мы также хотим вычислять в декартовых координатах. Тогда следует преобразовать g_{ij}, $\pi^{ij} = \pi^{ij(1)} = \pi^{ij(2)}$ с помощью замены координат, обратной к (1.24), т.е.

$$\tilde{x}^k = x^k + \eta^k(x^i) = x^k - \xi^k(x^i) + \xi^k{}_{,m}\xi^m + \ldots,$$

причем $\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} = \delta_{ki} - \xi_{k,i} + (\xi^k_{,m}\xi^m)_{,i} - \ldots$ Тогда

$$\Phi_{ij}^{(3)}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^\ell}{\partial x^j}\Phi_{k\ell}^{(2)}(\tilde{x}(x)) = \Phi_{ij}^{(1)}(x) - 2\xi_{i,j} - 2\xi_{j,i} +$$
$$+ O^+(r^{-2\varepsilon}) + O^+(r^{-2\delta}) + O^-(r^{-\varepsilon-\delta}),$$
$$\pi^{ij(3)}(x) = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^\ell}\pi^{k\ell}(\tilde{x}(x)) = \pi^{ij}(x) + O^+(r^{-1-2\varepsilon}) +$$
$$+ O^+(r^{-1-2\delta}) + O^-(r^{-\varepsilon-\delta}).$$

Подставляя $\Phi_{ij}^{(3)}(x)$, $\pi^{ij(3)}(x)$ в формулы (1.20), получим, очевидно, для решений уравнений связи тот же самый результат, что и для $\Phi_{ij}^{(1)}(x)$, $\pi^{ij(1)}(x)$. Утверждение об эквивалентности фоновых плоских метрик, отличающихся преобразованием координат из G_0, доказано.

Преобразования пространственных координат, не принадлежащие G_0, ввиду их более медленного убывания на бесконечности в декартовых координатах, приводят всегда к такому выбору фоновой метрики, что соответствующие ей преобразования Лоренца (бусты) слишком искривляют гиперповерхность, нарушая условие (1.16).

1.6 Выбор гиперповерхности и фоновой метрики

Начиная с первых работ по гамильтонову формализму ОТО, ставилась задача разделения информации, содержащейся в канонических переменных g_{ij}, π^{ij} на отдельные части, касающиеся системы координат пространства-времени, собственных возбуждений гравитационного поля и дальнодействующих потенциалов, содержащих информацию о поле в целом. В частности, в работе [6] для этой цели использовалось разложение убывающих на бесконечности симметричных матричных функций по формуле

$$f_{ik} = f_{ik}^{TT} + f_{ik}^{T} + f_{i,k} + f_{k,i}, , \tag{1.25}$$

$$f_{ik}^{T} = \frac{1}{2}\left(f^T\delta_{ik} - \frac{1}{\Delta}f^T_{,ik}\right), \qquad f^T = \frac{1}{\Delta}(f_{ii,kk} - f_{ik,ik}),$$

$$f_{i,k} = \frac{1}{\Delta}\left[f_{ij,jk} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta}f_{\ell m,\ell m}\right)_{,ik}\right],$$

где Δ^{-1} — обратный к лапласиану оператор при нулевых граничных условиях на бесконечности. Теоремы существования и единственности для соответствующих уравнений Пуассона могут быть найдены, например, в работах [25, 26]. Их условия заведомо выполняются при асимптотическом поведении (1.10) – (1.12).

Согласно идеологии АДМ, применяемой в [6], при асимптотических условиях

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = O(r^{-1}), \qquad g_{\mu\nu,\alpha} = O(r^{-2}) \tag{1.26}$$

g_{ij}^{TT}, $\pi^{ij\ TT}$ ответственны за локальные возбуждения гравитационного поля (гравитационные волны), $g_{i,j} + g_{j,i}$ и $\pi^{ij\ T}$ — координатно-зависимые составляющие, а g^T и $\pi^{i,j} + \pi^{j,i}$ содержат информацию об энергии и импульсе системы. Эти представления заимствованы из линеаризованной теории тензорного поля.

Однако при медленно убывающем вкладе от преобразований координат и времени $0 < \varepsilon \leq 1/2$ в (1.10) – (1.12), т.е. в случае, который обычно исключался условиями (1.26), асимптотически главные члены в g^T и

$\pi^{i,j} + \pi^{j,i}$ не остаются инвариантными. Например, в g^T появляется добавка порядка $O(r^{-1})$: $\frac{1}{\Delta}(\xi_{m,ik}\xi_{m,ik} - \Delta\xi_m\Delta\xi_m)$, при замене пространственных координат, использованной в [58]. Это означает неприменимость традиционной интерпретации разложения АДМ при более общей постановке задачи. Тем не менее, как мы покажем ниже, само разложение оказывается полезным и в этом случае.

Преобразования координат и времени, удовлетворяющие (1.10) – (1.12), при $0 < \varepsilon \leq 1/2$ сохраняют асимптотически минковский вид метрики и главную асимптотику тензора кривизны Римана

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = O(r^{-\varepsilon}), \qquad {}^4R_{\alpha\beta\gamma\delta} = O(r^{-3})$$

при исходной метрике, удовлетворяющей (1.26). Будем считать медленно убывающие координатные волны отсутствующими. Тогда с помощью АДМ-разложения можно найти преобразование времени, позволяющее перейти на более плоскую гиперповерхность x^0 =const, и фоновую метрику h_{ij}, так что будут выполнены условия А,Б,В. Общий вид асимптотики g_{ij}, π^{ij} после действия преобразований с $0 < \varepsilon \leq 1/2$ на (1.26) следующий:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i} + O(r^{-2\varepsilon}), \qquad \pi^{ij} = \xi^0_{,ij} - \delta_{ij}\Delta\xi^0 + O(r^{-1-2\varepsilon}).$$

Поскольку наиболее медленно убывающие части в $g_{ij} - \delta_{ij}$ и π^{ij} представляют собой линеаризованные преобразования, к ним удобно применить АДМ-разложение. В качестве первого приближения имеем

$$^{(1)}\xi_{i,j} +^{(1)} \xi_{j,i} =^{(1)} g_{ij} = O(r^{-\varepsilon}),$$

$$^{(1)}\xi^0_{,ij} - \delta_{ij}\Delta^{(1)}\xi^0 =^{(1)} \pi^{ij} = O(r^{-1-\varepsilon}),$$

$$g_{ij} - \delta_{ij} -^{(1)} g_{ij} = O(r^{-\delta}),$$

$$\pi^{ij} -^{(1)} \pi^{ij} = O(r^{-1-\delta}), \qquad \delta > \varepsilon.$$

Разложение ${}^{(1)}g_{ij}$ и ${}^{(1)}\pi^{ij}$ по формулам (1.25) дает

$$^{(1)}g^{TT}_{ij} = 0, \qquad ^{(1)}g^T = 0, \qquad ^{(1)}g_{i,j} =^{(1)} \xi_{i,j},$$

$$^{(1)}\pi^{ijTT} = 0, \qquad ^{(1)}\pi^{T} = -2\Delta^{(1)}\xi^{0}, \qquad ^{(1)}\pi^{i}{}_{,j} = 0,$$

т.е. можно найти

$$^{(1)}\xi^{0}{}_{,\alpha} = -\frac{1}{2\Delta}{}^{(1)}\pi^{ii}{}_{,\alpha}, \qquad ^{(1)}\xi_{i,\alpha} = \frac{1}{\Delta}\left({}^{(1)}g_{ik,k\alpha} - \frac{1}{2}{}^{(1)}g_{kk,i\alpha}\right).$$

Зная теперь в первом приближении параметры преобразований, мы можем восстановить с их помощью квадратичные члены и члены более высоких порядков, например:

$$g_{ij} = \delta_{ij} +^{(1)} \xi_{i,j} +^{(1)} \xi_{j,i} +^{(1)} \xi^{(1)}_{m,i}\xi_{m,j} -^{(1)} \xi^{(1)}_{0,i}\xi_{0,j} +^{(2)} g_{ij} + \dots .$$

Если после этого $^{(2)}g_{ij}$ и $^{(2)}\pi^{ij}$ убывают недостаточно быстро для выполнения (1.26), то они снова в старшем порядке имеют линеаризованный вид и процедура решения уравнений

$$^{(2)}\xi_{i,j} +^{(2)} \xi_{j,i} =^{(2)} g_{ij}, \qquad ^{(2)}\xi^{0}_{ij} - \delta_{ij}\Delta^{(2)}\xi^{0} =^{(2)} \pi^{ij}$$

повторяется. Так следует действовать до тех пор, пока мы не спустимся до асимптотики $O(r^{-1})$ в g_{ij} и $O(r^{-2})$ в π^{ij}. Разумеется, можно также использовать информацию о четности, чтобы прийти к условиям (1.15) или (1.22), (1.23). Таким образом, АДМ-разложение позволяет выделить вклады, возникающие от преобразований координат и времени и в случае медленного их убывания $0 < \varepsilon \leq 1/2$. Выполняя обратное преобразование, мы вернемся к асимптотическим условиям (1.26). Если внешняя кривизна гиперповерхности убывает достаточно быстро (1.16), можно ограничиться использованием найденной фоновой метрики.

1.7 Выводы

В этой главе была рассмотрена задача реализации алгебры группы Пуанкаре, действующей на пространственной бесконечности в каноническом формализме ОТО. Полученные выражения для скобок Пуассона генераторов с поверхностными членами общего вида позволили сформулировать координатно-независимым образом достаточные условия такой реализации. Группа Пуанкаре строится на основе вспомогательной фоновой плоской метрики гиперповерхности. Фоновая метрика, а следовательно и реализация группы Пуанкаре определяются неоднозначно, однако численные значения генераторов группы на решениях уравнений связи не зависят от произвола в ее выборе.

Описанное построение без труда распространяется на случай присутствия полей материи при обычных условиях их убывания на бесконечности, можно распространить его и на пространства с более сложной топологией, чем евклидова, имеющие "концы" с аналогичным асимптотическим поведением. Для случая асимптотически минковской метрики получено обобщение граничных условий, используемых в работах [1, 30], а также дан рецепт применения АДМ-разложения при медленно убывающем вкладе от преобразований координат и времени. Наши условия на бесконечности сходны с предложенными в работе [20], но являются более сильными, поскольку это требуется для конечности всех генераторов группы Пуанкаре, а не только генераторов трансляций.

Работа [32], на которой основано изложение в 1 главе, была написана в 1983 г. и опубликована в конце 1985 г. Она вызвала интерес [128, 129, 127] прежде всего в связи с новыми (ослабленными по сравнению с результатами Редже-Тейтельбойма [1]) граничными условиями для асимптотически плоского пространства-времени в декартовых координатах и в связи с предшествовавшей ей полемике с Л.Д. Фаддеевым [60]. Через 2 года была напечатана статья [126], в том, что касается граничных условий в декартовых координатах, повторившая результаты автора диссертации.

Другие новые результаты, такие как ковариантная постановка граничных условий, в дальнейшем не получили развития, вероятно, оттого что, по мнению большинства авторов, ковариантности лучше добиваться в рамках лагранжева, а не гамильтонова формализма. Применяется также подход, основанный на ковариантной симплектической формулировке (вместо симплектической формы используется соответствующая 4-векторная плотность).

Для автора диссертации опыт вычисления поверхностных членов в скобках Пуассона послужил толчком к дальнейшей работе в этом направлении, отраженной в главах 3-8 диссертации. Можно добавить, что в 1980-е годы почти никто не занимался подобными вычислениями, исключением являются синхронные работы Брауна и Энно [21, 22], на которые в 1980-х годах практически никто, кроме автора диссертации, не ссылался, и которые стали популярными сравнительно недавно, в связи с вычислениями энтропии черных дыр и идеей голографии.

Глава 2

Асимптотические законы сохранения

2.1 Постановка задачи

При изучении общей теории относительности (ОТО) быстро выяснилось, что нельзя построить тензор энергии-импульса гравитационного поля, а значит и сформулировать в привычном для теории поля виде закон сохранения энергии-импульса. Эта проблема обсуждалась самыми квалифицированными математиками того времени: Гильбертом [8], Клейном [9], Нетер [3] и др. В равной мере в дискуссии участвовали и физики: Эйнштейн [10], Шредингер и др. Наиболее убедительной с математической точки зрения представляется трактовка, следующая из классической работы Э. Нетер [3]. По словами "следующая из" имеется в виду, что в общие формулы Э. Нетер следует подставить конкретный лагранжиан ОТО, выраженный через метрику (или другие переменные) и ее производные. В этом случае применимы и первая и вторая теоремы Нетер и имеет место случай, названный Э. Нетер "несобственным законом сохранения".

Остановимся подробнее на разъяснении понятия "несобственный закон сохранения". Результаты Нетер изначально сформулированы в нековариантном виде (поскольку понятие дифференцируемого многообразия в то время еще не появилось), и "сохранение" означает обращение в ноль пространственно-временной дивергенции, т.е. суммы частных производных по всем координатам. Следуя процедуре первой теоремы Нетер (где в качестве группы инвариантности выбираем группу трансляций) мы можем построить такие величины и в общей теории относительности. Но они, во-первых, определены неоднозначно (с точностью до дивергенции произвольной антисимметричной по координатным индексам величины), а во-вторых, не являются компонентами тензора. Первая из этих особенностей, на самом деле, присуща всем теориям поля, и с ней справляются обычно простым рассуждением [28]: неоднозначность при интегрировании становится поверхностным интегралом, а он стремится к нулю, когда убывают поля, поэтому для изолированной системы сохраняющиеся величины (в данном случае - энергия и импульс) определены однозначно. Вторая особенность является специфической для ОТО и решающей. Но поскольку к задаче можно применить и вторую теорему Нетер (используя на этот раз инвариантность лагранжиана относительно произвольных преобразований координат, т.е. превращая постоянные параметры трансляций в произвольные функции координат), то имеют место тождества, связывающие уравнения движения и их производные (свернутые тождества Бианки). Благодаря этим тождествам оказывается возможным выразить "сохраняющиеся величины" прямо через уравнения движения, т.е. "сохраняющиеся величины" оказываются просто равными нулю на решениях. Таким образом, единственно возможными "сохраняющимися величинами" отличными от нуля являются неинвариантные (относительно общих преобразований координат) поверхностные интегралы.

Большинство физиков интерпретируют эти факты следующим образом [29]: в ОТО нет локального закона сохранения энергии-импульса, но в частных случаях могут иметь место глобальные законы сохранения. Эти частные случаи характеризуются определенными граничными условиями, которые допускают только те преобразования координат, которые оставляют их инвариантными. Тогда неинвариантные поверхностные интегралы могут стать инвариантными (относительно ограниченной группы преобразований). Альтернативная точка зрения состоит в том, что экспериментальных оснований для отказа от локальных законов сохранения энергии-импульса нет, а значит естественно будет пойти при построении теории гравитации по другому пути, опираясь на пространство Минковского [11].

Все вышесказанное никак не объясняет как же именно следует искать нужные поверхностные интегралы ("асимптотические интегралы движения"). В работе Редже и Тейтельбойма, написанной в 1974 году, был предложен рецепт, основанный на гамильтоновом формализме ОТО, непосредственно не связанный с методами Нетер. Мы обсуждали его в предыдущей главе.

В работах [33, 34], на содержании которых основана эта глава диссертации, был предложен новый подход, названный автором "глобальным подходом к теореме Нетер". Ниже мы изложим его основные особенности.

Во-первых, для поиска интегралов движения должны непосредственно использоваться граничные условия. Область пространства-времени, интеграл по которой от плотности лагранжиана равняется действию, должна быть ограничена двумя пространственноподобными гиперповерхностями одновременности и удаленной на пространственную бесконечность "трубой". Граничные условия, естественно, используются именно на этой "трубе". Они накладываются как на физические переменные (например, метрику), так и на асимптотически главные части преобразований координат.

Во-вторых, неоднозначность фиксируется так, что в роли компонент "тензора энергии-импульса" выступает линейная комбинация лагранжевых производных, т.е. величины, обращающиеся в ноль на решениях уравнений движения. При этом, кроме проблемы неоднозначности, снимается также проблема нековариантности.

В-третьих, оказывается, что при линеаризации полевых уравнений движения относительно некоторого фонового решения, обладающего точными симметриями, интеграл по "трубе" представляется в виде разности двух интегралов по ее границам. Эти границы в то же время являются и границами пространства в фиксированные моменты времени: начальный и конечный.

2.2 Применение к каноническому формализму общей теории относительности

Предложенное впервые Гильбертом [8] действие для гравитационного поля

$$I = \int_{\Omega} \sqrt{-{}^{(4)}g}\,{}^{(4)}R d^4x \tag{2.1}$$

инвариантно относительно произвольных гладких преобразований координат (диффеоморфизмов)

$$y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^{\beta}) \equiv x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}) \tag{2.2}$$

поскольку справедливо равенство

$$\int_{\Omega}\sqrt{-^{(4)}g(x)}^{(4)}R(x)d^4x = \int_{\Omega'}\sqrt{-^{(4)}g'(y)}^{(4)}R(y)d^4y$$

причем область Ω' пробегается переменными y^α, когда x^α пробегают область Ω. Очевидно, что если на границе области Ω преобразование (2.2) является тождественным, то Ω' совпадает с Ω.

Если действие (2.1) инвариантно при произвольном координатном преобразовании (2.2), то то же самое действие, записанное в каноническом виде

$$I = \int_{\Omega}(\pi^{ij}g_{ij,0} - N\mathcal{H} - N_i\mathcal{H}^i)d^4x + \tag{2.3}$$

$$\int_{\Omega}\left(\partial_0[-\pi] + \partial_k[-2\sqrt{g}N^{,k} - 2N_i(\pi^{ik} - g^{ik}\frac{\pi}{2})]\right)d^4x,$$

явно инвариантно лишь относительно более узкого класса замен координат

$$x'^0 = x^0 + \xi^0(x^0), \qquad x'^i = x^i + \xi^i(x^1, x^2, x^3). \tag{2.4}$$

Только учитывая связь между π^{ij} и $g_{ij,0}$, задаваемую соотношениями

$$g_{ij,0} = N_{i|j} + N_{j|i} + \frac{2N}{\sqrt{g}}(\pi_{ij} - g_{ij}\frac{\pi}{2}), \tag{2.5}$$

которые в гамильтоновом формализме являются уравнениями движения, можно говорить об инвариантности (2.3) относительно преобразований (2.2).

Рассмотрим вариацию действия при бесконечно малом преобразовании координат $x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$, $\delta x^\mu = \xi^\mu(x)$. Вариации полей можно записать в виде

$$\delta f(x) \equiv f'(x') - f(x) = (f'(x') - f(x')) + (f(x') - f(x)) \approx \bar{\delta}f(x) + f_{,\mu}\delta x^\mu,$$

где $\bar{\delta}$ коммутирует с производными по координатам. Конкретный вид δf зависит от геометрической структуры f, так что $\bar{\delta}f = -D_Lf$ (D_L — производная Ли). Например, для метрики и символов Кристоффеля получаем

$$\bar{\delta}^{(4)}g_{\mu\nu} = -^{(4)}g_{\alpha\nu}\xi^\alpha_{,\mu} -^{(4)} g_{\mu\alpha}\xi^\alpha_{,\nu} -^{(4)} g_{\mu\nu,\alpha}\xi^\alpha,$$

$$\bar{\delta}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = -^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta}\xi^{\delta}_{,\gamma} -^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\delta\gamma}\xi^{\delta}_{,\beta} +^{(4)}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}\xi^{\alpha}_{,\delta} - \xi^{\alpha}_{,\beta\gamma}.$$

Как будет видно ниже, см. (2.7), что касается δg_{ij}, δN, δN_i, $\delta\pi^{ij}$, то в этом случае ничего нельзя сказать, не используя явных выражений этих величин через 4-мерные ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$, ${}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$:

$$g_{ij} =^{(4)} g_{ij}, \qquad N = \left(-^{(4)}g^{00}\right)^{-1/2}, \qquad N_i = g_{ij}N^j,$$

$$N^j = -\frac{^{(4)}g^{0j}}{^{(4)}g^{00}}, \qquad \pi^{ij} = \sqrt{-^{(4)}g}(g^{ik}g^{j\ell} - g^{ij}g^{k\ell})^{(4)}\Gamma^{0}_{k\ell}.$$

Напротив, при (3+1)-преобразованиях (2.4) можно не оглядываться на 4-мерие, при этом

$$\delta g_{ij} = -g_{kj}\xi^k_{,i} - g_{ik}\xi^k_{,j}, \tag{2.6}$$
$$\delta N = -N\xi^0_{,0},$$
$$\delta N^i = -N^i\xi^0_{,0} + N^k\xi^i_{,k},$$
$$\delta\pi^{ij} = -\pi^{ij}\xi^k_{,k} + \pi^{ik}\xi^j_{,k} + \pi^{kj}\xi^i_{,k}.$$

Приведем общий вид коммутирующих вариаций $\bar{\delta}$ для преобразований (2.2)

$$\bar{\delta}g_{ij} = -g_{ij,0}\xi^0 - \underline{N_i\xi^0_{,j}} - \underline{N_j\xi^0_{,i}} - \xi_{i|j} - \xi_{j|i}, \tag{2.7}$$
$$\bar{\delta}g^{ij} = -g^{ij}_{\ \ ,0}\xi^0 + \underline{N^i\xi^{0,j}} + \underline{N^j\xi^{0,i}} + \xi^{i|j} + \xi^{j|i},$$
$$\bar{\delta}N = -(N\xi^0)_{,0} + \underline{NN^k\xi^0_{,k}} - N_{,k}\xi^k,$$
$$\bar{\delta}N_i = -(N_i\xi^0)_{,0} + \underline{(N^2 - N_kN^k)\xi^0_{,i}} - N_{i|k}\xi^k - N_k\xi^k_{|i} - \underline{g_{ik}\xi^k_{,0}},$$
$$\bar{\delta}\pi^{ij} = -\pi^{ij}_{\ \ ,0}\xi^0 + \underline{N\sqrt{g}\left(g^{ij}\xi^{0|k}_{\ \ \ |k} - \xi^{0|ij}\right)} - \underline{\sqrt{g}\left(N^{,i}\xi^{0,j} + N^{,j}\xi^{0,i}\right)} +$$
$$+\underline{\left(N^i\pi^{kj} + N^j\pi^{ki} - N^k\pi^{ij} + 2\sqrt{g}g^{ij}N^{,k}\right)\xi^0_{,k}} - \left(\pi^{ij}\xi^k\right)_{|k} + \pi^{ik}\xi^j_{\ |k} + \pi^{kj}\xi^i_{\ |k}.$$

Аналогичные выражения для (3+1)-преобразований получаются, если опустить подчеркнутые члены.

Вариация действия для двух вариантов отличается. В случае (3+1)-вариации имеем

$$^{(3+1)}\delta I = \delta\int L dt = \delta\int \mathcal{L}d^4x = \int\left[\bar{\delta}\mathcal{L} + (\mathcal{L}\xi^{\mu})_{,\mu}\right]d^4x =$$

$$= \int\left(\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta}N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta}N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta}g_{ik} + \frac{\delta L}{\delta\pi^{ik}}\bar{\delta}\pi^{ik} + \partial_{\alpha}{}^{(3+1)}J^{\alpha}\right)d^4x, \tag{2.8}$$

где

$$\frac{\delta L}{\delta N} = -\mathcal{H}, \qquad \frac{\delta L}{\delta N_i} = -\mathcal{H}^i,$$

$$\frac{\delta L}{\delta \pi^{ik}} = g_{ik,0} - N_{i|k} - N_{k|i} - \frac{2N}{\sqrt{g}}\left(\pi_{ik} - g_{ik}\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} = -\pi^{ik}{}_{,0} - N\sqrt{g}\left(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\right) + \sqrt{g}\left(N^{|ik} - g^{ik}N^{|m}{}_{|m}\right) +$$

$$+\frac{N}{\sqrt{g}}\left(\pi\pi^{ik} - 2\pi^{ij}\pi^k_j\right) - \frac{g^{ik}}{2}\frac{N}{\sqrt{g}}\left(\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2\right) +$$

$$+\left(N^m\pi^{ik} - N^i\pi^{km} - N^k\pi^{im}\right)_{|m}.$$

Стоящее под знаком дивергенции выражение имеет вид

$$^{(3+1)}J^0 = -\tau^0_0\xi^0 - \tau^0_k\xi^k + \mu^{0i}_k\xi^k{}_{|i}, \tag{2.9}$$

$$^{(3+1)}J^\ell = -\tau^\ell_0\xi^0 - \tau^\ell_k\xi^k + \mu^{\ell 0}_0\xi^0{}_{,0} + \mu^{\ell k}_i\xi^i{}_{|k} + \sigma^{\ell ik}{}_m\xi^m{}_{|ik}.$$

В случае 4-преобразований (2.2) нельзя считать $\delta L/\delta\pi^{ik}$ отличным от нуля, поскольку ранее мы уже воспользовались уравнением (2.5), которое равносильно $\delta L/\delta\pi^{ik} = 0$, при выводе формулы для $\delta\pi^{ik}$. В итоге получаем

$$^{(4)}\delta I = \int\left(\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta}N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta}N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta}g_{ik} + \frac{\delta L}{\delta\pi^{ik}}\bar{\delta}\pi^{ik} + \partial_\alpha{}^{(4)}J^\alpha\right)d^4x, \tag{2.10}$$

где

$$^{(4)}J^0 = -\tau^0_0\xi^0 - \tau^0_k\xi^k + \mu^{0k}_0\xi^0{}_{|k} + \mu^{0i}_k\xi^k{}_{|i} + \sigma^{0ik}_0\xi^0{}_{|ik},$$

$$^{(4)}J^\ell = -\tau^\ell_0\xi^0 - \tau^\ell_k\xi^k + \mu^{\ell 0}_0\xi^0{}_{,0} + \mu^{\ell k}_0\xi^0{}_{,k} + \mu^{\ell k}_i\xi^i{}_{|k} +$$

$$+\mu^{\ell 0}_k\xi^k{}_{,0} + \sigma^{\ell ik}_0\xi^0{}_{|ik} + \sigma^{\ell ik}{}_m\xi^m{}_{|ik} + \sigma^{\ell 0k}_0\xi^0{}_{,0k}.$$

Полезно также выразить $^{(4)}J^\alpha$ через частные производные от $\xi^\mu(x)$

$$^{(4)}J^\alpha = -\tilde{\tau}^\alpha_\beta\xi^\beta + \tilde{\mu}^{\alpha\gamma}_\beta\xi^\beta{}_{,\gamma} + \tilde{\sigma}^{\alpha\gamma\delta}_\beta\xi^\beta{}_{,\gamma\delta}. \tag{2.11}$$

Связь между этими представлениями дается формулами

$$\tilde{\tau}^\alpha_0 = \tau^\alpha_0, \quad \tilde{\tau}^0_k = \tau^0_k - \Gamma^p_{sk}\mu^{0s}_p, \quad \tilde{\mu}^{0k}_0 = \mu^{0k}_0 - \Gamma^k_{sp}\sigma^{0sp}_0,$$

$$\tilde{\tau}^\ell_k = -\tau^\ell_k - \Gamma^i_{ks}\mu^{\ell s}_i - \left(\Gamma^m_{ik,s} + \Gamma^m_{sp}\Gamma^p_{ik} - \Gamma^p_{is}\Gamma^m_{kp}\right)\sigma^{\ell is}_m,$$

$$\tilde{\mu}^{0k}_i = \mu^{0k}_i, \quad \tilde{\mu}^{\ell 0}_0 = \mu^{\ell 0}_0, \quad \tilde{\mu}^{\ell k}_0 = \mu^{\ell k}_0 - \Gamma^k_{is}\sigma^{\ell is}_0,$$

$$\tilde{\mu}^{\ell p}_s = \mu^{\ell p}_s + \left(\Gamma^m_{is}\delta^p_k + \Gamma^m_{ks}\delta^p_i - \Gamma^p_{ik}\delta^m_s\right)\sigma^{\ell ik}_m, \quad \tilde{\mu}^{\ell 0}_k = \mu^{\ell 0}_k,$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta\gamma}_\delta = \sigma^{\alpha\beta\gamma}_\delta.$$

2.2.1 Первая теорема Нетер

“Если интеграл I инвариантен по отношению к некоторой группе G_ρ, то ρ линейно независимых комбинаций лагранжевых выражений обращаются в дивергенции...” [3]

Поскольку I инвариантен при произвольной области интегрирования, выполняется равенство

$$\bar{\delta}\mathcal{L} + \left(\mathcal{L}\xi^\beta\right)_{,\beta} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при четырех различных постоянных величинах ξ^β, получаем 4 соотношения:

$$g_{ik,\beta}\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} + \pi^{ik}{}_{,\beta}\frac{\delta L}{\delta \pi^{ik}} + N_{,\beta}\frac{\delta L}{\delta N} + N_{i,\beta}\frac{\delta L}{\delta N_i} \equiv \tilde{\tau}^\alpha_{\beta,\alpha}.$$

Здесь 4- и (3+1)-подходы эквивалентны, поскольку при постоянных смещениях вариации $\delta f = 0$ независимо от геометрической структуры f и $\bar{\delta} f = -f_{,\mu}\delta x^\mu$.

Если изменить действие на поверхностный член, зависящий от g_{ik}, π^{ik}, N, N_i но не зависящий явным образом от координат, то условия теоремы останутся в силе, и мы получим новое тождество, в котором, однако, левая часть не изменится. Это означает, что и правые части будут равны

$$\tilde{\tau}^\alpha_{\beta,\alpha} \equiv \tilde{\tilde{\tau}}^\alpha_{\beta,\alpha} \tag{2.12}$$

т.е. псевдотензоры могут отличаться только на выражение, дивергенция которого равна нулю тождественно. Для глобального подхода, который будет излагаться ниже, это будет означать эквивалентность всех псевдотензоров, и соответственно, несущественность поверхностных членов в действии.

Приведем выражение для $\tilde{\tau}^\alpha_\beta$, полученное из ${}^{(4)}J^\alpha$

$$\tilde{\tau}^0_0 = \underline{N\mathcal{H} + N_i\mathcal{H}^i} + \underline{\underline{2\left[\sqrt{g}N^{,k} + N_i(\pi^{ik} - g^{ik}\frac{\pi}{2})\right]_{,k}}},$$

$$\tilde{\tau}^0_k = \underline{\mathcal{H}_k} + 2\pi^i_{k,i} - \underline{\underline{\pi_{,k}}},$$

$$\tilde{\tau}_0^\ell = G^{ikm\ell}\left(N g_{ik,0|m} - N_{,m} g_{ik,0}\right) + 2N_i \pi^{i\ell}{}_{,0} +$$

$$+\left(N^m \pi^{k\ell} + N^k \pi^{m\ell} - N^\ell \pi^{km}\right) g_{km,0} - \underline{\underline{2\left[\sqrt{g} N^{,\ell} + N_i(\pi^{i\ell} - g^{i\ell}\frac{\pi}{2})\right]_{,0}}},$$

$$\tilde{\tau}_s^\ell = G^{ikm\ell}\left[N\left(g_{ik,sm} - \Gamma^p_{mi} g_{pk,s} - \Gamma^p_{mk} g_{ip,s}\right) - N_{,m} g_{ik,s}\right] +$$

$$+2N_i \pi^{i\ell}{}_{,s} + \left(N^m \pi^{k\ell} + N^k \pi^{m\ell} - N^\ell \pi^{km}\right) g_{km,s} -$$

$$-\left(\pi^{ij} g_{ij,0} - \underline{N\mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i}\right)\delta_s^\ell +$$

$$\underline{\underline{+\{\pi_{,0} + 2\left[\sqrt{g} N^{,m} + N_i\left(\pi^{im} - g^{im}\frac{\pi}{2}\right)\right]\}\delta_s^\ell -}}$$

$$\underline{\underline{--2\left[\sqrt{g} N^{,\ell} + N_i\left(\pi^{i\ell} - g^{i\ell}\frac{\pi}{2}\right)\right]_{,s}}},$$

где

$$G^{ik\ell m} = \frac{\sqrt{g}}{2}\left(g^{i\ell} g^{km} + g^{im} g^{k\ell} - 2g^{ik} g^{\ell m}\right),$$

одной чертой подчеркнуты линейные комбинации связей, двумя чертами — члены, образующие дивергенцию антисимметричной величины, возникшие из-за присутствия в $\mathcal{L}$ поверхностного члена.

2.2.2 Вторая теорема Нетер

"Если интеграл I инвариантен по отношению к группе $G_{\infty\rho}$, в которой встречаются производные до σ-производной, то имеют место ρ тождественных соотношений между лагранжевыми выражениями и их производными до порядка σ ..." [3].

В равенстве

$$\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta} N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta} N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta} g_{ik} + \partial_\alpha{}^{(4)}J^\alpha = 0$$

подставим вместо $\bar{\delta} N,\ \bar{\delta} N_i,\ \bar{\delta} g_{ik}$ их выражения (2.7) и перебросим производные с $\xi^\mu(x)$ на лагранжевы выражения, выделив возникающую при этом полную дивергенцию

$$\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta} N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta} N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta} g_{ik} = {}^{(4)}B_\mu \xi^\mu + \partial_\mu{}^{(4)}S^\mu.$$

Рассмотрим теперь только те $\xi^\mu(x)$, которые обращаются в нуль на границе области интегрирования вместе с первыми и вторыми производными, а внутри произвольны. Тогда видим, что должны иметь место тождества ${}^{(4)}B_\mu = 0$:

$$N\left(\frac{\delta L}{\delta N}\right)_{,0} + N_i\left(\frac{\delta L}{\delta N_i}\right)_{,0} - g_{ik,0}\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} +$$

$$+\left[2N_i\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} - NN^k\frac{\delta L}{\delta N} - (N^2 - N_iN^i)\frac{\delta L}{\delta N_k}\right]_{,k} = 0,$$

$$-N_{,k}\frac{\delta L}{\delta N} - N_{i|k}\frac{\delta L}{\delta N_i} + \left(g_{ik}\frac{\delta L}{\delta N_i}\right)_{,0} + \left[N_k\frac{\delta L}{\delta N_i} + 2g_{k\ell}\frac{\delta L}{\delta g_{i\ell}}\right]_{|i} = 0.$$

Воспользовавшись формулами (2.6), получаем для (3+1)-подхода

$$\frac{\delta L}{\delta N}\bar\delta N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar\delta N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar\delta g_{ik} + \frac{\delta L}{\delta \pi^{ik}}\bar\delta\pi^{ik} = {}^{(3+1)}B_\mu\xi^\mu + \partial_\mu{}^{(3+1)}S^\mu,$$

где

$${}^{(3+1)}S^0 = -{}^{(3+1)}t_0^0\xi^0, \quad {}^{(3+1)}t_0^0 = -N\mathcal{H} - N_i\mathcal{H}^i, \quad {}^{(3+1)}S^i = -{}^{(3+1)}t_k^i\xi^k,$$
$${}^{(3+1)}t_k^i = -N_k\mathcal{H}^i + 2g_{k\ell}\frac{\delta L}{\delta g_{i\ell}} + (-\pi^{\ell i}\delta_k^m + \pi^{\ell m}\delta_k^i)\frac{\delta L}{\delta \pi^{\ell m}}.$$

Заметим здесь, что нельзя обратить в нуль на границах 4-мерной области интегрирования и $\xi^0(x^0)$, и $\xi^k(x^i)$, так чтобы внутри они остались произвольными. Поэтому приходится рассматривать их по отдельности:

1-инвариантность $\delta x^0 = \xi^0(x^0)$, $\delta x^k = 0$

3-инвариантность $\delta x^0 = 0$, $\delta x^k = \xi^k(x^i)$.

В первом случае получаем тождество

$${}^{(3+1)}B_0 - \tau^\ell_{0,\ell} - \mu^{\ell 0}_{0,\ \ell 0} = 0,$$

где τ_0^ℓ и $\mu_0^{\ell 0}$ взяты из ${}^{(3+1)}J^\ell$, во втором — 3 тождества:

$${}^{(3+1)}B_k - \tau^0_{k,0} - \mu^{0i}_{k,\ 0|i} + \mu^{0i}_\ell\Gamma^\ell_{ik,0} = 0,$$

где используются τ_k^0, μ_k^{0i} из ${}^{(3+1)}J^0$.

2.2.3 Несобственный закон сохранения

Пусть теперь $\xi^\mu(x)$ и производные не равны нулю на границе области интегрирования. Тогда, поскольку ${}^{(4)}B_\mu = 0$, получаем

$$\partial_\alpha \left({}^{(4)}J^\alpha + {}^{(4)}S^\alpha\right) = 0, \tag{2.13}$$

где

$$ {}^{(4)}S^\alpha = -t^\alpha_\beta \xi^\beta, \quad t^0_0 = -N\mathcal{H} - N_i \mathcal{H}^i, \quad t^0_k = -\mathcal{H}_k,$$
$$ t^k_0 = 2N_i \frac{\delta L}{\delta g_{ik}} + NN^k \mathcal{H} + (N^2 - N_\ell N^\ell)\mathcal{H}^k, \quad t^k_\ell = -N_\ell \mathcal{H}^k + 2g_{i\ell}\frac{\delta L}{\delta g_{ik}}.$$

Ввиду линейной независимости функций $\xi^\mu(x)$ и их производных соотношение (2.13) распадается на следующие тождества:

$$\partial_\alpha \tilde{\tau}^\alpha_\beta = -\partial_\alpha t^\alpha_\beta, \tag{2.14}$$

$$\tilde{\tau}^\alpha_\beta + t^\alpha_\beta = \tilde{\mu}^{\gamma\alpha}_{\beta\ ,\gamma}, \tag{2.15}$$

$$\tilde{\mu}^{\{\alpha\gamma\}}_\beta = -\tilde{\sigma}^{\delta\{\alpha\gamma\}}_{\beta,\delta}, \tag{2.16}$$

$$\tilde{\sigma}^{\{\alpha\gamma\delta\}}_\beta = 0. \tag{2.17}$$

Здесь фигурные скобки обозначают симметризацию, а квадратные (ниже) — антисимметризацию по соответствующим индексам. Учитывая (2.16), можно представить (2.15) в виде

$$\tilde{\tau}^\alpha_\beta = -t^\alpha_\beta + \tilde{\mu}^{[\gamma\alpha]}_{\beta,\gamma} + \frac{1}{2}\sigma^{\alpha\{\gamma\delta\}}_{\beta,\gamma\delta},$$

откуда с учетом (2.17) следует (2.14). Псевдотензор, таким образом, тождественно равен линейным комбинациям лагранжевых выражений плюс выражение, дивергенция которого тождественно исчезает. Это его свойство и было названо в работе [3] несобственным законом сохранения.

Отметим, что для глобального анализа важную роль будет играть тождество (2.14), поскольку для перехода к интегральной форме нужно интегрировать $\partial_\alpha \tau^\alpha_\beta$ по 4-мерному объему, и (2.14) означает, что можно вместо дивергенции псевдотензора интегрировать дивергенцию от определенной линейной комбинации лагранжевых производных. Заметим, что в общековариантном формализме аналогом (2.14) будет тождество

$$\partial_\mu \tau^\mu_\nu = -\partial_\mu \left(2^{(4)}g_{\nu\alpha} \frac{\delta L}{\delta^{(4)} g_{\alpha\mu}} \right). \tag{2.18}$$

В сущности, псевдотензором можно называть любую величину τ^μ_ν, для которой справедливо (2.18), и различные псевдотензоры могут быть получены непосредственно из уравнений движения ОТО в общековариантном формализме. Для этого нужно только выделять выражения, имеющие тождественно равную нулю дивергенцию и являющиеся тензорными плотностями при линейных преобразованиях координат пространства-времени. В уравнениях электродинамики есть только одна подобная величина: $F^{\mu\nu}{}_{,\nu}$, в уравнениях Янга-Миллса — две $\vec{F}^{\mu\nu}{}_{,\nu}$ и $\partial_\nu(\partial^\mu \vec{A}^\nu - \partial^\nu \vec{A}^\mu)$, В ОТО, в силу неполиномиальности уравнений, число таких величин, а следовательно, и псевдотензоров, бесконечно.

Наконец заметим, что в (3+1)-подходе тождеств получается меньше. Например, вместо ${}^{(4)}t^\alpha_\beta$ появляются только ${}^{(3+1)}t^0_0$ и ${}^{(3+1)}t^i_k$, нет тождества, аналогичного

$$\partial_\alpha {}^{(4)}J^\alpha = \partial_\alpha \left({}^{(4)}t^\alpha_\beta \xi^\beta \right). \tag{2.19}$$

2.2.4 Глобальный подход и сохранение поверхностных интегралов

Рассмотрим область 4-объема, лежащую между двумя пространственно-подобными гиперповерхностями, на бесконечности переходящими в гиперплоскости. Эта область является пределом последовательности конечных областей, подобных изображенной на Рис. 2.1, при $r \to \infty$. Параметр r может выбираться инвариантным образом, ибо на гиперповерхности с положительно определенной метрикой естественным образом вводится понятие расстояния от какой-либо одной фиксированной точки как нижняя грань длин кривых, соединяющих произвольную точку с фиксированной и лежащих на этой гиперповерхности. Можно понимать

r и как построенную в асимптотически декартовых координатах комбинацию $\sqrt{x^i x^i}$. Различие между этими определениями сводится к асимптотически несущественному преобразованию координат (из группы G_0), поскольку, приняв например граничные условия (1.22), мы получаем

$$r_{\text{inv}} = \int ds = \int \sqrt{1 + \Phi_{ij} n^i n^j} dr = r + O^+(r^{1-\varepsilon}) + O^-(r^{1-\delta}) = r(1 + o(1)).$$

При формулировке глобального подхода в инвариантной вариационной задаче приходится иметь дело с двумя предельными переходами: $r \to \infty$ и $\delta\xi^\alpha(x) \to 0$. Порядок их выполнения может иметь значение при медленном убывании полей, т.е. в присутствии поверхностных интегралов. В нашем подходе сначала для конечной области отбрасываются бесконечно малые выше первого порядка по $\delta\xi^\alpha(x)$, а затем делается предельный переход $r \to \infty$, т.е. отбрасываются члены, достаточно быстро убывающие на бесконечности. При этом, в принципе, допустимо рассматривать и расходящийся интеграл действия, если его вариация конечна и разбивается на конечные части. Будем использовать асимптотически декартовы координаты. Условия (1.22) при инвариантном относительно группы Пуанкаре распространении их на ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ имеют вид

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = O^+(r^{-\varepsilon}) + O^-(r^{-\delta}), \qquad g_{\mu\nu,\alpha} = O^-(r^{-1-\varepsilon}) + O^+(r^{-1-\delta}), \tag{2.20}$$

$$g_{\mu\nu,\alpha\beta} = O^+(r^{-2-\varepsilon}) + O^-(r^{-2-\delta}), \qquad \delta > 1,\ |\varepsilon - \delta| \le 1,\ \varepsilon + \delta > 2.$$

Таким образом, условия (1.22) дополняются ограничениями на $N,\ N_i$

$$N - 1 = O^+(x^{-\varepsilon}) + O^-(r^{-\delta}) = N_i,$$

причем два первых дифференцирования понижают порядок на r^{-1} и меняют четность. Бесконечно малые преобразования координат будем считать принадлежащими асимптотической группе Пуанкаре, т.е. сохраняющими условия (2.20) на бесконечности. Тогда в вариации действия (2.10) или (2.8) при предельном переходе $r \to \infty$ к интегрированию по бесконечному пространству получаем асимптотическое поведение

$$\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta} N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta} N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta} g_{ik} = O^+(r^{-2-2\varepsilon}) + O^+(r^{-2-2\delta}) + O^-(r^{-2-\varepsilon-\delta}),$$

которое при $\varepsilon > 1/2,\ \delta > 1$ обеспечивает сходимость интеграла. Ниже будет доказано, что вклад дивергенции $\partial_\alpha J^\alpha$ тоже конечен.

Представим интеграл от $\partial_\alpha J^\alpha$ по области Ω в виде поверхностного интеграла по $\partial\Omega = (\partial\Omega)_1 \cup (\partial\Omega)_2 \cup (\partial\Omega)_3$

$$\int_\Omega \partial_\alpha J^\alpha d^4x = \oint_{\partial\Omega} J^\alpha dS_\alpha = \int_{(\partial\Omega)_1} + \int_{(\partial\Omega)_2} + \int_{(\partial\Omega)_3}, \tag{2.21}$$

где J^α можно представить либо в ковариантном виде (2.19), либо в псевдотензорном (2.11), (2.9). Напомним, что в (3+1)-подходе, где допускаются только преобразования вида (2.4), поверхностные члены в действии (2.3) инвариантны сами по себе, и действие останется инвариантным, если мы их опустим. В то же время в (3+1)-подходе нет тождества (2.19) и возможен только псевдотензорный способ записи (2.9). Наконец, (3+1)-подход с учетом условий (2.2) допускает только преобразования

$$\xi^0 = \xi^0(\infty) = \mathrm{const}, \quad \xi^k = A^k{}_\ell x^\ell + a^k + \eta^k(x^1, x^2, x^3),$$

где $\eta^k = O^-(r^{1-\varepsilon}) + O^+(r^{1-\delta})$ и выполняются условия

$$\xi^\alpha = O^-(r^{1-\varepsilon}) + O^+(r^{1-\delta}), \qquad \varepsilon > 0,\ \delta > 1,$$

т.е. в схему не удается включить бусты.

Рассмотрим теперь интеграл по $(\partial\Omega)_3$ в (2.21), воспользуемся (2.19)

$$\int_{(\partial\Omega)_3} J^\alpha dS_\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \oint (t_0^k \xi^0 + t_\ell^k \xi^\ell) dS_k. \tag{2.22}$$

и разложим подинтегральное выражение по степеням разности $g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$. Линейные члены, состоящие из вторых производных $g_{\mu\nu,\alpha\beta}$, имеют асимптотику

$$\left(t_0^k\right)^L = -2\pi^{ik}{}_{,i} \equiv \partial_0(\Phi_{ik,i} - \Phi_{ii,k}) + (N_{k,ii} - N_{i,ik}) = O^+(r^{-2-\varepsilon}) + O^-(r^{-2-\delta}),$$

$$\left(t_\ell^k\right)^L = -2\pi^{k\ell}{}_{,0} - \frac{1}{2}(\bar\Phi_{ki,\ell i} + \bar\Phi_{\ell i,ki} - \bar\Phi_{k\ell,ii} - \delta_{k\ell}\bar\Phi_{ij,ij}) +$$
$$+ (N_{,k\ell} - \delta_{k\ell} N_{,ii}) = O^+(r^{-2-\varepsilon}) + O^-(r^{-2-\delta}),$$

где $\bar\Phi_{ij} = \Phi_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\Phi_{kk}$. Среди остальных членов доминируют квадратичные с асимптотикой

$$t_0^k - (t_0^k)^L = O^+(r^{-2-2\varepsilon}) + O^+(r^{-2-2\delta}) + O^-(r^{-2-\varepsilon-\delta}) = t_\ell^k - (t_\ell^k)^L \tag{2.23}$$

Интегрированием по частям можно вынести некоторые члены на границу области $(\partial\Omega)_3$, т.е. на $\partial(\partial\Omega)_3 = \partial(\partial\Omega)_1 \cup \partial(\partial\Omega)_2$. Для этого следует выделять в подинтегральном выражении (2.22) производные по времени. Если не принимать в расчет граничные условия, то такое выделение столь же неоднозначно, как и введение псевдотензора энергии-импульса. Однако при выбранных условиях на бесконечности (2.20) и при $\xi^\alpha(x) = \omega^\alpha{}_\beta x^\beta + a^\alpha + O^-(r^{1-\varepsilon}) + O^+(r^{1-\delta})$ подинтегральные выражения в (2.22) линеаризуются и выносимые на $\partial(\partial\Omega)_3$ величины определяются однозначно. Та часть $\xi^\alpha(x)$, которая относится к подгруппе G_0, вовсе не дает вклада в (2.22) и поэтому в этом интеграле можно принять

$$\xi^0 = \omega^0{}_k x^k + a^0, \quad \xi^\ell = \omega^\ell{}_0 x^0 + \omega^\ell{}_k x^k + a^\ell. \tag{2.24}$$

Эти выводы следуют из того, что выделением производных по времени из (2.23) получаем в интегралах по $(\partial\Omega)_3$ выражения с асимптотикой $O^-(r^{-1-2\varepsilon}) + O^-(r^{-1-2\delta}) + O^+(r^{-1-\varepsilon-\delta})$, а умножение их на $\xi^\alpha(x)$ дает $O^+(r^{-2\varepsilon}) + O^+(r^{-2\delta}) + O^-(r^{-\varepsilon-\delta}) + O^-(r^{-1-2\varepsilon}) + O^-(r^{-1-2\delta})$. Поскольку для ε, δ справедливы неравенства из (2.20), все интегралы оказываются равными нулю и вклад дают только линейные члены, причем он полностью сводится к интегралу по $(\partial\Omega)_3$. Мы получаем из (2.22)

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \oint t^k_0 \xi^0 dS_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \{-\partial_0[(\Phi_{ik,i} - \Phi_{ii,k})\xi^0] + (N_{k,ii} - N_{i,ik})\xi^0\} dS_k, \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \oint t^k_\ell \xi^\ell dS_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint \{&-\partial_0[-2\pi^{k\ell}\xi_\ell + (\Phi_{k\ell} - \delta_{k\ell}\Phi_{ii})\xi^\ell_{,0}] + \\ &+ (\delta_{k\ell} 2N_{i,i} - N_{k,\ell} - N_{\ell,k})\xi^\ell_{,0}\} dS_k. \end{aligned} \tag{2.26}$$

При сложении (2.25) и (2.26) члены, не являющиеся полными производными по времени, сокращаются между собой, и таким образом,

$$\int_{(\partial\Omega)_3} J^\alpha dS_\alpha = \oint \left[-2\pi^{k\ell}\xi_\ell - (\Phi_{ik,i} - \Phi_{ii,k})\xi^0 + (\Phi_{k\ell} - \delta_{k\ell}\Phi_{ii})\xi^\ell_{,0}\right] dS_k \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Воспользовавшись (2.24) получаем общую формулу для вариации действия

$$\delta I = \int \left(\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta} N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta} N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta} g_{ik} \right) d^4x - H(\xi^\alpha)\Big|_{t_1}^{t_2},$$

причем

$$H(\xi^\alpha) = \int (N\mathcal{H} + N_i\mathcal{H}^i)\xi^0 d^3x + \int \mathcal{H}_k \xi^k d^3x + \tag{2.27}$$

$$+P^0 a^0 - P^i a^i - M^k A_k - \frac{1}{2} M^{ik} A_{ik},$$

где P^0, P^i, M^k, M^{ik} задаются формулами (1.21), а

$$A_k = \omega^0{}_k, \qquad A_{ik} = \omega_{ik}.$$

Численные значения генератора $H(\xi^\alpha)$ на решениях уравнений связи совпадают с полученными в главе 1 и поэтому, как там доказано, конечны и не зависят от преобразований из G_0. При рассмотрении использовались асимптотически декартовы координаты, но линеаризация может быть проведена и в других системах координат на гиперповерхности.

Гамильтониан в обычном смысле, т.е. генератор трансляций по времени, имеет вид

$$H = \int (N\mathcal{H} + N_i\mathcal{H}^i) d^3x + \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i}) dS_i.$$

Нетрудно заметить, что обычное преобразование Лежандра определяет его лишь с точностью до поверхностных членов. Ведь действие (2.3) при условии (2.20) содержит поверхностные члены

$$\int (-\pi_{,0} - 2N_{,kk}) d^4x,$$

которые необходимы для инвариантности действия относительно преобразований (2.2). Вариация этих членов при произвольном преобразовании координат из асимптотической группы Пуанкаре будет иметь вид

$$\int \pi N^k \xi^0{}_{,k} d^3x|_{t_1}^{t_2}$$

и следовательно, при произвольных $\xi^0{}_{,k} \neq 0$ отлична от нуля. Эта вариация обратится в нуль только для более узкого класса преобразований $\xi^0 =$const. Член $-\int \pi_{,0} d^4x$ можно интерпретировать как производящую функцию канонического преобразования, меняющего местами координаты и импульсы

$$g_{ij} \to \pi^{ij}, \qquad \pi^{ij} \to -g_{ij}.$$

Этот член, если не учитывать уравнения движения, является единственным потенциально расходящимся при граничных условиях (1.22), (1.23) или (2.20). Преобразование Лежандра

$$\int (-g_{ij}\pi^{ij}{}_{,0}d^3x - L = \int (N\mathcal{H} + N_i\mathcal{H}^i)d^3x + \oint 2N_{,k}dS_k,$$

таким образом, не дает нам правильного гамильтониана, причем

$$\oint 2N_{,k}dS_k \neq \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i})dS_i$$

даже при учете уравнений связи.

Другой заслуживающий упоминания результат состоит в том, что

$$P_\mu \neq \int \tau^0_\mu d^3x.$$

Он, однако, не должен никого удивлять, поскольку псевдотензор в ОТО не имеет физического смысла. Выше мы уже пришли к выводу, что все псевдотензоры эквивалентны с точки зрения получения из них интегральных соотношений в силу (2.12). Концепция псевдотензора в глобальном подходе является излишней, важен лишь вид $\partial_\alpha J^\alpha$ в целом.

Из всего содержания этой главы видно, что действие Гильберта (2.1) является инвариантным при общих преобразованиях координат, и в частности, в случае асимптотически плоского пространства-времени (2.20) при преобразованиях асимптотической группы Пуанкаре. В этом случае предложенный Нетер [3] метод исследования инвариантной вариационной задачи, дополненный учетом асимптотических условий, приводит к нахождению генераторов асимптотической группы Пуанкаре. На решениях уравнений связи численные значения генераторов однозначно определены и выражаются поверхностными интегралами по бесконечно удаленной двумерной поверхности.

Несомненно, что асимптотические условия Редже-Тейтельбойма [1] (1.15) или более общие условия (1.22) не исключают возможной расходимости интеграла действия вне его экстремалей. Однако это не является препятствием ни для получения из (2.1) уравнений движения, ни для применения метода Нетер. Расходимость при условиях (1.15) может возникнуть исключительно из-за нединамического вклада полной производной по времени $-\int \pi_{,0} d^4x$. В работе [17] приводится аргументация в пользу отбрасывания этого члена в лагранжиане для удобства перехода к гамильтонову формализму, поскольку именно в нем содержатся нежелательные переменные: первые производные по времени от N, N_i и вторые от g_{ij}. Что касается пространственных дивергенций, т.е. вторых производных по пространственным координатам, то их присутствие, согласно [17], не создает никаких затруднений.

Разумеется, как уже говорилось выше, использование вариационного принципа Редже-Тейтельбойма приводит к исключению произвола в добавлении поверхностных членов. Однако в этой главе данный принцип не используется.

2.3 Применение к электродинамике

Для сравнения продемонстрируем возможности глобального подхода в применении метода Нетер к электродинамике. Источником заряда пусть является скалярное поле. Имеет место инвариантность относительно калибровочных преобразований. Плотность соответствующего лагранжиана имеет вид

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi D^\mu \phi^\star - m^2 \phi \phi^\star - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

где

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi, \; D_\mu \phi^\star = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^\star, \; F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Калибровочные преобразования

$$\phi \to \phi e^{i\alpha(x)} \simeq \phi + ie\alpha(x)\phi,$$

$$\phi^\star \to \phi^\star e^{-i\alpha(x)} \simeq \phi^\star - ie\alpha(x)\phi^\star,$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x)$$

ограничим требованием сохранения на бесконечности условий

$$A_\mu = O^+(r^{-\varepsilon}) + O^-(r^{-\delta}),$$

$$\partial_\nu A_\mu = O^-(r^{-1-\varepsilon}) + O^+(r^{-1-\delta}) = F_{\mu\nu}, \quad \varepsilon > 0,\ \delta > 0,$$

тогда должно быть

$$\alpha(x) = \alpha(\infty) + O^-(r^{1-\varepsilon}) + O^+(r^{1-\delta}),$$

$$\partial_\mu \alpha(x) = O^+(r^{-\varepsilon}) + O^-(r^{-\delta}),$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \alpha(x) = O^-(r^{-1-\varepsilon}) + O^+(r^{-1-\delta}),$$

Требование релятивистской инвариантности условий дает $|\varepsilon - \delta| \leq 1$. Требование включения решений связи $\varepsilon \leq 1$. Вариация действия, вызванная калибровочным преобразованием

$$\delta I = \int \left(\frac{\delta L}{\delta \phi} \delta\phi + \frac{\delta L}{\delta \phi^\star} \delta\phi^\star + \frac{\delta L}{\delta A_\mu} \delta A_\mu + \partial_\mu J^\mu \right) d^4x$$

содержит дивергенциальный член, который при $|\varepsilon - \delta| \leq 1$, $\varepsilon + \delta > 2$ сводится к виду

$$\int \partial_\mu J^\mu d^4x = \left[\int (j^0 - F^{0k}{}_{,k}) \alpha(x) d^3x + Q\alpha(\infty) \right]_{t_1}^{t_2}, \tag{2.28}$$

в предположении быстрого убывания полей ϕ, $\phi^\star$. Здесь

$$j^0 = ie\phi \overleftrightarrow{D^0} \phi^\star, \qquad Q = \oint F^{0k} dS_k$$

и интеграл берется по бесконечно удаленной поверхности.

Видно, что (2.27) и (2.28) имеют сходное строение. Генераторами собственных (в смысле [18]) преобразований являются связи, а несобственных — связи с добавлением поверхностных интегралов. Таким образом, изложенный в настоящей главе диссертации подход позволяет решать задачу нахождения генераторов неубывающих на бесконечности преобразований (или законов сохранения поверхностных интегралов — асимптотических законов сохранения) в различных теориях с медленным убыванием полей на бесконечности.

2.4 Выводы

Работы [33, 34], на которых основана данная глава, были опубликованы в начале 1980-х годов, причем лишь в виде препринтов на русском языке. Поэтому неудивительно, что они не получили отклика. Новые идеи, содержавшиеся в этих статьях были заново переоткрыты в 1996 г. Андерсоном и Торре [121] на основе математического аппарата вариационного бикомплекса [90]. Изложение автора основано на координатных обозначениях, в то время как работы [121, 122] используют инвариантные дифференциальные формы.

Данное направление вызвало интерес у математиков, обсуждалось, например, на семинаре института Diffiety (Москва, 2002 г.). Интересные работы опубликованы также брюссельской группой [123].

Основные выводы работ [121, 122, 123] аналогичны результатам данной главы (но сформулированы в более общей форме): асимптотические законы сохранения возникают в калибровочно (или координатно) инвариантных теориях при наличии граничных условий, обеспечивающих линеаризацию уравнений движения, проинтегрированных (вместе с преобразованиями симметрии фона, около которого выполнена линеаризация) по 3-мерной гиперповерхности “трубы”, удаленной в асимптотическую область.

Конкретно, различия выражаются в том, что если у автора диссертации подинтегральное выражение в интеграле по поверхности “трубы” приводилось к виду производной по временно́й координате $x^0 = t$, то у Андерсона и др. [121, 122, 123] оно приводится к дифференциалу горизонтальной 2-формы. В первом случае, нековариантно, во втором — в ковариантных обозначениях, это так или иначе позволяет свести интеграл по “трубе” к разности интегралов по ее краям — 2-мерным пространственноподобным поверхностям. Эти интегралы и являются асимптотически сохраняющимися величинами.

Рис. 2.1: Область интегрирования в пространстве-времени.

Глава 3

Скобки Пуассона, удовлетворяющие тождеству Якоби точно

3.1 Постановка задачи

Канонический формализм теории поля обладает особенностями, которых нет в механике. Необходимость иметь дело с величинами, которые получаются интегрированием по некоторой области пространства, и интегрировать по частям приводит к появлению в гамильтониане и (или) в скобках Пуассона поверхностных интегралов. Математики обычно предпочитают игнорировать все возможные поверхностные члены и строят свое так называемое "формальное вариационное исчисление" путем отождествления подинтегральных выражений, отличающихся дивергенциями [84]. Но в теории поля бывают случаи, когда поверхностные члены не обращаются в нуль и имеют физический смысл. Эта глава вместе со следующей посвящена распространению гамильтонова формализма на дивергенциальные члены или, иначе говоря, обобщению формального вариационного исчисления.

Кажется естественным требовать, чтобы для замкнутых систем граничные значения переменных выступали на равных основаниях с их внутренними значениями и определялись только начальными условиями и динамическими уравнениями. В этой главе мы отказываемся от каких-либо нединамических граничных условий, по крайней мере, на первом этапе исследования. В дальнейшем они могут быть восстановлены как и любые другие связи, налагаемые на начальные данные для динамических переменных. Мы надеемся, что такой подход будет полезен для решения некоторых физических задач, которые не могут быть решены иными методами. Таким образом, хотя рассматриваемая в этой и следующей главах проблема является математической, наши мотивы остаются физическими.

Напомним сначала о некоторых важных предыдущих результатах, имеющих отношение к проблеме.

В известной работе Редже и Тейтельбойма [1] было показано, что для того чтобы гамильтонова динамика гравитационного поля в асимптотически-плоском пространстве-времени существовала и не была тривиальной, необходимо включить в гамильтониан поверхностные интегралы специального вида. Эта работа также содержит, хотя и не в явной форме, признание физического смысла поверхностных интегралов, возникающих при вычислении скобок Пуассона, так как было обнаружено, что они находятся в соответствии с поверхностными членами в гамильтониане, выражающемся в виде алгебры:

$$\{H(N, N^i), H(M, M^j)\} = H(L, L^k),$$

где

$$L = N^i M_{,i} - M^i N_{,i},$$

$$L^k = \gamma^{kl}(NM_{,l} - MN_{,l}) + N^l M^k{}_{,l} - M^l N^k{}_{,l},$$

и на канонические переменные γ_{ij}, π^{ij} и функции $N(x)$, $M(x)$, $N^i(x)$, $M^j(x)$ наложены общепринятые граничные условия. В главе 1 и в нашей работе [32] было показано, что это соответствие может быть использовано при более общих граничных условиях для явного вычисления поверхностных членов в гамильтониане. Сущностью метода была независимость формально определенных канонических скобок Пуассона

$$\{F, G\} = \int \left[\frac{\delta F}{\delta \gamma_{ij}(x)} \frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}(x)} - \frac{\delta G}{\delta \gamma_{ij}(x)} \frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}(x)} \right] d^3x,$$

от поверхностных интегралов в гамильтонианах F и G. Это свойство стандартных скобок Пуассона полностью аналогично другому, упомянутому в книге Арнольда о классической механике [87], где две функции, определенные лишь с точностью до постоянных, позволяют вычислить их скобку Пуассона точно, а не с точностью до постоянной. Итак, если в механике ядро скобки Пуассона состоит из констант, в теории поля ядро для обычной скобки включает также поверхностные члены.

В статьях [64], посвященных изучению уравнения Кортевега-де Фриза (KdV), были отмечены такие нестандартные особенности как некоммутативность вариационных производных и нарушение тождества Якоби. В связи с этими трудностями были предложены различные модификации скобки Гарднера [64, 62, 63]. Их сравнение можно найти в статье [65]. К сожалению, эти статьи оставались для нас неизвестными во время написания работы о переменных Аштекара (глава 5) [36], где были сделаны подобные наблюдения. По-видимому, такие наблюдения делались математиками довольно давно [88, 89, 91]. В нашей работе [36] было сделано предположение, что общим критерием для выбора граничных условий в гамильтоновом подходе к теории поля должно быть выполнение тождества Якоби для стандартной скобки Пуассона.

Как нам удалось выяснить из книги Олвера [79], при изучении поверхностных волн в идеальной жидкости Льюис, Марсден, Монтгомери и Ратью (LMMR) [69] предложили модифицированную форму канонической скобки Пуассона[1]

$$\{F,G\} = \int_\Omega \left[\frac{\delta^\wedge F}{\delta q(x)} \frac{\delta^\wedge G}{\delta p(x)} - \frac{\delta^\wedge G}{\delta q(x)} \frac{\delta^\wedge F}{\delta p(x)} \right] d^n x$$

$$+ \oint_{\partial\Omega} \left[\frac{\delta^\wedge F}{\delta q(x)}\bigg|_{\partial\Omega} \frac{\delta^\vee G}{\delta p(x)} + \frac{\delta^\vee F}{\delta q(x)} \frac{\delta^\wedge G}{\delta p(x)}\bigg|_{\partial\Omega} \right] dS$$

$$- \oint_{\partial\Omega} \left[\frac{\delta^\wedge G}{\delta q(x)}\bigg|_{\partial\Omega} \frac{\delta^\vee F}{\delta p(x)} + \frac{\delta^\vee G}{\delta q(x)} \frac{\delta^\wedge F}{\delta p(x)}\bigg|_{\partial\Omega} \right] dS,$$

где были определены две составляющие вариационной производной, согласно формуле:

$$D_q F(q,p) \cdot \delta q = \int_\Omega \frac{\delta^\wedge F}{\delta q} \cdot \delta q d^n x + \oint_{\partial\Omega} \frac{\delta^\vee F}{\delta q} \cdot \delta q|_{\partial\Omega} dS, \tag{3.1}$$

в левой части были использованы частные производные Фреше, аналогичная формула применяется и для вариационной производной по импульсу. Эта скобка сопровождается граничными условиями, которые LMMR рассматривают как необходимые:

$$\frac{\delta^\vee F}{\delta q} \frac{\delta^\vee G}{\delta p} - \frac{\delta^\vee G}{\delta q} \frac{\delta^\vee F}{\delta p} = 0. \tag{3.2}$$

LMMR упоминают, что гамильтонова структура для поверхностных волн в идеальной жидкости (в случае ее потенциального течения) была открыта Захаровым [66].

Ниже мы обобщаем формулу LMMR таким образом, что новая скобка будет удовлетворять тождеству Якоби без каких бы то ни было граничных условий. Это позволяет рассматривать на формально равных основаниях как объемные, так и поверхностные гамильтонианы. Граничные значения гамильтоновых переменных теперь удовлетворяют гамильтоновым уравнениям, и фиксация некоторых граничных условий есть просто новая связь, которая должна проверяться, в согласии с процедурой

[1] Интересно отметить, что работа LMMR была доложена на той же конференции и опубликована в том же журнале, что и работа Буслаева, Фаддеева и Тахтаджяна [63], в которой была модифицирована скобка Гарднера для KdV.

Дирака, на необходимость вторичных и высших связей. Такое обобщение скобки LMMR представляется необходимым также и потому, что эта скобка двух дифференцируемых функционалов может оказаться функционалом не дифференцируемым в смысле (5.1) и (3.2).

Мы предлагаем новую, более общую, формулу для скобок Пуассона [40, 42, 41, 50, 49, 48, 46, 45] и доказываем для нескольких важных случаев, что она удовлетворяет предложенному ниже новому определению скобки *без отбрасывания каких-либо поверхностных интегралов*. Случаи, где в этой главе демонстрируются доказательства, следующие:

1. ультралокальная скобка с матрицей из постоянных коэффициентов (канонический случай, в частности);

2. ультралокальная скобка, зависящая от полевых переменных, но не от их производных (наиболее известный пример — скобки Ли-Пуассона);

3. неультралокальные скобки с постоянной структурной матрицей (примером может служить скобка Гарднера-Захарова-Фаддеева для уравнения KdV).

План этой главы следующий.

В параграфе 2 мы введем необходимые обозначения и кратко представим математический аппарат: определения, леммы и формулы. Параграф 3 содержит исходную математическую мотивацию для построения новых скобок в ультралокальном случае: идея в том, что скобка Пуассона должна генерировать *полную* вариацию локального функционала. В параграфе 4 дается метод построения общих локальных скобок. Он основан на интегрировании по частям локальной формулы и ведет к новым предложениям относительно применения в этой задаче обобщенных функций. Эти вычисления оправданы “a posteriori” в параграфе 6. Параграф 5 посвящен определению полной вариационной производной как обобщенной функции. Здесь мы также представляем формальное правило умножения производных характеристической функции. Это правило позволяет записать новые скобки Пуассона в той же форме, что и старые, но с обобщенными вариационными производными. Параграф 6 содержит три различных доказательства тождества Якоби для новых скобок.

- Простейшее доказательство применимо только к ультралокальным скобкам с постоянной структурной матрицей.
- Более общее доказательство применимо к ультралокальным скобкам, зависящим от полевых переменных. Это доказательство в сильной степени опирается на результаты, полученные Олдерсли [91] для высших эйлеровых операторов.
- Наконец, демонстрируется доказательство тождества Якоби для неультралокальных скобок с постоянными коэффициентами.

Общее доказательство будет дано в следующей главе. Оно основывается на более развитом математическом формализме, в частности на скобке Схоутена-Нейенхейса. В Заключении этой главы мы даем краткое резюме. Приложение содержит перечень различных способов записи новых скобок.

3.2 Обозначения и математический аппарат

Мы используем язык локальных координат и вместо многообразия с границей рассматриваем компактную область Ω пространства $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Характеристическая функция области есть $\theta_\Omega = \theta(P_\Omega)$, где уравнение $P_\Omega(x^1, ..., x^n) = 0$ задает границу. Нам не кажется. что переход к глобальной формулировке может вызвать серьезные затруднения.

Определение 2.1 *Интеграл по компактной области Ω от функции полевых переменных $\phi^A(x), A = 1, ..., p$, и их частных производных $D_J\phi^A$ до некоторого конечного порядка*

$$F = \int_\Omega d^n x f(\phi_A(x), D_J\phi_A(x))$$

называется локальным функционалом.

Все функции f и ϕ_A, так же как и их вариации, всюду будут предполагаться бесконечно гладкими, т.е. принадлежащими пространству $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Мы будем использовать мультииндексные обозначения

$$J = (j_1, ..., j_n), \qquad D_J = \frac{\partial^{|J|}}{\partial^{j_1}x^1 ... \partial^{j_n}x^n}, \qquad |J| = j_1 + ... + j_n.$$

Биномиальные коэффициенты для мультииндексов определяются формулой

$$\binom{J}{K} = \binom{j_1}{k_1} \cdots \binom{j_n}{k_n},$$

где обычные биномиальные коэффициенты есть

$$\binom{j}{k} = \begin{cases} \frac{j!}{k!(j-k)!}, & \text{при } 0 \le k \le j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как число сумм в некоторых формулах этой главы достигает 10 и выше, мы будем писать только один знак суммирования и не будем указывать индексы, по которым оно производится. Согласно этому полуэйнштейновскому правилу, мы подразумеваем суммирование по всем повторяющимся индексам. Только в тех случаях, где может возникнуть путаница, индексы у знака суммы будут указываться явно. Мы также не выписываем пределов суммирования, поскольку они всегда являются естественными, т.е. члены суммы просто обращаются в ноль при выходе за эти пределы. Это приятное свойство биномиальных коэффициентов заметно помогает при изменениях порядка суммирования. Соблазнительно также опустить в интегралах бесполезный символ $d^n x$ и явно выписывать аргументы функций только тогда, когда их можно перепутать. В принципе все интегралы по конечным областям лучше писать как интегралы по всему пространству $\mathbb{R}^n$ вводя в подинтегральные выражения характеристические функции области, но мы параллельно будем использовать обозначения трех типов:

$$\int_\Omega f \qquad \text{или} \qquad \int \theta_\Omega f \qquad \text{или} \qquad \int \theta(P_\Omega) f.$$

Обозначим пространство локальных функционалов $\mathcal{A}$. Очень важным является то, что это пространство включает в себя функционалы с подинтегральными выражениями, зависящими от производных любого порядка [90]. Иначе скобка Пуассона могла бы выводить нас за пределы $\mathcal{A}$.

Определение 2.2 *Билинейная операция* $\{\cdot,\cdot\}$*, такая что для всех* $F, G, H \in \mathcal{A}$

1) $\{F, G\} \in \mathcal{A}$*;*

2) $\{F, G\} = -\{G, F\} \qquad mod\ (Div)$*;*

3) $\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0 \qquad mod\ (Div)$*;*

называется стандартной теоретико-полевой скобкой Пуассона.

Определение 2.3 *Билинейная операция* $\{\cdot,\cdot\}$*, такая что для всех* $F, G, H \in \mathcal{A}$

1) $\{F, G\} \in \mathcal{A}$*;*

2) $\{F, G\} = -\{G, F\}$*;*

3) $\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = 0$*;*

называется новой теоретико-полевой скобкой Пуассона.

Определение 2.4[79, Определение 5.70] *Высшие эйлеровы операторы* E_A^J *определяются через формулу полной вариации локального функ-*

ционала

$$\delta F = \sum \int_{\Omega} D_J\left(E^J_A(f)\delta\phi_A\right). \tag{3.3}$$

Лемма 2.5[79, Утверждение 5.72] *Высшие эйлеровы операторы могут быть заданы формулой*

$$E^J_A(f) = \sum_K (-1)^{|K|+|J|} \binom{K}{J} D_{K-J} \frac{\partial f}{\partial \phi^{(K)}_A}. \tag{3.4}$$

Обычная вариационная производная (или производная Эйлера-Лагранжа) является эйлеровым оператором нулевого порядка. Заметим, что если J не содержится в K, тогда все величины, несущие мульти-индекс $(K-J)$, равны нулю. Суммы по J в уравнении (3.3) и по K в уравнении (3.4) в действительности являются конечными, поскольку локальный функционал может зависеть только от конечного числа производных, согласно Определению 2.1.

Лемма 2.6[79, Утверждение 5.76] *Эйлеровы операторы удовлетворяют соотношению*

$$E^J_A(D_I f) = E^{J-I}_A(f).$$

Именно благодаря этому свойству операторы и появились впервые в литературе [92].

Лемма 2.7[91, Предолжение 3.1] *Эйлеров оператор от произведения двух локальных функционалов выражается следующей формулой*

$$E^K_A(fg) = \sum_L (-1)^{|K|+|L|} \binom{L}{K} \left(E^L_A(f) D_{L-K} g + E^L_A(g) D_{L-K} f\right).$$

Лемма 2.8[91, Теорема 2.1] *Произведение эйлеровых операторов выражается формулой*

$$E^I_A E^J_B(f) = \sum_K (-1)^{|K|} \binom{J+K}{J} E^{I-K}_A \frac{\partial f}{\partial \phi^{(J+K)}_B}.$$

Лемма 2.9[91, Предложение 1.1]

$$\frac{\partial f}{\partial \phi^{(J)}_A} = \sum_K \binom{K}{J} D_{K-J} E^K_A(f).$$

Лемма 2.10[91, Лемма 2.2]
$$\frac{\partial}{\partial\phi_A^{(I)}}D_J f = \sum_K \binom{J}{K} D_{J-K}\frac{\partial f}{\partial\phi_A^{(I-K)}},$$
Заметим, что обозначения в работе [91] отличаются от наших, поскольку там не используются мульти-индексы, а определение эйлерова оператора E_A^I отличается фактором $(-1)^{|I|}$.

Нам также потребуются комбинаторные тождества

Лемма 2.11[91, Лемма 1.1]
$$\sum_{l=k}^{j}(-1)^l\binom{l}{i}\binom{j-k}{l-k} = (-1)^j\binom{k}{j-i},$$
что также можно переписать в виде
$$\sum_{l=k}^{j}\frac{(-1)^l l!}{(l-i)!(l-k)!(j-l)!} = (-1)^j\frac{i!k!}{(j-i)!(j-k)!(i+k-j)!}.$$
Лемма 2.12[93, стр.616]
$$\sum_{l=0}^{j}\binom{i}{l}\binom{j-k}{j-l} = \binom{i+j-k}{j},$$
а это можно переписать также как
$$\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{l!(j-l)!(l-k)!(i-l)!} = \frac{(i+j-k)!}{i!j!(j-k)!(i-k)!}.$$
Определение 2.13[79, Определение 5.28] *Частная производная Фреше от функции f есть дифференциальный оператор D_{f_A}, определяемый при произвольных q_A следующим образом:*
$$D_{f_A}(q) = \frac{d}{d\epsilon}f(\phi_A+\epsilon q_A(\phi))\bigg|_{\epsilon=0}.$$
В нашем случае
$$D_{f_A} = \sum_I \frac{\partial f}{\partial\phi_A^{(I)}}D_I. \tag{3.5}$$
Правило Лейбница имеет вид
$$D_J(fg) = \sum_K \binom{J}{K} D_K f D_{J-K} g. \tag{3.6}$$

3.3 Мотивация новых скобок Пуассона из формулы для полной вариации

Обычно скобки Пуассона определяются выражением

$$\{F, G\} = \sum \int_\Omega \int_\Omega \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi_B(y)} \{\phi_A(x), \phi_B(y)\},$$

где вариационная производная есть эйлеров оператор нулевого порядка (производная Эйлера-Лагранжа)

$$\frac{\delta}{\delta \phi_A} = E_A^0 = \sum (-1)^{|J|} D_J \frac{\partial}{\partial \phi_A^{(J)}},$$

и где мы не обращаем внимания на поверхностные интегралы, поскольку все они предполагаются равными нулю. Здесь мы ограничим рассмотрение ультралокальными скобками Пуассона. Более общий случай будет рассматриваться в следующем параграфе.

Определение 3.1 *Стандартная скобка Пуассона называется ультралокальной, если*

$$\{\phi_A(x), \phi_B(y)\} = I_{AB} \delta(x - y),$$

где структурная матрица I_{AB} может зависеть от полевых переменных $\phi_A(x)$ и их производных $D_K \phi_A(x)$.

Эти скобки Пуассона, вместе с локальным функционалом H, называемым гамильтонианом, генерируют вариацию произвольного локального функционала F при фиксированных граничных значениях $\phi_A, D_J \phi_A$ согласно формуле:

$$\delta_H F = \{F, H\} = \sum \int_\Omega \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \delta_H \phi_A,$$

где

$$\delta_H \phi_A = \sum I_{AB} \frac{\delta H}{\delta \phi_B}. \tag{3.7}$$

Новые скобки Пуассона, которые мы ищем, аналогично должны генерировать для заданного гамильтониана H *полную вариацию* локального функционала F в согласии с соотношением (3.3)

$$\delta_H F = \{F, H\} = \sum \int_\Omega D_J \Big(E_A^J(f) \delta_H \phi_A \Big),$$

где вариации $\delta_H \phi_A$ полевых переменных выражаются в виде линейной комбинации не только $E^0_B(h)$, но также и высших эйлеровых операторов (3.4)

$$\delta_H \phi_A = \sum I^{(K)}_{AB} E^K_B(h).$$

Очевидно, что $I^{(0)}_{AB} = I_{AB}$, другие коэффициенты $I^{(K)}_{AB}$ будут найдены ниже. На самом деле они являются обобщенными функциями, и эта сторона вопроса будет рассмотрена в следующих двух параграфах. Здесь нам достаточно знать их "в слабом смысле", т.е. как функционалы, определенные на стандартных гладких функциях. Мы покажем, что эти коэффициенты могут быть получены из требования антисимметричности скобок Пуассона, т.е.,

$$\sum \int_\Omega D_J \Big(E^J_A(f) I^{(K)}_{AB} E^K_B(h) \Big) = -\sum \int_\Omega D_J \Big(E^J_A(h) I^{(K)}_{AB} E^K_B(f) \Big).$$

Рассмотрим это условие в теории возмущений по порядку эйлеровых операторов $|J| + |K|$. В нулевом порядке требование антисимметрии выполняется благодаря соответствующему свойству стандартной скобки

$$I^{(0)}_{AB} = -I^{(0)}_{BA}.$$

В первом порядке мы должны иметь

$$\sum_{A,B} \sum_{|K|=1} \int_\Omega E^0_A(f) I^{(K)}_{AB} E^K_B(h) + \sum_{A,B} \sum_{|J|=1} \int_\Omega D_J \Big(E^J_A(f) I^{(0)}_{AB} E^0_B(h) \Big) =$$

$$= -\sum_{A,B} \sum_{|K|=1} \int_\Omega E^0_A(h) I^{(K)}_{AB} E^K_B(f) - \sum_{A,B} \sum_{|J|=1} \int_\Omega D_J \Big(E^J_A(h) I^{(0)}_{AB} E^0_B(f) \Big).$$

Если перегруппировать члены и воспользоваться антисимметрией в нулевом порядке, тогда после переобозначения некоторых индексов ($A \leftrightarrow B$), ($J \leftrightarrow K$) предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$\sum_{A,B} \sum_{|K|=1} \int_\Omega \Big(E^0_A(f) I^{(K)}_{AB} E^K_B(h) + E^0_A(h) I^{(K)}_{AB} E^K_B(f) \Big) =$$

$$= \sum_{A,B} \sum_{|K|=1} \int_\Omega D_K \Big(E^0_A(f) I^{(0)}_{AB} E^K_B(h) + E^0_A(h) I^{(0)}_{AB} E^K_B(f) \Big).$$

Принимая во внимание линейную независимость эйлеровых операторов получаем

$$\sum_{A,B}\sum_{|K|=1}\int_\Omega E_A^0(f)I_{AB}^{(K)}E_B^K(h)=\sum_{A,B}\sum_{|K|=1}\int_\Omega D_K\Big(E_A^0(f)I_{AB}^{(0)}E_B^K(h)\Big). \tag{3.8}$$

Итак, мы определили коэффициенты $I_{AB}^{(K)}$ для случая $|K|=1$.

Далее, рассмотрим следующий порядок

$$\sum_{A,B}\sum_{|J|=2}\int_\Omega D_J\Big(E_A^J(f)I_{AB}^{(0)}E_B^0(h)\Big)+\sum_{A,B}\sum_{|J|=1}\sum_{|K|=1}\int_\Omega D_J\Big(E_A^J(f)I_{AB}^{(K)}E_B^K(h)\Big)+$$

$$+\sum_{A,B}\sum_{|K|=2}\int_\Omega E_A^0(f)I_{AB}^{(K)}E_B^K(h)=-\sum_{A,B}\sum_{|J|=2}\int_\Omega D_J\Big(E_A^J(h)I_{AB}^{(0)}E_B^0(f)\Big)-$$

$$-\sum_{A,B}\sum_{|J|=1}\sum_{|K|=1}\int_\Omega D_J\Big(E_A^J(h)I_{AB}^{(K)}E_B^K(f)\Big)-\sum_{A,B}\sum_{|K|=2}\int_\Omega E_A^0(h)I_{AB}^{(K)}E_B^K(f). \tag{3.9}$$

Если принять во внимание результат полученный выше (3.8), то вторые слагаемые в левой части и в правой части уравнения (3.9) взаимно сокращаются. Повторяя ту же самую процедуру, что была использована для первого порядка, находим

$$\sum_{|K|=2}\int_\Omega E_A^0(f)I_{AB}^{(K)}E_B^K(h)=\sum_{|K|=2}\int_\Omega D_K\Big(E_A^0(f)I_{AB}^{(0)}E_B^K(h)\Big).$$

Таким образом, ясно, что из одного лишь требования антисимметричности мы, шаг за шагом, убеждаемся, что скобка Пуассона должна быть записана в виде

$$\{F,H\}=\sum\int_\Omega D_{J+K}\Big(E_A^J(f)I_{AB}E_B^K(h)\Big). \tag{3.10}$$

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 3.2 *Формула* (3.10) *дает новую скобку Пуассона, если ее член нулевого порядка* ($|J|=0=|K|$) *является стандартной ультралокальной скобкой Пуассона и структурные коэффициенты* I_{AB} *не зависят от производных полевых переменных.*

Доказательство. Антисимметричность (3.10) очевидна из построения. Скобка явно является локальным функционалом и все, что требуется доказать, это тождество Якоби. Доказательство приводится ниже в параграфе 3.6. Там же сначала будет дано значительно более простое доказательство для частного случая, когда величины I_{AB} являются константами.

Замечание. Нетрудно включить в рассмотрение и случай, когда I_{AB} зависят от производных полей, но тогда и условия на коэффициенты, и доказательство тождества Якоби становятся более сложными.

3.4 Поверхностные члены и обобщенные функции

Стандартная теоретико-полевая скобка Пуассона [79]

$$\{F, G\} = \sum \int_\Omega \int_\Omega E^0_A(f(x)) E^0_B(g(y)) \{\phi_A(x), \phi_B(y)\}$$

является частным случаем, применимым только в предположении, что все поверхностные члены, появляющиеся при интегрировании по частям, равны нулю, более общего выражения

$$\{F, G\} = \sum \int_\Omega \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \phi^{(J)}_A(x)} \frac{\partial g}{\partial \phi^{(K)}_B(y)} \{D^{(x)}_J \phi_A(x), D^{(y)}_K \phi_B(y)\}, \tag{3.11}$$

или

$$\{F, G\} = \sum \int_\Omega \int_\Omega D_{f_A(x)} D_{g_B(y)} \{\phi_A(x), \phi_B(y)\},$$

где использованы производные Фреше (3.5).

Определение 4.1 *Стандартная теоретико-полевая скобка Пуассона называется локальной, если*

$$\{\phi_A(x), \phi_B(y)\} = \frac{1}{2} \sum_L \left(I^L_{AB}(x) D^{(x)}_L - I^L_{BA}(y) D^{(y)}_L \right) \delta(x - y), \tag{3.12}$$

где суммирование имеет конечные пределы по $|L|$.

Обычно в формулах, подобных (3.12), присутствуют производные только по одному аргументу из-за часто используемых соотношений

$$\left(D_J^{(x)} - (-1)^{|J|} D_J^{(y)}\right) \delta(x-y) = 0, \tag{3.13}$$

вместе с

$$I_{AB}^L = (-1)^{|L|+1} I_{BA}^L.$$

Но если не все поверхностные члены, возникающие при интегрировании по частям, равны нулю, тогда равенство (3.13) неверно. Это наблюдение было сделано автором диссертации в работе [36], когда стало ясно, что проблема сводится к определению интегралов вида

$$\int_\Omega \int_\Omega f(x) g(y) D_J^{(x)} D_K^{(y)} \delta(x-y), \tag{3.14}$$

для конечной области, если пробные функции на границе ненулевые. Более подробное обсуждение приводится в следующей главе диссертации.

Теория обобщенных функций [94] трактует их как определенные на открытых областях пространства. В известной нам литературе проблемы, связанные с определением обобщенных функций на замкнутых областях, обсуждаются в книгах [95, 96], но там нельзя найти однозначного ответа на вопрос об определении интеграла в выражении (3.14). Поэтому мы предлагаем новое Правило, которое находится в согласии с результатами предыдущего параграфа.

Правило 4.2

$$\int_\Omega \int_\Omega f(x) g(y) D_J^{(x)} D_K^{(y)} \delta(x-y) = \int_\Omega D_K f D_J g. \tag{3.15}$$

Это Правило отличается от того, что было предложено в [36], поскольку там требовалась совместимость со стандартными скобками Пуассона.

Вместе взятые, уравнения (3.11) и (3.15) дают нам возможность получить не только ранее найденное выражение (3.10) для ультралокальных скобок, но также и более общий результат. Подставим (3.12) в (3.11)

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}(x)} \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}(y)} \times$$

$$\times D_J^{(x)} D_K^{(y)} \left(\left(I^L_{AB}(x) D_L^{(x)} - I^L_{BA}(y) D_L^{(y)} \right) \delta(x-y) \right),$$

и воспользуемся правилом Лейбница (3.6)

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}(x)} \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}(y)} \times$$

$$\times \left(\binom{J}{M} D_M^{(x)} I^L_{AB}(x) D^{(x)}_{L+J-M} D_K^{(y)} - \binom{K}{M} D_M^{(y)} I^L_{BA}(y) D_J^{(x)} D^{(y)}_{L+K-M} \right) \delta(x-y).$$

Затем снимем одно из интегрирований с помощью Правила 4.2

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega \left(\binom{J}{M} D_{L+J-M} \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}} D_K \left(\frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_M I^L_{AB} \right) - \right.$$

$$\left. - \binom{K}{M} D_{L+K-M} \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_J \left(\frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}} D_M I^L_{BA} \right) \right).$$

Еще раз используем правило Лейбница

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega \left(\binom{J}{M} \binom{K}{N} D_{L+J-M} \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}} D_{N+M} I^L_{AB} D_{K-N} \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} - \right.$$

$$\left. - \binom{K}{M} \binom{J}{N} D_{L+K-M} \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_{N+M} I^L_{BA} D_{J-N} \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}} \right),$$

и сделаем замены $(J \leftrightarrow K)$, $(A \leftrightarrow B)$ во втором члене, тогда получим

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega \binom{J}{M} \binom{K}{N} D_{N+M} I^L_{AB} \times$$

$$\times \left(D_{K-N} \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_{L+J-M} \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}} - D_{K-N} \frac{\partial g}{\partial \phi_A^{(J)}} D_{L+J-M} \frac{\partial f}{\partial \phi_B^{(K)}} \right).$$

Преобразуем здесь частные производные в эйлеровы операторы, воспользовавшись Леммой 2.9

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega \binom{J}{M} \binom{K}{N} \binom{P}{J} \binom{Q}{K} D_{N+M} I^L_{AB} \times$$

$$\times \left(D_{P-J+K-N} E^P_A(f) D_{Q-K+L+J-M} E^Q_B(g) - (F \leftrightarrow G) \right),$$

сделаем замену $J \to J + K$ и вычислим сумму по K, согласно Лемме 2.12

$$\sum_K \binom{J+K}{M} \binom{P}{J+K} \binom{K}{N} \binom{Q}{K} = \binom{P}{M} \binom{Q}{N} \binom{P+Q-M-N}{P-J-N}.$$

Тогда получаем

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega \binom{P}{M} \binom{Q}{N} \binom{P+Q-M-N}{P-J-N} \times$$

$$\times D_{N+M} I^L_{AB} \Big(D_{P-J-N} E^P_A(f) D_{Q+L+J-M} E^Q_B(g) - (F \leftrightarrow G) \Big).$$

С помощью правила Лейбница нетрудно убедиться, что найденный результат совпадает с

$$\frac{1}{2} \sum \int_\Omega D_{P+Q} \Big(E^P_A(f) I^L_{AB} D_L E^Q_B(g) - (F \leftrightarrow G) \Big). \tag{3.16}$$

В ультралокальном случае $I^L_{AB} = \delta_{L0} I_{AB}$, $I_{AB} = -I_{BA}$, и, очевидно, воспроизводится соотношение (3.10). В более общем случае мы имеем новую теорему.

Теорема 4.3 *Новые скобки Пуассона, соответствующие стандартным локальным скобкам Пуассона с постоянной структурной матрицей, даются формулой* (3.16).

Доказательство. Антисимметрия очевидна, также очевидно, что выражение (3.16) дает локальный функционал. Тождество Якоби для этого случая будет доказано в параграфе 6.3.

Замечание. Ясно, что конструкция не ограничивает нас случаем $I^L_{AB} = const$. Но в общем случае доказательство тождества Якоби становится более трудным.

3.5 Полная вариационная производная и правило умножения: к неформальному вариационному исчислению

Запишем стандартную вариационную производную, т.е. производную Эйлера-Лагранжа, в виде

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} = E^0_A(f) \theta_\Omega.$$

Тогда она даст нам полную вариацию

$$\delta F = \sum \int \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \delta \phi_A,$$

локального функционала

$$F = \int \theta_\Omega f(\phi_A, D_J \phi_A),$$

только если все поверхностные интегралы в общей формуле

$$\delta F = \sum \int \theta_\Omega D_J \Big(E_A^J(f) \delta \phi_A \Big),$$

равны нулю.

Определение 5.1 *Обобщенная функция $\delta F / \delta \phi_A$, такая что в общем случае, т.е. при любых гладких вариациях $\delta \phi_A(x)$,*

$$\delta F = \sum \int \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \delta \phi_A, \tag{3.17}$$

будет называться полной вариационной производной локального функционала F.

Утверждение 5.2 *Полную вариационную производную можно представить в виде*

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_A} = \sum (-1)^{|J|} E_A^J(f) D_J \theta_\Omega, \tag{3.18}$$

где θ_Ω — характеристическая функция области интегрирования Ω.

Доказательство. Интегрируем по частям

$$\sum \int (-1)^{|J|} E_A^J(f) D_J \theta_\Omega \delta \phi_A = \sum \int \theta_\Omega D_J \Big(E_A^J(f) \delta \phi_A \Big) =$$

$$= \sum \int_\Omega D_J \Big(E_A^J(f) \delta \phi_A \Big).$$

Утверждение 5.3 *Используя* Определение 5.1 *можно записать новые скобки Пуассона* (3.16) *в виде*

$$\{F, G\} = \sum \int \int \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} \{\phi_A(x), \phi_B(y)\} \frac{\delta G}{\delta \phi_B(y)}, \tag{3.19}$$

если мы примем следующее правило умножения:

Правило 5.4

$$D_J\theta(P_\Omega)\times D_K\theta(P_\Omega)=D_{J+K}\theta(P_\Omega).$$

Замечание. Конечно, это Правило применимо только в рамках нашей процедуры вычисления скобок Пуассона. Хотелось бы надеяться, что ему найдется место в новой теории обобщенных функций [97].

Доказательство Утверждения 5.3. Подставим формулы (3.18) и (3.12) в (3.19), и перебросим все производные с δ-функции с помощью интегрирования по частям

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{|J|+|K|+|L|}\int\int\Bigg[D_L\bigg(D_J(\theta(P_\Omega(x))E^J_A(f)I^L_{AB}(x)\bigg)D_K\theta(P_\Omega(y))E^K_B(g)-$$

$$-D_L\bigg(D_K\theta(P_\Omega(y))E^K_B(g)I^L_{BA}(y)\bigg)D_J\theta(P_\Omega(x))E^J_A(f)\Bigg]\delta(x-y).$$

Затем выполним одно интегрирование с помощью δ-функции и воспользуемся правилом Лейбница

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{|J|+|K|+|L|}\binom{L}{M}\int\Bigg[D_{J+M}\theta_\Omega D_K\theta_\Omega E^K_B(g)D_{L-M}\bigg(E^J_A(f)I^L_{AB}\bigg)-$$

$$-D_{K+M}\theta_\Omega D_J\theta_\Omega E^J_A(f)D_{L-M}\bigg(E^K_B(g)I^L_{BA}\bigg)\Bigg].$$

После применения Правила 5.4 и интегрирования по частям мы получаем

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{|L|+|M|}\binom{L}{M}\int_\Omega D_{J+K+M}\Bigg[E^K_B(g)D_{L-M}\bigg(E^J_A(f)I^L_{AB}\bigg)-$$

$$-E^J_A(f)D_{L-M}\bigg(E^K_B(g)I^L_{BA}\bigg)\Bigg],$$

и после использования правила Лейбница

$$\frac{1}{2}\sum(-1)^{|L|+|M|}\binom{L}{M}\binom{M}{N}\int_\Omega D_{J+K}\Bigg[D_N E^K_B(g)D_{L-N}\bigg(E^J_A(f)I^L_{AB}\bigg)-$$

$$-D_N E^J_A(f)D_{L-N}\bigg(E^K_B(g)I^L_{BA}\bigg)\Bigg].$$

Суммирование по M

$$\sum_{M}(-1)^{|M|}\binom{L}{M}\binom{M}{N}=(-1)^{|L|}\delta_{L,N}, \tag{3.20}$$

завершает доказательство, приводя к уравнению (3.16).

Утверждение 5.5 Правило 4.2 *является следствием* Правила 5.4.

Доказательство. С помощью характеристической функции θ_Ω можно записать левую часть уравнения (3.15) в виде интеграла по бесконечному пространству $\mathbb{R}^n$

$$\int\int\theta(P_\Omega(x))f(x)\theta(P_\Omega(y))g(y)D_J^{(x)}D_K^{(y)}\delta(x-y),$$

тогда при интегрировании по частям не возникает никаких поверхностных членов, и мы получаем

$$(-1)^{|J|+|K|}\int\int D_J^{(x)}\Big(\theta(P_\Omega(x))f(x)\Big)D_K^{(y)}\Big(\theta(P_\Omega(y))g(y)\Big)\delta(x-y).$$

Уберем одно из двух интегрирований с помощью δ-функции и получим

$$(-1)^{|J|+|K|}\int D_J(\theta_\Omega f)D_K(\theta_\Omega g),$$

затем воспользуемся правилом Лейбница

$$(-1)^{|J|+|K|}\sum_{L,M}\binom{J}{L}\binom{K}{M}\int D_L\theta_\Omega D_M\theta_\Omega D_{J-L}fD_{K-M}g,$$

и Правилом 5.4. После еще одного интегрирования по частям по пространству $\mathbb{R}^n$ получаем интеграл по области Ω

$$\sum_{L,M}(-1)^{|J|+|K|+|L|+|M|}\binom{J}{L}\binom{K}{M}\int_\Omega D_{L+M}\Big(D_{J-L}fD_{K-M}g\Big).$$

Снова применяя правило Лейбница и затем вычисляя сумму по M,

$$\sum_{M}(-1)^{|M|}\binom{K}{M}\binom{L+M}{N}=(-1)^{|K|}\binom{L}{N-K},$$

получаем

$$\sum_{L,N}(-1)^{|J|+|L|}\binom{J}{L}\binom{L}{N-K}\int_\Omega D_{N+J-L}fD_{K+L-N}g.$$

После замены $N\to N+L$ и вычисления суммы по L согласно Лемме 2.11 мы получаем правую часть уравнения (3.15). Что и требовалось доказать.

3.6 Доказательства тождества Якоби

3.6.1 Простейший случай

Утверждение 6.1.1 *Скобка Пуассона с постоянной структурной матрицей* (3.10) *может быть записана в виде*

$$\{F, G\} = \sum \int_\Omega Tr(D_{f_A} I_{AB} D_{g_B}), \tag{3.21}$$

где D_{f_A} *— производная Фреше* (3.5), *причем*

$$Tr(D_{f_A} I_{AB} D_{g_B}) = \sum I_{AB} D_J \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(I)}} D_I \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(J)}}.$$

Доказательство. Применим в уравнении (3.10) правило Лейбница

$$\{F, G\} = \sum I_{AB} \int_\Omega \binom{I+J}{M} D_M E_A^I(f) D_{I+J-M} E_B^J(g).$$

Используя Лемму 2.5 это выражение можно преобразовать к виду

$$\sum I_{AB} (-1)^{|I|+|K|+|J|+|L|} \binom{I+J}{M} \binom{K}{I} \binom{L}{J} \int_\Omega D_{M+K-I} \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(K)}} D_{I-M+L} \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(L)}}.$$

Тогда изменяя индексы $M \to M+I$ и порядок суммирования, с помощью Лемм 2.11 и 2.12 мы можем вычислить сумму

$$\sum_{I,J} (-1)^{|I|+|J|} \binom{I+J}{I+M} \binom{K}{I} \binom{L}{J} = (-1)^{|K|+|L|} \delta_{M, L-K}.$$

В результате получаем (3.21).

Утверждение 6.1.2 *Скобка Пуассона, заданная формулой* (3.10), *удовлетворяет тождеству Якоби при* $I_{AB} = const$.

Доказательство. Преобразуем выражение

$$\{\{F, G\}, H\} = \sum I_{AB} I_{CD} \int_\Omega D_I \frac{\partial h}{\partial \phi_B^{(J)}} \times$$

$$\times D_J \left(\frac{\partial}{\partial \phi_A^{(I)}} (D_K \frac{\partial f}{\partial \phi_C^{(L)}}) D_L \frac{\partial g}{\partial \phi_D^{(K)}} + D_L \frac{\partial f}{\partial \phi_C^{(K)}} \frac{\partial}{\partial \phi_A^{(I)}} (D_K \frac{\partial g}{\partial \phi_D^{(L)}}) \right),$$

с помощью Леммы 2.10, правила Лейбница и антисимметрии относительно замены $C \leftrightarrow D$

$$\{\{F,G\},H\} = \sum \binom{K}{M}\binom{J}{N} I_{AB} I_{CD} \times$$

$$\times \int_\Omega \Bigg(D_{K+N-M} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_A^{(I-M)} \partial \phi_C^{(L)}} D_I \frac{\partial h}{\partial \phi_B^{(J)}} D_{J+L-N} \frac{\partial g}{\partial \phi_D^{(K)}} -$$

$$- D_{K+N-M} \frac{\partial^2 g}{\partial \phi_A^{(I-M)} \partial \phi_C^{(L)}} D_I \frac{\partial h}{\partial \phi_B^{(J)}} D_{J+L-N} \frac{\partial f}{\partial \phi_D^{(K)}} \Bigg).$$

После циклической перестановки получаем

$$\{\{F,G\},H\} + \{\{H,F\},G\} + \{\{G,H\},F\} =$$

$$= \sum \binom{K}{M}\binom{J}{N} I_{AB} I_{CD} \int_\Omega D_{K+N-M} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_A^{(I-M)} \partial \phi_C^{(L)}} \times$$

$$\times \Bigg(D_{J+L-N} \frac{\partial g}{\partial \phi_D^{(K)}} D_I \frac{\partial h}{\partial \phi_B^{(J)}} - (g \leftrightarrow h) \Bigg) + \ldots,$$

где многоточие обозначает аналогичные члены с циклически переставленными f, g, h. Изменяя индексы $N \to N + J$, $I \to I + M$, получаем

$$\{\{F,G\},H\} + \{\{H,F\},G\} + \{\{G,H\},F\} = \sum \binom{K}{K-M}\binom{J}{J+N} \times$$

$$\times I_{AB} I_{CD} \int_\Omega D_{J+K+N-M} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_A^{(I)} \partial \phi_C^{(L)}} \left[D_{L-N} \frac{\partial g}{\partial \phi_D^{(K)}} D_{I+M} \frac{\partial h}{\partial \phi_B^{(J)}} - (g \leftrightarrow h) \right] + \ldots$$

Таким образом, если одновременно заменить индексы $I \leftrightarrow L$, $J \leftrightarrow K$, $M \leftrightarrow -N$, $A \leftrightarrow C$ и $B \leftrightarrow D$, то выражение в квадратных скобках изменяет знак, тогда как коэффициент перед скобками остается прежним. Следовательно, сумма равняется нулю, и мы доказали тождество Якоби для этого простейшего случая.

3.6.2 Доказательство для ультралокального случая

Утверждение 6.2.1 *Ультралокальные скобки Пуассона, заданные формулой* (3.10), *с коэффициентами, зависящими от полевых переменных,* *но не от их производных, точно удовлетворяют тождеству Якоби в том случае, когда соответствующие стандартные скобки удовлетворяют ему с точностью до полных дивергенций.*

Доказательство. Преобразуем выражение

$$\{\{F,G\},H\} = \sum \int_{\Omega} D_{I+J}\bigg(E_A^I\Big(D_{K+L}\big(E_C^K(f)I_{CD}E_D^L(g)\big)\Big)I_{AB}E_B^J(h)\bigg)$$

согласно Леммам 2.6 и 2.7. Тогда, принимая во внимание, что

$$E_A^M(I_{CD}) = \delta_{M0}\frac{\partial I_{CD}}{\partial \phi_A},$$

мы получаем

$$\sum(-1)^{|I|+|K|+|L|+|M|}\binom{M}{I-K-L}\int_{\Omega} D_{I+J}\bigg(E_B^J(h)I_{AB}\Big[\delta_{M0}\frac{\partial I_{CD}}{\partial \phi_A}\times$$

$$\times D_{M+K+L-I}\Big(E_C^K(f)E_D^L(g)\Big) + D_{M+K+L-I}I_{CD}E_A^M\Big(E_C^K(f)E_D^L(g)\Big)\Big]\bigg). \tag{3.22}$$

Рассмотрим первое слагаемое в квадратных скобках. Та как $M = 0$, биномиальный коэффициент не обращается в ноль только при $I = K+L$, следовательно это слагаемое принимает вид

$$\sum \int_{\Omega} D_{J+K+L}\bigg(I_{AB}\frac{\partial I_{CD}}{\partial \phi_A}E_C^K(f)E_D^L(g)E_B^J(h)\bigg). \tag{3.23}$$

После циклической перестановки F, G, H и учитывая симметрию по J, K, L мы видим, что это слагаемое не дает вклада в правую часть тождества Якоби при условии

$$I_{AB}\frac{\partial I_{CD}}{\partial \phi_A} + I_{AD}\frac{\partial I_{BC}}{\partial \phi_A} + I_{AC}\frac{\partial I_{DB}}{\partial \phi_A} = 0. \tag{3.24}$$

Но именно это условие является необходимым [79] для выполнения тождества Якоби (с точностью до дивергенций) стандартными скобками Пуассона в этом случае. Поэтому в дальнейшем нам надо позаботиться только о втором члене в уравнении (3.22).

Еще раз воспользуемся Леммой 2.7, тогда интересующий нас член принимает вид

$$\sum(-1)^{|I|+|K|+|L|+|N|}\binom{M}{I-K-L}\binom{N}{M}\int_\Omega D_{I+J}\Bigg(I_{AB}E_B^J(h)\times$$

$$\times D_{M+K+L-I}I_{CD}\Big[E_A^N E_C^K(f)D_{N-M}E_D^L(g)+E_A^N E_D^L(g)D_{N-M}E_C^K(f)\Big]\Bigg).$$

Принимая во внимание антисимметрию коэффициента перед квадратной скобкой относительно замены $C \leftrightarrow D$ и его симметрию относительно $K \leftrightarrow L$, получаем

$$\sum(-1)^{|I|+|K|+|L|+|N|}\binom{M}{I-K-L}\binom{N}{M}\int_\Omega D_{I+J}\Bigg(I_{AB}D_{M+K+L-I}I_{CD}\times$$

$$\times E_B^J(h)\Big[E_A^N E_C^K(f)D_{N-M}E_D^L(g)-E_A^N E_C^K(g)D_{N-M}E_D^L(f)\Big]\Bigg).$$

После циклической перестановки F, G, H это выражение может быть переписано в виде

$$\sum(-1)^{|I|+|K|+|L|+|N|}\binom{M}{I-K-L}\binom{N}{M}\int_\Omega D_{I+J}\Bigg(E_A^N E_C^K(f)\times$$

$$\times I_{AB}D_{M+K+L-I}I_{CD}\Big[E_B^J(h)D_{N-M}E_D^L(g)-(G\leftrightarrow H)\Big]\Bigg)+\ldots .$$

Применим здесь правило Лейбница и получим

$$\sum(-1)^{|I|+|K|+|L|+|N|}\binom{M}{I-K-L}\binom{N}{M}\binom{I+J}{P}\times$$

$$\times\binom{I+J-P}{Q}\binom{I+J-P-Q}{R}\binom{I+J-P-Q-R}{S}\times$$

$$\times\int_\Omega D_P I_{AB}D_{Q+M+K+L-I}I_{CD}D_R E_A^N E_C^K(f)\times$$

$$\times\Big[D_{S+N-M}E_D^L(g)D_{I+J-P-Q-R-S}E_B^J(h)-(G\leftrightarrow H))\Big]+\ldots .$$

Преобразуем коэффициент перед квадратной скобкой в соответствии с Леммами 2.8 и 2.5, т.е., сделаем подстановку

$$D_R E_A^N E_C^K(f)=\sum_{T,U}(-1)^{|U|+|N|}\binom{K+T}{K}\binom{U}{N-T}D_{R+T+U-N}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi_A^{(U)}\partial\phi_C^{(K+T)}}.$$

После этого можно упростить выражение перед квадратными скобками с помощью замены индексов, изменения порядка суммирования и явного вычисления четырех сумм биномиальных коэффициентов.

Сначала сделаем замены $T \to T - K$, $M \to M - K$, $N \to N - K$ и вычислим сумму по K с помощью Леммы 2.11

$$\sum_K (-1)^{|K|} \binom{T}{K} \binom{M-K}{I-K-L} \binom{N-K}{M-K} = \binom{N-T}{I-L} \binom{L+N-I}{N-M},$$

(при вычислении этой суммы применяется тривиальный сдвиг аргумента, ниже мы не будем больше оговаривать подобные детали).

Затем сделаем переопределения мульти-индексов $Q \to Q+I-M-L$, $S \to S+M-N$, $R \to R+N$ и вычислим сумму по M с помощью Леммы 2.12

$$\sum_M \binom{I+J-P}{I+Q-M-L} \binom{L+N-I}{N-M} \binom{J+M+L-P-Q-R-N}{S+M-N} \times$$

$$\times \binom{J+M+L-P-Q}{R+N} = \binom{Q+S}{Q} \binom{I+J-P}{N+R} \binom{I+J-P-N-R}{I+Q+S-N-L}.$$

После еще одной замены $R \to J+L-P-Q-R-S$ можно вычислить сумму по N

$$\sum_N \binom{I+J-P}{N+J+L-P-Q-R-S} \binom{I-N-L+Q+S-R}{I+Q+S-N-L} \times$$

$$\times \binom{U}{N-T} \binom{N-T}{I-L} = \binom{J+L+U-P-R}{Q+S-T} \binom{U}{I-L} \binom{I+J-P}{R}.$$

И последним суммированием будет

$$\sum_I (-1)^{|I|} \binom{U}{I-L} \binom{I+J-P}{R} \binom{I+J}{P} = (-1)^{|U|+|L|} \binom{P+R}{P} \binom{L+J}{P+R-U}$$

В результате интересующий нас член принимает вид

$$\sum \binom{Q+S}{Q} \binom{P+R}{P} \binom{L+J}{P+R-U} \binom{L+J+U-P-R}{Q+S-T} \int_\Omega D_P I_{AB} \times$$

$$\times D_Q I_{CD} D_{J+L+T+U-P-Q-R-S} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_A^{(U)} \partial \phi_C^{(T)}} \Big[D_R E_B^J(h) D_S E_D^L(g) - (H \leftrightarrow G) \Big].$$

Нетрудно видеть, что при одновременной замене $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow D$, $J \leftrightarrow L$, $R \leftrightarrow S$, $U \leftrightarrow T$, $P \leftrightarrow Q$ квадратная скобка меняет знак, тогда как коэффициент при ней остается прежним, т.е. выражение в целом оказывается равным нулю. С учетом наших предыдущих результатов (3.23), (3.24) доказательство завершено.

3.6.3 Доказательство для неультралокального случая

Утверждение 6.3.1 *Неультралокальные скобки Пуассона, заданные формулой* (3.16), *точно удовлетворяют тождеству Якоби при* $I^K_{AB} = const$.

Доказательство. С помощью Леммы 2.6 и замены индексов $I \leftrightarrow J$, $A \leftrightarrow B$ мы получаем

$$\{\{F,G\},H\} = \frac{1}{4}\sum I^N_{CD}\int_\Omega D_{I+J}\Bigg(\Bigg(I^K_{AB}D_K E^J_B(h) - E^J_B(h)I^K_{BA}D_K\Bigg)\times$$

$$\times E^{I-L-M}_A\Bigg(E^L_C(f)D_N E^M_D(g) - (F \leftrightarrow G)\Bigg)\Bigg),$$

а используя Лемму 2.7 находим

$$E^{I-L-M}_A\Bigg(E^L_C(f)D_N E^M_D(g)\Bigg) = \sum_P (-1)^{|P|+|I|+|L|+|M|}\binom{P}{I-L-M}\times$$

$$\times\Bigg(E^P_A E^L_C(f)D_{P-I+L+M+N}E^M_D(g) + E^{P-N}_A E^M_D(g)D_{P-I+L+M}E^L_C(f)\Bigg).$$

Затем воспользуемся симметрией $L \leftrightarrow M$ и сделаем замену $C \leftrightarrow D$

$$\{\{F,G\},H\} = \frac{1}{4}\sum (-1)^{|P|+|I|+|L|+|M|}\binom{P}{I-L-M}\times$$

$$\times\int_\Omega D_{I+J}\Bigg(\Bigg(I^K_{AB}D_K E^J_B(h) - E^J_B(h)I^K_{BA}D_K\Bigg)\Bigg(I^N_{CD}E^P_A E^L_C(f)\times$$

$$\times D_{L+M+P-I+N}E^M_D(g) - I^N_{DC}E^{P-N}_A E^L_C(g)D_{L+M+P-I}E^M_D(f)\Bigg)\Bigg).$$

Заменим индекс $P \to P+N$ во втором слагаемом

$$\frac{1}{4}\sum\left[\binom{P}{I-L-M}I^N_{CD} - (-1)^{|N|}\frac{P+N}{I-L-M}I^N_{DC}\right]\times$$

$$\times(-1)^{|P|+|I|+|L|+|M|}\int_\Omega D_{I+J}\left(\left(I^K_{AB}D_K E^J_B(h) - E^J_B(h)I^K_{BA}D_K\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(E^P_A E^L_C(f)D_{M+L+P+N-I}E^M_D(g) - (F\leftrightarrow G)\right)\right).$$

Затем вычислим D_K согласно правилу Лейбница

$$\sum_Q\binom{K}{Q}\left(D_{K-Q}E^P_A E^L_C(f)D_{Q+M+L+P+N-I}E^M_D(g) - (F\leftrightarrow G)\right)$$

и аналогично D_{I+J}

$$\{\{F,G\},H\} = \frac{1}{4}\sum\left[\binom{P}{I-L-M}I^N_{CD} - (-1)^{|N|}I^N_{DC}\binom{P+N}{I-L-M}\right]\times$$

$$\times(-1)^{|P|+|I|+|L|+|M|}\binom{I+J}{R}\binom{I+J-R}{S}\int_\Omega\left[I^K_{AB}D_{R+K}E^J_B(h)\times\right.$$

$$\times\left(D_S E^P_A E^L_C(f)D_{J-R-S+M+L+P+N}E^M_D(g) - (F\leftrightarrow G)\right) - I^K_{BA}D_R E^J_B(h)\times$$

$$\left.\times\sum_Q\binom{K}{Q}\left(D_{S+K-Q}E^P_A E^L_C(f)D_{J-R-S+M+L+N+P+Q}E^M_D(g) - (F\leftrightarrow G)\right)\right]$$

Теперь мы можем просуммировать по I согласно Лемме 2.11

$$\sum_I(-1)^{|I|}\binom{P}{I-L-M}\binom{I+J}{R}\binom{I+J-R}{S} =$$

$$= (-1)^{|P|+|L|+|M|}\binom{R+S}{R}\binom{J+L+M}{R+S-P},$$

$$\sum_I(-1)^{|I|}\binom{P+N}{I-L-M}\binom{I+J}{R}\binom{I+J-R}{S} =$$

$$= (-1)^{|P|+|L|+|M|+|N|}\binom{R+S}{R}\binom{J+L+M}{R+S-P-N},$$

и получить

$$\{\{F,G\},H\} = \frac{1}{4}\sum\left[\binom{J+L+M}{R+S-P}I^N_{CD} - I^N_{DC}\binom{J+L+M}{R+S-P-N}\right]\binom{R+S}{R}\times$$

$$\times \int_\Omega \Biggl(I^K_{AB} D_{R+K} E^J_B(h) \Bigl(D_S E^P_A E^L_C(f) D_{J-R-S+M+L+P+N} E^M_D(g) - (F \leftrightarrow G) \Bigr) -$$

$$- I^K_{BA} D_R E^J_B(h) \sum_Q \binom{K}{Q} \times$$

$$\times \Bigl(D_{J-R-S+M+L+N+P+Q} E^M_D(g) D_{S+K-Q} E^P_A E^L_C(f) - (F \leftrightarrow G) \Bigr) \Biggr).$$

Если в первом слагаемом сделать замену $R \to R - K$

$$\frac{1}{4} \sum \left[\binom{J+L+M}{R+S-P-K} I^N_{CD} - I^N_{DC} \binom{J+L+M}{R+S-K-P-N} \right] \binom{R+S-K}{R-K} \times$$

$$\times \int_\Omega I^K_{AB} D_R E^J_B(h) \Bigl(D_S E^P_A E^L_C(f) D_{J-R-S+M+L+P+N+K} E^M_D(g) - (F \leftrightarrow G) \Bigr),$$

а во втором замену $S \to S - K + Q$

$$-\frac{1}{4} \sum \left[\binom{J+L+M}{R+S+Q-P-K} I^N_{CD} - I^N_{DC} \binom{J+L+M}{R+S+Q-K-P-N} \right] \times$$

$$\times \binom{R+S+Q-K}{R} \binom{K}{Q} \int_\Omega I^K_{BA} D_R E^J_B(h) \times$$

$$\times \Bigl(D_S E^P_A E^L_C(f) D_{J-R-S+M+L+N+P+K} E^M_D(g) - (F \leftrightarrow G) \Bigr),$$

мы получим

$$\{\{F,G\},H\} = \frac{1}{4} \sum \Biggl[\binom{J+L+M}{R+S-P-K} \binom{R+S-K}{R-K} I^N_{CD} I^K_{AB} -$$

$$- \binom{J+L+M}{R+S-K-P-N} \binom{R+S-K}{R-K} I^N_{DC} I^K_{AB} -$$

$$- \sum_Q \binom{J+L+M}{R+S-P-K+Q} \binom{R+S-K+Q}{R} \binom{K}{Q} I^N_{CD} I^K_{BA} +$$

$$+ \sum_Q \binom{J+L+M}{R+S-P-K-N+Q} \binom{R+S-K+Q}{R} \binom{K}{Q} I^N_{DC} I^K_{BA} \Biggr] \times$$

$$\times \int_\Omega D_R E^J_B(h) \Bigl(D_S E^P_A E^L_C(f) D_{J+M+L+P+N+K-R-S} E^M_D(g) - (F \leftrightarrow G) \Bigr).$$

Добавляя члены с циклической перестановкой индексов, сгруппируем слагаемые

$$D_S E^P_A E^L_C(f) \Bigl(D_R E^J_B(h) D_{J+M+L+P+N+K-R-S} E^M_D(g) - (H \leftrightarrow G) \Bigr),$$

и, согласно Лемме 2.8 подставим

$$D_S E_A^P E_C^L(f) = D_S \sum (-1)^{|T|} \binom{L+T}{L} E_A^{P-T} \frac{\partial f}{\partial \phi_C^{(L+T)}} =$$

$$= \sum_{T,U} (-1)^{|U|+|P|} \binom{U}{P-T} \binom{L+T}{L} D_{S+U-P+T} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_A^{(U)} \partial \phi_C^{(L+T)}}.$$

После этого сделаем замену $T \to T - L$

$$\frac{1}{4} \sum (-1)^{|U|+|P|} \binom{U}{L+P-T} \binom{T}{L} [\cdots] D_{S+U+T-L-P} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_A^{(U)} \partial \phi_C^{(T)}} \times$$

$$\times \Big(D_R E_B^J(h) D_{J+M+L+P+N+K-R-S} E_D^M(g) - (H \leftrightarrow G) \Big),$$

и $S \to S + L + P + N + K$

$$\frac{1}{4} \sum (-1)^{|U|+|P|} \binom{T}{L} \binom{U}{L+P-T} \times$$

$$\times \Bigg[\binom{J+L+M}{R+S+L+N} \binom{R+S+L+P+N}{R-K} I_{CD}^N I_{AB}^K -$$

$$- \binom{J+L+M}{R+S+L} \binom{R+S+L+P+N}{R-K} I_{DC}^N I_{AB}^K -$$

$$- \sum_Q \binom{J+L+M}{R+Q+S+L+N} \binom{R+S+Q+P+L+N}{R} \binom{K}{Q} I_{CD}^N I_{BA}^K +$$

$$+ \sum_Q \binom{J+L+M}{R+Q+S+L} \binom{R+Q+S+L+P+N}{R} \binom{K}{Q} I_{DC}^N I_{BA}^K \Bigg] \times$$

$$\times D_{S+U+T+N+K} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi_A^{(U)} \partial \phi_C^{(T)}} \Big(D_R E_B^J(h) D_{J+M-R-S} E_D^M(g) - (H \leftrightarrow G) \Big).$$

Таким образом, мы можем вычислить суммы по P

$$\sum_P (-1)^{|P|} \binom{U}{L+P-T} \binom{R+S+L+P+N}{R-K} =$$

$$= (-1)^{|L|+|U|+|T|} \binom{T+R+S+N}{R-K-U},$$

$$\sum_P (-1)^{|P|} \binom{U}{L+P-T} \binom{R+S+L+P+N+Q}{R} =$$

$$= (-1)^{|L|+|U|+|T|} \binom{T+R+S+N+Q}{R-U},$$

и получить

$$\frac{1}{4}\sum(-1)^{|L|+|T|}\binom{T}{L}\Bigg[\binom{J+L+M}{R+S+L+N}\binom{T+R+S+N}{R-K-U}I^N_{CD}I^K_{AB}-$$

$$-\binom{J+L+M}{R+S+L}\binom{T+R+S+N}{R-K-U}I^N_{DC}I^K_{AB}-$$

$$-\sum_Q\binom{J+L+M}{R+Q+S+L+N}\binom{T+R+S+Q+N}{R-U}\binom{K}{Q}I^N_{CD}I^K_{BA}+$$

$$+\sum_Q\binom{J+L+M}{R+Q+S+L}\binom{T+R+Q+S+N}{R-U}\binom{K}{Q}I^N_{DC}I^K_{BA}\Bigg]\times$$

$$\times D_{S+U+T+N+K}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^{(U)}_A\partial\phi^{(T)}_C}\Big(D_R E^J_B(h)D_{J+M-R-S}E^M_D(g)-(H\leftrightarrow G)\Big).$$

Суммируя по L

$$\sum_L(-1)^{|L|}\binom{T}{L}\binom{L+J+M}{L+R+S+N}=(-1)^{|T|}\binom{J+M}{R+S+N+T},$$

$$\sum_L(-1)^{|L|}\binom{T}{L}\binom{L+J+M}{L+R+S}=(-1)^{|T|}\binom{J+M}{R+S+T},$$

$$\sum_L(-1)^{|L|}\binom{T}{L}\binom{L+J+M}{L+R+S+N+Q}=(-1)^{|T|}\binom{J+M}{R+S+T+N+Q},$$

$$\sum_L(-1)^{|L|}\binom{T}{L}\binom{L+J+M}{L+R+S+Q}=(-1)^{|T|}\binom{J+M}{R+S+T+Q},$$

получаем

$$\frac{1}{4}\sum\Bigg[\binom{J+M}{R+S+N+T}\binom{T+R+S+N}{R-K-U}I^N_{CD}I^K_{AB}-$$

$$-\binom{J+M}{R+S+T}\binom{T+R+S+N}{R-K-U}I^N_{DC}I^K_{AB}-$$

$$-\sum_Q\binom{J+M}{R+Q+S+T+N}\binom{T+R+S+Q+N}{R-U}\binom{K}{Q}I^N_{CD}I^K_{BA}+$$

$$+\sum_Q\binom{J+M}{R+Q+S+T}\binom{T+R+Q+S+N}{R-U}\binom{K}{Q}I^N_{DC}I^K_{BA}\Bigg]\times$$

$$\times D_{S+U+T+N+K}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^{(U)}_A\partial\phi^{(T)}_C}\Big(D_R E^J_B(h)D_{J+M-R-S}E^M_D(g)-(H\leftrightarrow G)\Big). \tag{3.25}$$

Сделаем замену индексов $S \to -S-R+J+M$. Можно просуммировать по Q в третьем слагаемом в квадратных скобках

$$\sum_Q \binom{J+M}{J+M-S+N+Q+T}\binom{J+M-S+N+Q+T}{R-U}\binom{K}{Q} =$$

$$= \binom{J+M}{R-U}\binom{J+M+K+U-R}{S-N-T}.$$

Тогда после замен $R \leftrightarrow S$, $J \leftrightarrow M$, $B \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow C$, $N \leftrightarrow K$ и $U \leftrightarrow T$ мы видим, что первое слагаемое в квадратных скобках остается без изменения, новое второе равняется старому третьему и наоборот. Четвертое слагаемое переходит само в себя[2]:

$$\sum_Q \binom{J+M}{J+M-S+Q+T}\binom{J+M-S+Q+T+N}{R-U}\binom{K}{Q} =$$

$$= \sum_Q \binom{J+M}{J+M-R+Q+U}\binom{J+M-R+Q+U+K}{S-T}\binom{N}{Q}.$$

Очевидно, круглая скобка в уравнении (3.25) меняет знак, и таким образом, выражение равно нулю, и доказательство на этом закончено.

3.7 Выводы

Ясно, что вышеизложенные результаты могут быть использованы в теории поля на многообразиях с краем путем постулирования Правила 4.2, независимо от рассуждений относительно характеристических функций. Новая пуассонова структура позволяет рассматривать динамические проблемы, в которых граничные значения гамильтоновых переменных трактуются на равных основаниях с их внутренними значениями. Динамика полевых переменных на границе определяется как объемной, так и поверхностной частью гамильтониана. Какое бы то ни было граничное

[2] Мы первоначально смогли проверить этот факт только с помощью компьютера. Однако, как позднее любезно сообщил автору Ю.Г. Строганов, а ему в свою очередь Дж. Эндрюс, подобные соотношения рассматриваются в книге [98].

условие есть в действительности просто связь в фазовом пространстве и должно трактоваться согласно стандартной процедуре Дирака — следует искать вторичные и высшие связи. Граничные условия не влияют на динамические уравнения внутри области, до тех пор пока мы не начинаем решать связи эллиптического типа, такие как закон Гаусса в калибровочных теориях. Тогда возникает нелокальная зависимость, включающая в себя зависимость от граничных переменных, и поверхностная часть гамильтониана начинает влиять на уравнения движения внутренних переменных ("дивергенции перестают быть дивергенциями" в терминологии Арновитта, Дезера и Мизнера [6, p.434]).

Необходимость модифицировать скобку Пуассона при рассмотрении задач с нетривиальными граничными условиями осознана многими, и те или иные попытки в этом направлении делаются постоянно. Наиболее серьезные усилия были предприняты, вслед за нашей работой, Берингом, предложившим альтернативную формулу и опубликовавшим ряд статей [55, 74, 75, 76]. Пока ясно, что скобку Беринга не удается обобщить на неультралокальный случай. Единственное (по мнению автора диссертации) возможное обобщение рассмотрено ниже, в главе 5, и оказывается неинвариантным относительно общих замен полевых переменных.

Гораздо более скромные усилия по изменению стандартной скобки поверхностными членами были предприняты в ряде других работ, например, [119, 124].

Работа вызвала определенный отклик у математиков, см. например [106, 125].

Развивается направление, связанное с трактовкой граничных условий как первичных связей и применением к ним процедуры Дирака для проверки их согласованности с уравнениями движения. Эта идея была высказана в [37] и в дальнейшем эксплуатировалась рядом авторов без ссылок на нашу работу [57].

Наконец, случайно это или нет, но после выхода работы [37] использованная там математическая литература по вариационному комплексу и бикомплексу (книга Олвера [79] и работы Андерсона [90]), ссылок на которую раньше автор в физической литературе не встречал, стала цитироваться физиками, а соответствующий математический аппарат — активно использоваться.

Приложение

Здесь мы приведем различные формы записи новых скобок Пуассона для локального случая (3.12):

1) через полные (*не стандартные*) вариационные производные, заданные формулой (3.18), и с учетом Правила 5.4:

$$\{F, G\} = \sum \int \int \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} \{\phi_A(x), \phi_B(y)\} \frac{\delta G}{\delta \phi_B(y)},$$

2) через высшие эйлеровы операторы (3.4):

$$\frac{1}{2} \sum \int_\Omega D_{P+Q} \Big(E_A^P(f) \hat{I}_{AB} E_B^Q(g) - E_A^P(g) \hat{I}_{AB} E_B^Q(f) \Big),$$

где

$$\hat{I}_{AB} = \sum_N I_{AB}^N D_N,$$

3) через производные Фреше (3.5):

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega Tr(D_{f_A} \hat{I}_{AB} D_{g_B} - D_{g_A} \hat{I}_{AB} D_{f_B}),$$

4) через матричные обозначения:

$$\{F, G\} = \frac{1}{2} \sum \int_\Omega \Big(\langle \nabla f \cdot C \nabla g \rangle - \langle \nabla g \cdot C \nabla f \rangle \Big),$$

определенные нижеследующей формулой:

$$(\nabla f)_{JLA} = D_L \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}}, \qquad (\nabla g)_{KMB} = D_M \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}},$$

$$C_{JK,LM,AB} = \binom{J}{L} \binom{K}{M} D_{J+K-L-M} \hat{I}_{AB}.$$

Глава 4

Дивергенции в формальном вариационном исчислении

4.1 Постановка задачи

Гамильтонов формализм классической механики может служить идеальной моделью, иллюстрирующей гармонию физики и математики. Начиная с 1970-х годов стало ясно, что многие его математические конструкции, такие например, как скобка Схоутена-Нейенхейса [100], могут быть перенесены и в теорию поля [79, 101]. Это развитие формализма существенно облегчило поиск новых нелинейных интегрируемых моделей. Еще более общие конструкции, объединяющие скобку Схоутена-Нейенхейса и скобку Фролихера-Нейенхейса, были рассмотрены в начале 90-х годов А. Виноградовым [103].

Но все эти методы (первоначально названные формальным вариационным исчислением [84]) имеют некоторые ограничения. Граничные условия ограничиваются такими, которые позволяют интегрировать по частям. Как правило требуются или периодические условия, или быстрое убывание переменных на пространственной бесконечности. Конечно, это не все физически интересные случаи. Например, кулоновский потенциал в электродинамике не стремится к нулю достаточно быстро. Подобное поведение типично и для полей Янга-Миллса, и для гравитации. Нетривиальные граничные задачи возникают также в динамике сплошных сред.

В предыдущей главе мы ввели теоретико-полевые скобки Пуассона, которые удовлетворяют тождеству Якоби при произвольных граничных условиях. Здесь мы обобщим формальное вариационное исчисление на наиболее общий случай, когда никакие граничные члены, возникающие при интегрировании по частям, не могут быть отброшены. В следующих главах мы рассмотрим некоторые физические приложения развиваемых здесь методов. Интерес к роли дивергенций в теории поля виден из многих публикаций, см. например [104, 105, 106].

Добавим, что недавно появилось предложение Беринга для скобки Пуассона, удовлетворяющей тождеству Якоби независимо от граничных условий [55]. Однако эта новая формула не дает возможности развить геометрический формализм, аналогичный тому, который будет изложен в этой главе. Поэтому неясно, можно ли приложить результат Беринга, например, к неультралокальным скобкам. В следующей главе показано, что скобка Беринга не обладает инвариантностью относительно произвольных замен полевых переменных [44].

В качестве примера, иллюстрирующего нестандартный характер задач, которые будут рассмотрены ниже, напомним историю долгой дискуссии о роли поверхностных интегралов в каноническом формализме общей теории относительности. В течение примерно 15 лет в ней приняли участие Арновитт, Дезер, Мизнер [6], Дирак [5, 4], Хиггс [14], Швингер [15], де Витт [16], Редже и Тейтельбойм [1]. Решение, найденное в последней работе [1], до сих пор является парадигмой трактовки всех близких задач. Предложение заключалось в том, чтобы использовать специальный класс так называемых "дифференцируемых" функционалов. Эти функционалы определяются требованием, чтобы их вариация при заданных граничных условиях не содержала поверхностных вкладов. Скобки Пуассона для этих функционалов определяются стандартной формулой, т.е. совпадают с теми, которые применяются в формальном вариационном исчислении

$$\{F, G\} = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\delta F}{\delta q^A(x)} \frac{\delta G}{\delta p_A(x)} - \frac{\delta G}{\delta q^A(x)} \frac{\delta F}{\delta p_A(x)} \right) d^n x,$$

но при этом здесь допускаются и ненулевые поверхностные вклады.

Возникает естественный вопрос: удовлетворяют ли эти скобки стандартным аксиоматическим требованиям, т.е. тождеству Якоби и замкнутости пуассоновой алгебры на этом пространстве допустимых функционалов? Для случая бесконечной области интегрирования и асимптотических граничных условий утвердительный ответ на второй вопрос был получен Брауном и Энно [21]. Первое требование частично было проанализировано нами и в случае, о котором говорилось выше, ответ также оказался положительным.

Труднее действовать в случае конечной области. Рассмотрим в качестве второго примера динамику жидкости или плазмы. Льюис, Марсден, Монтгомери и Ратью [69] показали, что тождество Якоби для стандартной скобки Пуассона может нарушаться даже в случае фиксированной границы и поэтому скобки Пуассона должны быть модифицированы поверхностными членами. В случае свободной границы оказывается естественным расширить пространство допустимых функционалов, так чтобы их вариации могли включать в себя ненулевые поверхностные вклады. Но согласно работе [69] присутствие ненулевого члена с δq^A в интеграле по границе требует отсутствия соответствующего члена с δp_A и наоборот. В результате возникает новая формула как следствие обобщения вариационной производной, которая теперь может содержать поверхностный вклад

$$\delta H = \int\limits_{\Omega} \frac{\delta^\wedge H}{\delta q^A} \delta q^A d^n x + \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\delta^\vee H}{\delta q^A} \delta q^A \Big|_{\partial\Omega} dS + \int\limits_{\Omega} \frac{\delta^\wedge H}{\delta p_A} \delta p_A d^n x + \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\delta^\vee H}{\delta p_A} \delta p_A \Big|_{\partial\Omega} dS.$$

К сожалению, не совсем ясно, будет ли скобка Пуассона двух допустимых (в новом смысле) функционалов снова допустимым функционалом.

В качестве третьего примера мы хотели бы обратить внимание на следствия некоммутативности стандартных вариационных производных, т.е. производных Эйлера-Лагранжа. Эта особенность обсуждалась с математической точки зрения в работах Андерсона [88, 89] и Олдерсли [91]. Автор столкнулся с этой проблемой независимо при рассмотрении поверхностных членов в пуассоновой алгебре формализма канонической гравитации Аштекара [36]. Было обнаружено, что преобразования типа

$$q^A(x) \to q^A(x), \qquad p_A(x) \to p_A(x) + \frac{\delta F[q]}{\delta q^A(x)},$$

перестают быть каноническими при учете поверхностных членов. Прослеживая соответствие между этим вычислением и стандартными расчетами с помощью δ-функций [107, 108, 109] мы показали, что согласование результатов может быть достигнуто введением $\theta_\Omega(x)$ — характеристической функции области Ω

$$\theta_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Omega, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда стандартные соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \delta(x, y) = 0,$$

необходимо заменить следующими:

$$\left(\theta_\Omega(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + \theta_\Omega(y) \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \delta(x, y) = -\frac{\partial \theta_\Omega}{\partial x^i} \delta(x, y),$$

где мы сохраняем обычно отбрасываемый поверхностный член.

Все обсужденные выше примеры указывают на необходимость расширения формального вариационного исчисления на полные дивергенции.

Это расширение состоит во введении новой квазиградуировки для линейных пространств локальных функционалов, векторных полей, функциональных форм, мульти-векторов и дифференциальных операторов. Чтобы вернуться к стандартному случаю достаточно будет положить $\theta_\Omega(x) \equiv 1$ во всем $\mathbb{R}^n$.

Обобщение формального вариационного исчисления естественно включает новое определение локальных функционалов (не по модулю дивергенций) и их дифференциалов (как полных вариаций произвольных на границе). Мы определим ниже наиболее общим образом пуассоновы бивекторы, которые могут включать в себя граничные вклады. Также будет пересмотрено определение спаривания (или внутреннего умножения), в нем используется след двух дифференциальных операторов, так что спаривание оказывается совместимым с квазиградуировкой. Скобка Пуассона, найденная [37] и в предыдущей главе более или менее эвристически, теперь возникает на основе геометрических конструкций как

$$\{F, G\} = \mathsf{d}G \lrcorner \mathsf{d}F \lrcorner \Psi,$$

где Ψ — пуассонов бивектор.

Мы покажем здесь, что тождество Якоби для новых скобок Пуассона можно проверить и без длинных вычислений биномиальных сумм, использованных в предыдущей главе и в работе [37]. Его выполнение эквивалентно обращению в ноль скобки Схоутена-Нейенхейса пуассонова бивектора с самим собой. И в свою очередь, это условие может быть сравнительно легко проверено с помощью процедуры, предложенной в книге Олвера [79], путем ее минимальной модификации. Здесь мы уделяем больше внимания, чем в предыдущей главе и в работе [37], неультралокальным гамильтоновым операторам с непостоянными коэффициентами, поскольку ряд технических трудностей оказывается преодоленным. Будет выяснено, что не все операторы, являвшиеся гамильтоновыми по отношению к стандартным скобкам, остаются таковыми по отношению к новым скобкам. Например, вторая структура уравнения Кортевега-де Фриза не является автоматически гамильтоновой по отношению к новому формализму, тождество Якоби здесь выполняется только с точностью до дивергенций. В этом отношении она отличается от первой структуры KdV.

Как правило, ниже будут использоваться те же самые обозначения, что и в предыдущей главе и в работе [37], за исключением изменения в обозначении для производной Фреше (вместо D_f будет f'), кроме того мы будем совсем опускать знак суммирования (правило Эйнштейна). Почти всюду удобнее заменять интегралы по конечной области Ω на интегралы по бесконечному пространству $\mathbb{R}^n$, вставляя во все подинтегральные выражения характеристическую функцию θ_Ω. Тогда формализм становится ближе к стандартному формальному вариационному исчислению, где локальные функционалы и функциональные формы определены по модулю дивергенций. Но формальные дивергенции, которые мы отбрасываем здесь, превращаются интегрированием в нули при любых условиях на границе рассматриваемой компактной области, тогда как реальные дивергенции будут организованы в квазиградуированные структуры. Все введенные выше операции согласованы и с отбрасыванием формальных полных дивергенций (если объект является формальной дивергенцией, то результатом операции снова будет формальная дивергенция), и с квазиградуировкой (т.е. если объект — реальная дивергенция, то и результат любой операции с ним — реальная дивергенция). Расширение пространства дифференциальных операторов, допускающее из квазиградуировку, позволяет использовать обобщенное понятие сопряженного оператора.

Таким образом, теперь могут строиться обобщенные антисимметричные операторы, и формула для скобки Пуассона становится более компактной, чем в предыдущей главе, и соответственно, в работе [37], при том что ее смысл не изменяется. Несмотря на это, в доказательстве тождества Якоби мы предпочитаем использовать прежние обозначения, чтобы не затруднять сравнение нового (более общего) доказательства с доказательствами частных случаев, приведенными выше.

Итак мы будем использовать мульти-индексные обозначения $J = (j_1, ..., j_n)$, где $j_i \geq 0$

$$\phi_A^{(J)} = \frac{\partial^{|J|}\phi_A}{\partial^{j_1}x^1 ... \partial^{j_n}x^n}, \qquad |J| = j_1 + ... + j_n.$$

Производная Фреше определяется как

$$f'_A = \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_J, \tag{4.1}$$

где

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \phi_A^{(J+i)} \frac{\partial}{\partial \phi_A^{(J)}}, \quad D_J = D_1^{j_1} ... D_n^{j_n}, \quad D_i^0 = 1, \quad D_i^{-1} = 0.$$

Биномиальные коэффициенты для мульти-индексов:

$$\binom{J}{K} = \binom{j_1}{k_1} \cdots \binom{j_n}{k_n},$$

$$\binom{j}{k} = \begin{cases} \frac{j!}{k!(j-k)!}, & \text{при } 0 \leq k \leq j, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Высшие эйлеровы операторы [79, 91, 92]:

$$E_A^J(f) = (-1)^{|K|+|J|} \binom{K}{J} D_{K-J} \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(K)}}. \tag{4.2}$$

4.2 Локальные функционалы и эволюционные векторные поля

Начнем с терминологии теории градуированных пространств, как она дана в книге [101]. *Градуировкой* в линейном пространстве L является разложение этого пространства в прямую сумму подпространств, причем всем элементам любого подпространства ставится в соответствие специальное значение некоторой функции p (градуирующей функции).

В нашей работе в роли линейного пространства L будут поочередно выступать пространства линейных функционалов, функциональных форм, мульти-векторов (в том числе 1-векторов и взаимно однозначно соответствующих им эволюционных векторных полей) и линейных операторов. Во всех случаях, кроме последнего, имеет место дополнительная эквивалентность элементов этих линейных пространств по отношению к формальному интегрированию по частям, о которой подробнее будет сказано ниже. Она занимает место эквивалентности при обычном интегрировании по частям, которая наличествует в формальном вариационном исчислении. Имея в виду это усложнение структуры линейных пространств мы будем называть соответствующие их разложения не градуировкой, а квазиградуировкой.

Ниже квазиградуирующая функция p будет принимать значения на множестве всех положительных мульти-индексов $J = (j_1, \ldots, j_n)$, и таким образом,

$$L = \bigoplus_{J=0}^{\infty} L^{\langle J \rangle}.$$

Элементы каждого подпространства называются однородными.

Будем называть операцию спаривания $x, y \mapsto x \circ y$ *согласованной с квазиградуировкой*, если спаривание любых однородных элементов также является однородным, и если

$$p(x \circ y) = p(x) + p(y).$$

Ниже мы перейдем к конкретным структурам и начнем с локальных функционалов.

Имеется два способа записи локального функционала: как интеграла от гладкой функции полей и их производных до некоторого конечного порядка $f^{\langle 0\rangle}\left(\phi_A^{(K)}(x)\right)$ по некоторой заданной области Ω пространства $\mathbb{R}^n$, или как интеграла по всему пространству $\mathbb{R}^n$, но с характеристической функцией области θ_Ω.

$$F=\int\limits_{\Omega} f^{\langle 0\rangle}\left(\phi_A^{(K)}(x)\right)d^n x\equiv\int\limits_{\mathbb{R}^n}\theta_\Omega f^{\langle 0\rangle}d^n x. \tag{4.3}$$

Как и в предыдущей главе, и в работе [37], будем обозначать пространство локальных функционалов $\mathcal{A}$. Здесь мы будем называть приведенную выше запись *каноническим видом локального функционала.* Можно формально обобщить это определение, называя локальными функционалами выражения вида:

$$F=\int\limits_{\mathbb{R}^n} D_J\theta_\Omega f^{\langle J\rangle}\left(\phi_A^{(K)}(x)\right)d^n x\equiv\int\theta^{(J)}f^{\langle J\rangle}d^n x\equiv\int f d^n x,$$

где допускается только конечное число слагаемых. Здесь и в дальнейшем мы упростим обозначения для производных θ и будем опускать значок Ω. Все интегралы, для которых область интегрирования не указана явно, должны пониматься как интегралы по всему пространству $\mathbb{R}^n$, символ $d^n x$ в этой главе опускается. Разумеется, любой функционал может быть приведен к виду (4.3), эксклюзивно используемому в предыдущей главе и в работе [37], с помощью интегрирования по частям

$$F=\int\theta\tilde{f}^{\langle 0\rangle}\equiv\int\limits_{\Omega}\tilde{f}^{\langle 0\rangle},$$

где

$$\tilde{f}^{\langle 0\rangle}=(-1)^{|J|}D_J f^{\langle J\rangle}.$$

Формальное интегрирование по частям по бесконечному пространству $\mathbb{R}^n$, очевидно, изменяет вид функции f и, в частности, значение квазиградуирующей функции p. В то же время очевидно, что функционал при этом не изменяется. Ниже станет ясно, что общая ситуация является следующей: с одной стороны у нас есть согласованность операций спаривания с квазиградуировкой, а с другой стороны — с возможностью производить формальное интегрирование по частям. Таким образом, основные объекты (локальные функционалы etc.) определяются как классы эквивалентности по модулю формальных дивергенций (т.е., дивергенций от выражений, содержащих θ-факторы), а единственное разложение в однородные подпространства с фиксированной квазиградуирующей функцией может быть выполнено только для представителей этих классов.

Назовем выражения вида

$$\Psi = \int \theta^{(J)} D_K \psi_A^{\langle J \rangle} \frac{\partial}{\partial \phi_A^{(K)}} \equiv \int \theta^{(J)} \psi^{\langle J \rangle} \equiv \int \psi,$$

эволюционными векторными полями. Действие эволюционного векторного поля на локальный функционал дается формулой

$$\Psi F = \int \theta^{(I+J)} D_K \psi_A^{\langle J \rangle} \frac{\partial f^{\langle I \rangle}}{\partial \phi_A^{(K)}} \equiv \int \theta^{(I+J)} \psi^{\langle J \rangle} f^{\langle I \rangle} \equiv \int \psi f. \tag{4.4}$$

Прямым вычислением проверяется, что эта операция согласована с формальным интегрированием по частям, т.е.

$$\psi D f = D(\psi f),$$

так же как это имеет место и в формальном вариационном исчислении. Это соотношение, разумеется, записано для подинтегральных выражений.

Легко видеть, что эволюционное векторное поле с коэффициентами

$$\psi_A^{\langle J \rangle} = D_L \xi_B^{\langle I \rangle} \frac{\partial \lambda_A^{\langle J-I \rangle}}{\partial \phi_B^{(L)}} - D_L \lambda_B^{\langle I \rangle} \frac{\partial \xi_A^{\langle J-I \rangle}}{\partial \phi_B^{(L)}}$$

может рассматриваться как *коммутатор эволюционных векторных полей* Ξ и Λ

$$\Psi F = [\Xi, \Lambda] F = \int \Big(\xi(\lambda f) - \lambda(\xi f) \Big),$$

при том, что для операции коммутирования выполняется тождество Якоби, так что эти векторные поля образуют алгебру Ли.

Объяснимся по поводу представления эволюционных векторных полей в виде интегралов, что идет вразрез с традиционными обозначениями.

Формальное вариационное исчисление [84] оперирует с локальными функционалами, представляемыми в виде однократных интегралов (например, по пространству $\mathbb{R}^n$) от функций специального вида, например, от бесконечно дифференцируемых. Функциональные формы и мультивекторы выражаются подобными же интегралами. Спаривание двух таких объектов снова дает нам однократный интеграл.

В то же время, широко распространены, особенно в физической литературе, и другие обозначения, использующие δ-функцию и ее производные. Тогда результат спаривания двух однократных интегралов понимается как двойной интеграл. Однако так как этот двойной интеграл содержит δ-функцию, его всегда можно превратить в однократный.

Это превращение двойного интеграла в однократный с помощью δ-функции является тривиальным в тех случаях, когда не может возникнуть никаких граничных членов. Но предметом нашего обсуждения является как раз противоположный случай. Здесь требуется новое правило, и оно было предложено в предыдущей главе (и в работе [37]) как Правило 4.2

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} f(x)g(y)D_J^{(x)}D_K^{(y)}\delta(x,y) = \int\limits_{\Omega} D_K f D_J g. \tag{4.5}$$

В этой главе мы дадим новую эквивалентную форму этого правила, которая помогает совсем избавиться от двойных интегралов.

Понятие векторного поля первоначально возникло при изучении эволюционных дифференциальных уравнений и их симметрий. В формальном вариационном исчислении [84] функционалы, в действительности, заменяются классами эквивалентности функций, и поэтому действие эволюционных векторных полей на локальные функционалы заменяется их действием на функции

$$\psi f = D_K\psi_A\frac{\partial f}{\partial\phi_A^{(K)}}.$$

Однако чтобы представить функционалы интегралами и потребовать, чтобы результат действия эволюционного векторного поля на локальный функционал был снова локальным функционалом, т.е. интегралом, абсолютно естественно представить эволюционные векторные поля также в виде интегралов:

$$\Psi = \int\limits_{\Omega} D_K \psi_A(x) \frac{\partial}{\partial \phi_A^{(K)}(x)} \equiv \int \psi,$$

в комбинации со стандартным правилом

$$\frac{\partial \phi_A^{(J)}(y)}{\partial \phi_B^{(K)}(x)} = \delta(x,y)\delta_{AB}\delta_{JK}. \tag{4.6}$$

Другим аргументом, поддерживающим наши обозначения, является эквивалентность эволюционных векторных полей и 1-векторов, которая демонстрируется для стандартного формального вариационного исчисления в книге [79], а для нашего случая в параграфе 5 этой главы. 1-векторы как частный случай мульти-векторов всегда записываются в виде интегралов.

Кроме ревизии обозначений хотелось бы обратить внимание на новую особенность в трактовке векторных полей: теперь они больше не являются дифференцированиями по отношению к стандартным функциям. Разумеется, и в традиционном подходе векторные поля не являются дифференцированиями по отношению к функционалам, ибо умножение функционалов не определено. Но эти векторные поля, традиционно записываемые без знака интеграла, являются дифференцированиями по отношению к функциям. Это свойство здесь частично потеряно. Формально его можно восстановить, если рассматривать подинтегральные выражения, содержащие θ как функции и принять соотношение

$$D_I\theta \times D_J\theta = D_{I+J}\theta. \tag{4.7}$$

за определение их умножения.

В таком контексте формула (4.4), введенная в качестве определения, может пониматься также как следствие стандартного соотношения (4.6) и нового определения (4.7).

Таким образом, очевидно, что “правило умножения обобщенных функций”, взятое из предыдущей главы, т.е. уравнение (4.7), является не чем иным как способом определить спаривание, согласованное с введенной квазиградуировкой.

Наконец, упомянем о возможности использовать в рамках этого формализма и другие обозначения. Конечно, можно избежать θ-функций и пользоваться только интегралами по области Ω. Тогда любой локальный функционал можно записать в виде

$$F = \int\limits_{\Omega} D_J f^{\langle\langle J\rangle\rangle},$$

где

$$f^{\langle\langle J\rangle\rangle} = (-1)^{|J|} f^{\langle J\rangle},$$

аналогично переписываются и другие объекты. Соответственно уравнение (4.4) будет записываться как

$$\Psi F = \int\limits_{\Omega} D_{I+J}\left(D_K \psi_A^{\langle\langle J\rangle\rangle} \frac{\partial f^{\langle\langle I\rangle\rangle}}{\partial \phi_A^{(K)}} \right).$$

4.3 Дифференциалы и функциональные формы

Дифференциал локального функционала есть просто его первая вариация

$$\mathsf{d}F = \int \theta^{(J)} \frac{\partial f^{\langle J\rangle}}{\partial \phi_A^{(K)}} \delta\phi_A^{(K)} \equiv \int \theta^{(J)} \mathsf{d} f^{\langle J\rangle} \equiv \int \mathsf{d} f,$$

здесь и в дальнейшем $\delta\phi_A^{(K)} = D_K \delta\phi_A$. Это также можно выразить через производную Фреше (4.1) или через высшие эйлеровы операторы (4.2)

$$\mathsf{d}F = \int \theta^{(J)} f^{\langle J\rangle\prime}(\delta\phi) = \int \theta^{(J)} D_K \left(E_A^K (f^{\langle J\rangle}) \delta\phi_A \right).$$

Этот дифференциал является специальным примером функциональной 1-формы. Общая функциональная 1-форма может быть записана в виде

$$\Sigma = \int \theta^{(J)} \sigma_{AK}^{\langle J\rangle} \delta\phi_A^{(K)} \equiv \int \theta^{(J)} \sigma^{\langle J\rangle} \equiv \int \sigma.$$

Конечно, коэффициенты $\sigma_{AK}^{\langle J\rangle}$ не определяются единственным образом, так как мы всегда можем выполнить формальное интегрирование по частям. Назовем следующее выражение *каноническим видом функциональной 1-формы*

$$\Sigma = \int \theta^{(J)}\sigma_A^{\langle J\rangle}\delta\phi_A.$$

Аналогично мы можем определить *функциональные m-формы* как интегралы или классы эквивалентности по модулю формальных дивергенций от вертикальных m-форм

$$\Sigma = \frac{1}{m!}\int \theta^{(J)}\sigma^{\langle J\rangle}_{A_1K_1,\dots,A_mK_m}\delta\phi^{(K_1)}_{A_1}\wedge\dots\wedge\delta\phi^{(K_m)}_{A_m} = \int\theta^{(J)}\sigma^{\langle J\rangle} = \int\sigma.$$

Определим *спаривание* (или *внутреннее произведение*) эволюционного векторного поля и 1-формы следующим образом:

$$\Sigma(\Xi) = \Xi\lrcorner\Sigma = \int\theta^{(I+J)}\sigma^{\langle J\rangle}_{AK}D_K\xi^{\langle I\rangle}_A = \int\theta^{(I+J)}\sigma^{\langle J\rangle}(\xi^{\langle I\rangle}) = \int\sigma(\xi). \tag{4.8}$$

Внутреннее произведение эволюционного векторного поля и функциональной m-формы задается как

$$\Xi\lrcorner\Sigma = \frac{1}{m!}(-1)^{i+1}\int\theta^{(I+J)}\sigma^{\langle J\rangle}_{A_1K_1,\dots,A_mK_m}D_{K_i}\xi^{\langle I\rangle}_{A_i}\delta\phi^{(K_1)}_{A_1}\wedge\dots$$

$$\dots\wedge\delta\phi^{(K_{i-1})}_{A_{i-1}}\wedge\delta\phi^{(K_{i+1})}_{A_{i+1}}\wedge\dots\wedge\delta\phi^{(K_m)}_{A_m}.$$

Тогда значение m-формы на m эволюционных векторных полях будет задаваться выражением

$$\Sigma(\Xi_1,\dots,\Xi_m) = \Xi_m\lrcorner\dots\Xi_1\lrcorner\Sigma.$$

Прямым вычислением можно проверить, что

$$(D\sigma)(\xi_1,\dots,\xi_m) = D\left(\sigma(\xi_1,\dots,\xi_m)\right).$$

Дифференциал m-формы, который задается как

$$\mathsf{d}\Sigma = \frac{1}{m!}\int\theta^{(J)}\frac{\partial\sigma^{\langle J\rangle}_{A_1K_1,\dots,A_mK_m}}{\partial\phi^{(K)}_A}\delta\phi^{(K)}_A\wedge\delta\phi^{(K_1)}_{A_1}\wedge\dots\wedge\delta\phi^{(K_m)}_{A_m} = \int\theta^{(J)}\mathsf{d}\sigma^{\langle J\rangle} = \int\mathsf{d}\sigma,$$

удовлетворяет стандартным свойствам

$$\mathsf{d}^2 = 0$$

и

$$\mathsf{d}\Sigma(\Xi_1,\ldots,\Xi_{m+1}) = \sum_i (-1)^{i+1}\Xi_i\Sigma(\Xi_1,\ldots,\hat{\Xi}_i,\ldots,\Xi_{m+1}) +$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\Sigma([\Xi_i,\Xi_j],\Xi_1,\ldots,\hat{\Xi}_i,\ldots,\hat{\Xi}_j,\ldots,\Xi_{m+1}).$$

Производная Ли от функциональной формы Σ вдоль эволюционного векторного поля Ξ может быть определена с помощью стандартной формулы:

$$L_\Xi\Sigma = \Xi \lrcorner \mathsf{d}\Sigma + \mathsf{d}\Big(\Xi \lrcorner \Sigma\Big).$$

4.4 Дифференциальные операторы и их сопряженные

Назовем линейные матричные дифференциальные операторы вида

$$\hat{I}_{AB} = \theta^{(J)} I_{AB}^{\langle J\rangle N} D_N$$

квазиградуированными дифференциальными операторами.

Будем называть линейный дифференциальный оператор $\hat{I}^*$ *сопряженным* $\hat{I}$, если для произвольного набора гладких функций f_A, g_A имеет место равенство

$$\int f_A \hat{I}_{AB} g_B = \int g_A \hat{I}^*_{AB} f_B.$$

Можно вывести вид коэффициентов сопряженного оператора

$$I^{*\langle J\rangle M}_{AB} = (-1)^{|K|}\binom{K}{L}\binom{K-L}{M} D_{K-L-M} I^{\langle J-L\rangle K}_{BA}. \tag{4.9}$$

Легко проверить, что из Правила 4.2 предыдущей главы и работы [37] следует соотношение

$$\hat{I}_{AB}(x)\delta(x,y) = \hat{I}^*_{BA}(y)\delta(x,y).$$

Например, получаем

$$\left(\theta(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + \theta(y)\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\delta(x,y) = -\theta^{(i)}\delta(x,y). \tag{4.10}$$

Повторим здесь замечание предыдущей главы о том, что в одной из предшествовавших работ [36] мы пытались связать появление поверхностных членов в скобках Пуассона и стандартные манипуляции с δ-функцией. Использованный там ansatz в случае простейшего примера оператора, приведенного выше, совпадает с (4.10) с точностью до знака. Причина этого отличия заключается в другом выборе правила, отличающегося от Правила 4.2. Тот ansatz ведет к стандартным скобкам Пуассона, которые не подходят для нетривиальных граничных задач.

Операторы, удовлетворяющие соотношению

$$\hat{I}^* = -\hat{I},$$

будем называть *антисимметричными*. С их помощью можно выразить 2-формы (а также 2-векторы, которые будут определены чуть ниже) в каноническом виде:

$$\Sigma = \frac{1}{2} \int \delta\phi_A \wedge \hat{I}_{AB} \delta\phi_B.$$

Ясно, что можно рассматривать представления функциональных форм как разложения по базису, определенному как тензорное произведение $\delta\phi_A$, с полностью антисимметричными мульти-линейными операторами

$$\hat{\sigma} = \theta^{(J)} \sigma^{\langle J \rangle}_{A_1 K_1, \ldots, A_m K_m} \left(D_{K_1} \cdot, \ldots, D_{K_m} \cdot \right)$$

в качестве коэффициентов этих разложений.

4.5 Мульти-векторы, смешанные тензоры и скобка Схоутена-Нейенхейса

Введем дуальный базис к $|\delta\phi_A\rangle$ соотношением

$$\left\langle \frac{\delta}{\delta\phi_B(y)}, \delta\phi_A(x) \right\rangle = \delta_{AB} \delta(x, y) \tag{4.11}$$

и построим с помощью тензорного произведения базис

$$\frac{\delta}{\delta\phi_{B_1}(y)} \otimes \frac{\delta}{\delta\phi_{B_2}(y)} \otimes \cdots \otimes \frac{\delta}{\delta\phi_{B_m}(y)}.$$

Тогда используя полностью антисимметричные мульти-линейные операторы, описанные в предыдущем параграфе, можно определить *функциональные m-векторы* (или *мульти-векторы*)

$$\Psi = \frac{1}{m!}\int \theta^{(J)}\psi^{\langle J\rangle}_{B_1L_1,\ldots,B_mL_m} D_{L_1}\frac{\delta}{\delta\phi_{B_1}} \wedge \cdots \wedge D_{L_m}\frac{\delta}{\delta\phi_{B_m}} = \int \theta^{(J)}\psi^{\langle J\rangle}.$$

Здесь возникает естественный вопрос о связи между эволюционными векторными полями и 1-векторами. Очевидно, что эволюционные векторные поля теряют свой вид после интегрирования по частям, тогда как 1-векторы сохраняют. Проинтегрируем по частям выражение для общего эволюционного векторного поля

$$\Xi = \int \theta^{(J)} D_K \xi^{\langle J\rangle}_A \frac{\partial}{\partial\phi^{(K)}_A}$$

тогда перебрасывая D_K с $\xi^{\langle J\rangle}_A$, мы получим

$$\Xi = \int \xi^{\langle J\rangle}_A \theta^{(J+L)}(-1)^{|K|}\binom{K}{L} D_{K-L}\frac{\partial}{\partial\phi^{(K)}_A}.$$

Легко видеть, что используя (4.7), т.е., Правило 5.4, в обратную сторону, можно вывести формулы

$$\Xi = \int \left(\theta^{(J)}\xi^{\langle J\rangle}_A\right)\left(\theta^{(L)}(-1)^{|L|}E^L_A\right) = \int \theta^{(J)}\xi^{\langle J\rangle}_A \frac{\delta}{\delta\phi_A},$$

где последовательно используются высшие эйлеровы операторы (4.2) и полные вариационные производные (Определение 5.1 предыдущей главы)

$$\frac{\delta F}{\delta\phi_A} = \sum (-1)^{|J|} E^J_A(f) D_J\theta.$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение 5.1 *Имеется взаимно-однозначное соответствие между эволюционными векторными полями и функциональными 1-векторами. Коэффициенты 1-вектора в каноническом виде $\xi^{\langle J\rangle}_A$ равны характеристикам эволюционного векторного поля.*

Нетрудно показать, что можно выполнить спаривание (внутреннее умножение) 1-формы и 1-вектора, и это спаривание сохраняет отождествление между эволюционными векторными полями и функциональными 1-векторами. Действительно, определение дуального базиса (4.11) и (4.7), т.е. Правило 5.4 предыдущей главы и [37], позволяет нам вывести следующее

$$\Sigma(\Xi) = \Xi \rfloor \Sigma = \int\int \theta^{(I)}(x)\theta^{(J)}(y)\sigma^{\langle I\rangle}_{AK}(x)\xi^{\langle J\rangle}_{BL}(y)\left\langle D_L\frac{\delta}{\delta\phi_B(y)}, D_K\delta\phi_A(x)\right\rangle =$$

$$= \int \theta^{(I+J)}D_L\sigma^{\langle I\rangle}_{AK}D_K\xi^{\langle J\rangle}_{AL} = \int \theta^{(I+J)}\sigma^{\langle I\rangle}(\xi^{\langle J\rangle}) = \int \sigma(\xi) = \int \theta^{(I+J)}\mathrm{Tr}(\sigma^{\langle I\rangle}\xi^{\langle J\rangle}),$$

и когда 1-вектор выражен в канонической форме (т.е. когда только член с $L = 0$ отличен от нуля), этот результат совпадает с уравнением (4.8).

Эта формула спаривания будет применяться ниже также и для внутреннего умножения 1-векторов и m-форм или 1-форм и m-векторов. Ее важность следует из того, что она инвариантна относительно формального интегрирования по частям и для форм, и для векторов, т.е.

$$(\mathrm{D}\sigma)(\xi) = \mathrm{D}(\sigma(\xi)) = \sigma(\mathrm{D}(\xi)).$$

Как легко видеть, эта инвариантность является следствием того, что в спаривании применяется след дифференциальных операторов (играющих роль компонент тензорных объектов в предложенном базисе).

Внутреннее умножение 1-вектора на m-форму, и соответственно, 1-формы на m-вектор определяется следующим образом:

$$\Xi \rfloor \Sigma = \frac{1}{m!}(-1)^{(i+1)}\int \theta^{(I+J)}D_{K_i}\xi^{\langle I\rangle}_{A_iL}D_L\Bigg(\sigma^{\langle J\rangle}_{A_1K_1,\dots,A_mK_m}\delta\phi^{(K_1)}_{A_1}\wedge\dots$$

$$\dots\wedge\delta\phi^{(K_{i-1})}_{A_{i-1}}\wedge\delta\phi^{(K_{i+1})}_{A_{i+1}}\wedge\dots\wedge\delta\phi^{(K_m)}_{A_m}\Bigg) = (-1)^{(i+1)}\int\theta^{(I+J)}\xi^{\langle I\rangle}\rfloor\sigma^{\langle J\rangle}. \qquad (4.12)$$

Тогда можно также определить значение m-формы на m 1-векторах (или, аналогично, m-вектора на m 1-формах)

$$\Sigma(\Xi_1,\dots,\Xi_m) = \Xi_m\rfloor\dots\Xi_1\rfloor\Sigma = \int\theta^{(J+I_1+\dots+I_m)}\mathrm{Tr}\left(\sigma^{\langle J\rangle}\xi^{\langle I_1\rangle}_1\cdots\xi^{\langle I_m\rangle}_m\right),$$

где мульти-линейный оператор σ действует каждым своим входом только на соответствующий ξ, тогда как каждое дифференцирование оператора ξ действует на произведение σ и всех остальных ξ.

Можно ввести *дифференциал m-вектора*

$$\mathsf{d}\Psi = \frac{1}{m!}\int \theta^{(J)}\frac{\partial\psi^{\langle J\rangle}_{A_1K_1,\ldots,A_mK_m}}{\partial\phi^{(L)}_B}\delta\phi^{(L)}_B D_{K_1}\frac{\delta}{\delta\phi_{A_1}}\wedge\cdots\wedge D_{K_m}\frac{\delta}{\delta\phi_{A_m}},$$

в качестве примера смешанного $\binom{m}{1}$ объекта. Очевидно, $\mathsf{d}^2\Psi = 0$.

С помощью введенных выше конструкций можно определить *скобку Схоутена-Нейенхейса*

$$\big[\Xi,\Psi\big]_{SN} = \mathsf{d}\Xi\,\lrcorner\,\Psi + (-1)^{pq}\mathsf{d}\Psi\,\lrcorner\,\Xi$$

двух мульти-векторов порядков p и q. Результатом этой операции является $p+q-1$-вектор и это аналог скобки Схоутена-Нейенхейса, используемой в тензорном анализе [100]. Ее применение в формальном вариационном исчислении описано в работах [79, 101]. Однако в цитированных ссылках эта скобка обычно определялась для операторов. Мы рекомендуем интересную работу [80] в качестве первоисточника трактовки скобки Схоутена-Нейенхейса для мульти-векторов. Наше построение этой скобки гарантирует согласие с эквивалентностью по модулю дивергенций

$$\big[D\xi,\psi\big]_{SN} = D\big[\xi,\psi\big]_{SN} = \big[\xi,D\psi\big]_{SN}.$$

Утверждение 5.2 *Скобка Схоутена-Нейенхейса двух функциональных 1-векторов с точностью до знака совпадает с коммутатором соответствующих эволюционных векторных полей.*

Доказательство. Без потери общности рассмотрим два 1-вектора в каноническом виде

$$\Xi = \int \theta^{(J)}\xi^{\langle J\rangle}_A\frac{\delta}{\delta\phi_A}, \qquad \Psi = \int \theta^{(K)}\psi^{\langle K\rangle}_B\frac{\delta}{\delta\phi_B}$$

и вычислим

$$\big[\Xi,\Psi\big]_{SN} = \mathsf{d}\Xi\,\lrcorner\,\Psi - \mathsf{d}\Psi\,\lrcorner\,\Xi.$$

Получаем

$$\mathsf{d}\Xi = \int \theta^{(J)}\xi^{\langle J\rangle\prime}_A(\delta\phi)\frac{\delta}{\delta\phi_A} = \int \theta^{(J)}\frac{\partial\xi^{\langle J\rangle}_A}{\partial\phi^{(L)}_C}\delta\phi^{(L)}_C\frac{\delta}{\delta\phi_A},$$

и

$$\mathsf{d}\Xi \lrcorner \Psi = -\int \theta^{(J+K)} \frac{\partial \xi_A^{\langle J \rangle}}{\partial \phi_B^{(L)}} D_L \psi_B^{\langle K \rangle} \frac{\delta}{\delta \phi_A}.$$

Таким образом, мы приходим к результату

$$[\Xi, \Psi]_{SN} = -\int \theta^{(J+K)} \left(D_L \psi_B^{\langle K \rangle} \frac{\partial \xi_A^{\langle J \rangle}}{\partial \phi_B^{(L)}} - D_L \xi_B^{\langle K \rangle} \frac{\partial \psi_A^{\langle J \rangle}}{\partial \phi_B^{(L)}} \right) \frac{\delta}{\delta \phi_A} = -[\Xi, \Psi],$$

что и требовалось доказать.

Утверждение 5.3 (Лемма Олвера [79]) *Скобку Схоутена-Нейенхейса двух бивекторов можно записать в виде*

$$[\Lambda, \Psi]_{SN} = -\frac{1}{2} \int \xi \wedge \hat{I}'(\hat{K}\xi) \wedge \xi - \frac{1}{2} \int \xi \wedge \hat{K}'(\hat{I}\xi) \wedge \xi, \tag{4.13}$$

где два дифференциальных оператора $\hat{I}$, $\hat{K}$ являются коэффициентами бивекторов, записанных в каноническом виде.

Доказательство. Рассмотрим скобку Схоутена-Нейенхейса двух бивекторов и без потери общности возьмем их в каноническом виде

$$\Lambda = \frac{1}{2} \int \theta^{(L)} \xi_A \wedge I_{AB}^{\langle L \rangle N} D_N \xi_B,$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \int \theta^{(M)} \xi_C \wedge K_{CD}^{\langle M \rangle P} D_P \xi_D,$$

где $\xi_A = \delta / \delta \phi_A$ и операторы $\hat{I}$, $\hat{K}$ являются антисимметричными. Тогда получаем

$$\mathsf{d}\Lambda = \frac{1}{2} \int \theta^{(L)} \frac{\partial I_{AB}^{\langle L \rangle N}}{\partial \phi_E^{(J)}} \delta \phi_E^{(J)} \xi_A \wedge D_N \xi_B$$

и

$$\mathsf{d}\Lambda \lrcorner \Psi = \frac{1}{4} \int \theta^{(L+M)} \frac{\partial I_{AB}^{\langle L \rangle N}}{\partial \phi_C^{(J)}} D_J \left(K_{CD}^{\langle M \rangle P} D_P \xi_D \right) \wedge \xi_A \wedge D_N \xi_B -$$

$$-\frac{1}{4} \int \theta^{(L+M)} D_P \left(\frac{\partial I_{AB}^{\langle L \rangle N}}{\partial \phi_D^{(J)}} \xi_A \wedge D_N \xi_B \right) \wedge D_J \left(\xi_C K_{CD}^{\langle M \rangle P} \right).$$

Теперь проинтегрируем по частям второе слагаемое

$$\mathsf{d}\Lambda \lrcorner \Psi = -\frac{1}{4} \int \theta^{(L+M)} \xi_A \wedge \left(I_{AB}^{\langle L \rangle N} \right)' \left(\hat{K}^{\langle M \rangle} \xi \right) \wedge D_N \xi_B -$$

$$-\frac{1}{4} \int \theta^{(L+M+Q)} (-1)^{|P|} \binom{P}{Q} \frac{\partial I_{AB}^{\langle L \rangle N}}{\partial \phi_D^{(J)}} \xi_A \wedge D_N \xi_B \wedge D_{J+P-Q} \left(\xi_C K_{CD}^{\langle M \rangle P} \right).$$

Наконец, во втором слагаемом изменим порядок множителей во внешнем произведении, сделаем замену $M \to M - Q$ и перепишем все выражение в виде

$$\mathsf{d}\Lambda \lrcorner \Psi = -\frac{1}{4} \int \theta^{(L+M)} \xi_A \wedge \left(I_{AB}^{\langle L \rangle N} \right)'_C \left(\hat{K}_{CD}^{\langle M \rangle} \xi_D + \right.$$

$$\left. + (-1)^{|P|} \binom{P}{Q} \binom{P-Q}{R} D_{P-Q-R} K_{CD}^{\langle M-Q \rangle P} D_R \xi_C \right) \wedge D_N \xi_B.$$

Воспользовавшись определением сопряженного оператора (4.9) представим окончательный результат в виде

$$\left[\Lambda, \Psi\right]_{SN} = -\frac{1}{2} \int \theta^{(L+M)} \xi \wedge \left((\hat{I}^{\langle L \rangle})' (\hat{K}^{\langle M \rangle} \xi) + (\hat{K}^{\langle M \rangle})' (\hat{I}^{\langle L \rangle} \xi) \right) \wedge \xi,$$

что позволяет использовать в нашем обобщенном на дивергенции формализме метод проверки тождества Якоби, предложенный в книге [79] (см. главу 7). Общая процедура проверки гамильтоновости рассматривалась также в работе [85].

4.6 Скобки Пуассона и гамильтоновы векторные поля

Будем называть бивектор

$$\Psi = \frac{1}{2} \int \frac{\delta}{\delta \phi_A} \wedge \hat{I}_{AB} \frac{\delta}{\delta \phi_B},$$

образованный с помощью квазиградуированного антисимметричного дифференциального оператора

$$\hat{I}_{AB} = \theta^{(L)} I_{AB}^{\langle L \rangle N} D_N,$$

пуассоновым бивектором, если

$$\left[\Psi, \Psi\right]_{SN} = 0.$$

Оператор $\hat{I}_{AB}$ тогда будет называться *гамильтоновым оператором.* Будем называть значение пуассонова бивектора на дифференциалах двух функционалов F и G

$$\{F, G\} = \Psi(\mathsf{d}F, \mathsf{d}G) = \mathsf{d}G \lrcorner \mathsf{d}F \lrcorner \Psi$$

скобкой Пуассона этих функционалов.

Явный вид скобки Пуассона легко найти. Он зависит от явного вида дифференциала функционалов, который может изменяться в результате формального интегрирования по частям. Разумеется, все эти виды эквивалентны. Беря крайние случаи, мы получаем запись через производные Фреше

$$\{F, G\} = \int \theta^{(J)} \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}^{\langle J \rangle}_{AB} g'_B \right) \tag{4.14}$$

или через высшие эйлеровы операторы (4.2)

$$\{F, G\} = \int \theta^{(J)} D_{P+Q} \left(E^P_A(f) \hat{I}^{\langle J \rangle}_{AB} E^Q_B(g) \right). \tag{4.15}$$

Теорема 6.1 *Определенная выше скобка Пуассона удовлетворяет стандартным требованиям билинейности, антисимметрии, замкнутости пространства локальных функционалов $\mathcal{A}$ и тождеству Якоби, т.е.* Определению 2.3 *предыдущей главы (и работы [37]).*

Доказательство. 1) Из предыдущих формул (4.14), (4.15) видно, что $\{F, G\}$ есть локальный функционал, 2) антисимметрия $\{F, G\}$ очевидна, а 3) эквивалентность тождества Якоби свойству пуассоновости бивектора будет доказана в следующем параграфе.

Результат внутреннего умножения дифференциала локального функционала H на пуассонов бивектор (с точностью до знака) назовем *гамильтоновым векторным полем* (или *гамильтоновым 1-вектором*)

$$\hat{I}\mathsf{d}H = -\mathsf{d}H \lrcorner \Psi,$$

соответствующим гамильтониану H. Легко видеть, что имеют место стандартные соотношения:

$$\{F, H\} = \mathsf{d}F(\hat{I}\mathsf{d}H) = (\hat{I}\mathsf{d}H)F.$$

Теорема 6.2 *Гамильтоново векторное поле, соответствующее скобке Пуассона функционалов F и H, совпадает с точностью до знака с коммутатором гамильтоновых векторных полей, соответствующих этим функционалам.*

Доказательство. Рассмотрим значение коммутатора гамильтоновых векторных полей $\hat{I}\mathsf{d}F$ и $\hat{I}\mathsf{d}H$ на произвольном функционале G

$$[\hat{I}\mathsf{d}F, \hat{I}\mathsf{d}H]G = \hat{I}\mathsf{d}F(\hat{I}\mathsf{d}H(G)) - \hat{I}\mathsf{d}H(\hat{I}\mathsf{d}F(G)) =$$

$$= \hat{I}\mathsf{d}F(\{G, H\}) - \hat{I}\mathsf{d}H(\{G, F\}) = \{\{G, H\}, F\} - \{\{G, F\}, H\} =$$

$$= -\{G, \{F, H\}\} = -\hat{I}\mathsf{d}\{F, H\}(G),$$

где мы воспользовались тождеством Якоби и антисимметрией скобки Пуассона. Благодаря произвольности выбора G это доказывает теорему.

Пример 6.3

Рассмотрим первую структуру

$$\{u(x), u(y)\} = \frac{1}{2}(D_x - D_y)\delta(x, y)$$

уравнения Кортевега-де Фриза (Пример 7.6 из книги [79])

$$u_t = u_{xxx} + uu_x.$$

Построим сопряженный оператору θD квазиградуированный оператор, согласно уравнению (4.9)

$$(\theta D)^* = -\theta D - D\theta,$$

тогда антисимметричный оператор, соответствующий нашей структуре, будет иметь вид

$$\hat{I} = \frac{1}{2}\Big(\theta D - (\theta D)^*\Big) = \theta D + \frac{1}{2}D\theta.$$

Пуассонов бивектор определяется формулой

$$\Psi = \frac{1}{2}\int \theta\Big(\frac{\delta}{\delta u} \wedge D\frac{\delta}{\delta u}\Big).$$

Дифференциал локального функционала H (для простоты запишем его в каноническом виде)

$$H = \int \theta h$$

оказывается равным

$$\mathsf{d}H = \int \theta h'(\delta u) = \int \theta^{(k)}(-1)^k E^k(h)\delta u,$$

где можно использовать производную Фреше или же высшие эйлеровы операторы. Таким образом, гамильтоново векторное поле, генерированное H, будет следующим:

$$\hat{I}\mathsf{d}H = -\mathsf{d}H \lrcorner \Psi = -\frac{1}{2}\int \theta \left(h'(D\frac{\delta}{\delta u}) - Dh'(\frac{\delta}{\delta u}) \right),$$

или

$$-\frac{1}{2}\int \theta^{(k)}(-1)^k \left(E^k(h)D - DE^k(h)\right)\frac{\delta}{\delta u},$$

или еще

$$-\frac{1}{2}\int \theta^{(k)}(-1)^k D_i \left(E^k(h)D - DE^k(h)\right)\frac{\partial}{\partial u^{(i)}}.$$

Значение этого векторного поля на другом функционале F совпадает со скобкой Пуассона:

$$-\mathsf{d}F \lrcorner \mathsf{d}H \lrcorner \Psi = \{F, H\} = \frac{1}{2}\int \theta^{(k+l)}(-1)^{k+l}\left(E^k(f)DE^l(h) - E^k(h)DE^l(f)\right).$$

4.7 Доказательство тождества Якоби

В этом параграфе мы докажем, что тождество Якоби для скобки Пуассона выполняется тогда и только тогда, когда скобка Схоутена-Нейенхейса соответствующего пуассонова бивектора с самим собой обращается в ноль. Это должно завершить доказательство Теоремы 6.1.

Воспользуемся одной из возможных форм скобок Пуассона, приведенных в Приложении к предыдущей главе (и также к работе [37])

$$\{F, G\} = \frac{1}{2}\int \theta^{(J)}\mathrm{Tr}\left(f'(\hat{I}^{\langle J\rangle}g') - g'(\hat{I}^{\langle J\rangle}f')\right),$$

где дифференциальный оператор $\hat{I}$ не предполагается антисимметричным, чтобы было легче сравнить это доказательство с теми, которые приводились в предыдущей главе и в [37]. Напомним, что в менее сжатых обозначениях

$$\mathrm{Tr}\left(f'(\hat{I}g')\right) = \binom{J}{M}\binom{K}{L} D_L \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_{J+K-L-M} I^N_{AB} D_{N+M} \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}}.$$

Вычислим скобку

$$\{\{F,G\},H\} = \frac{1}{2}\int \theta^{(J)}\mathrm{Tr}\left(\{f,g\}'(\hat{I}^{\langle J\rangle}h') - h'(\hat{I}^{\langle J\rangle}\{f,g\}')\right),$$

где $\{f,g\}$ обозначает подинтегральное выражение $\{F,G\}$. Так как производная Фреше является дифференцированием, мы получаем

$$\{f,g\}' = \frac{1}{2}\theta^{(K)}\mathrm{Tr}\bigg(f''(\hat{I}^{\langle K\rangle}g',\cdot) + f'\hat{I}'^{\langle K\rangle}(\cdot)g' + g''(f'\hat{I}^{\langle K\rangle},\cdot) - (f\leftrightarrow g)\bigg)$$

и

$$\mathrm{Tr}\left(\{f,g\}'\hat{I}h'\right) = \frac{1}{2}\left(f''(\hat{I}g',\hat{I}h') + f'\hat{I}'(\hat{I}h')g' + g''(f'\hat{I},\hat{I}h') - (f\leftrightarrow g)\right).$$

Здесь f'' обозначает вторую производную Фреше, т.е. симметричный билинейный оператор, возникающий при вычислении второй вариации локального функционала F (в каноническом виде):

$$f''(\xi,\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial\phi_A^{(J)}\partial\phi_B^{(K)}} D_J\xi_A D_K\eta_B.$$

При подстановке во входы f'' операторов под знаком следа следует иметь в виду, что эти операторы действуют на все кроме своих собственных коэффициентов, например,

$$\mathrm{Tr}\left(f''(\hat{I}g',\hat{I}h')\right) = \binom{L}{P}\binom{L-P}{Q}\binom{M}{S}\binom{M-S}{T}\times$$

$$\times D_{L+M-P-Q-S-T}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi_A^{(J)}\partial\phi_B^{(K)}} D_{J+T}\left(D_P\hat{I}_{AC}\frac{\partial g}{\partial\phi_C^{(L)}}\right) D_{K+Q}\left(D_S\hat{I}_{BD}\frac{\partial h}{\partial\phi_D^{(M)}}\right)$$

и выражение остается симметричным когда входы меняются местами

$$\mathrm{Tr}\left(f''(\hat{I}g',\hat{I}h')\right) = \mathrm{Tr}\left(f''(\hat{I}h',\hat{I}g')\right).$$

Когда оператор $\hat{I}$ стоит справа от оператора производной Фреше f', как например, в выражении

$$\mathrm{Tr}\left(g''(\hat{I}h', f'\hat{I})\right),$$

он действует на все кроме f'. Наконец, для производной Фреше от оператора мы имеем

$$\hat{I}'(\hat{I}h') = \frac{\partial I^K_{AB}}{\partial \phi^{(J)}_C} D_J \left(I^L_{CD} D_L \frac{\partial h}{\partial \phi^{(M)}_D} D_M \right) D_K.$$

Проделав подобные вычисления получаем

$$\mathrm{Tr}\left(h'\hat{I}\{f,g\}'\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(f''(h'\hat{I},\hat{I}g') + f'\hat{I}'(h'\hat{I})g' + g''(f'\hat{I},h'\hat{I}) - (f\leftrightarrow g)\right),$$

и следовательно,

$$\{\{F,G\},H\} = \frac{1}{4}\int \theta^{(J+K)}\mathrm{Tr}\Bigg(f''(\hat{I}^{\langle J\rangle}g',\hat{I}^{\langle K\rangle}h') - f''(h'\hat{I}^{\langle J\rangle},\hat{I}^{\langle K\rangle}g') -$$

$$-f''(\hat{I}^{\langle J\rangle}h',g'\hat{I}^{\langle K\rangle}) + f''(g'\hat{I}^{\langle J\rangle},h'\hat{I}^{\langle K\rangle}) + f'\hat{I}'^{\langle J\rangle}(\hat{I}^{\langle K\rangle}h' - h'\hat{I}^{\langle K\rangle})g' - (f\leftrightarrow g)\Bigg).$$

Именно первые четыре слагаемых, без пятого, содержащего производную Фреше от оператора $\hat{I}$, появлялись в нашем доказательстве для неультралокального случая, данного в предыдущей главе и в [37] (где в $\hat{I}$ допускались только члены с нулевым значением квазиградуирующей функции). После циклической перестановки F, G, H все члены с симметричным оператором второй производной Фреше взаимно сокращаются и

$$\{\{F,G\},H\} + \text{c.p.} = \frac{1}{4}\int \theta^{(J+K)}\mathrm{Tr}\Bigg(f'\hat{I}'^{\langle J\rangle}(\hat{I}^{\langle K\rangle}h' - h'\hat{I}^{\langle K\rangle})g' -$$

$$-g'\hat{I}'^{\langle J\rangle}(\hat{I}^{\langle K\rangle}h' - h'\hat{I}^{\langle K\rangle})f' + c.p.\Bigg),$$

где циклические перестановки F, G и H заменены сокращением *c.p.*. Когда оператор $\hat{I}$ дан в явно антисимметричном виде, все эти четыре члена оказываются равными друг другу. Принимая во внимание Лемму Олвера (4.13) мы получаем

$$\{\{F,G\},H\} + c.p. = -\left[\hat{I},\hat{I}\right]_{SN}(\mathsf{d}F,\mathsf{d}G,\mathsf{d}H),$$

таким образом завершая доказательство.

4.8 Примеры: неультралокальные операторы

Вторая структура уравнения Кортевега-де Фриза может служить контрпримером к гипотезе [40], что все операторы, которые являются гамильтоновыми (по модулю дивергенций) по отношению к стандартным скобкам Пуассона, должны также быть гамильтоновыми (точно) и по отношению к новым скобкам.

Пример 8.1

Начнем со стандартного выражения (Пример 7.6 из книги [79])

$$\{u(x), u(y)\} = \left(\frac{d^3}{dx^3} + \frac{2}{3}u\frac{d}{dx} + \frac{1}{3}\frac{du}{dx}\right)\delta(x, y),$$

и построим сопряженный оператор к оператору

$$\hat{K} = \theta\left(D_3 + \frac{2}{3}uD + \frac{1}{3}Du\right),$$

этот сопряженный оператор имеет вид

$$\hat{K}^* = -\theta\left(D_3 + \frac{2}{3}uD + \frac{1}{3}Du\right) - D\theta\left(3D_2 + \frac{2}{3}u\right) - 3D_2\theta D - D_3\theta.$$

Тогда соответствующий антисимметричный оператор

$$\hat{I} = \frac{1}{2}(\hat{K} - \hat{K}^*) =$$

$$= \theta\left(D_3 + \frac{2}{3}uD + \frac{1}{3}Du\right) + D\theta\left(\frac{3}{2}D_2 + \frac{1}{3}u\right) + \frac{3}{2}D_2\theta D + \frac{1}{2}D_3\theta$$

может быть использован для построения бивектора

$$\Psi = \frac{1}{2}\int \xi \wedge \hat{I}\xi,$$

где $\delta/\delta u = \xi$. Бивектор имеет вид

$$\Psi = \frac{1}{2}\int\left(\theta\xi \wedge D_3\xi + \frac{3}{2}D\theta\xi \wedge D_2\xi + (\frac{3}{2}D_2\theta + \frac{2}{3}\theta u)\xi \wedge D\xi\right).$$

Затем, оценивая скобку Схоутена-Нейенхейса для бивектора с помощью Утверждения 5.3

$$[\Psi, \Psi]_{SN} = \int\left(\frac{2}{3}\theta\xi \wedge D_3\xi \wedge D\xi + D\theta\xi \wedge D_2\xi \wedge D\xi\right)$$

и интегрируя первый член по частям, получаем

$$\big[\Psi, \Psi\big]_{SN} = \frac{1}{3}\int \theta D\big(\xi \wedge D\xi \wedge D_2\xi\big).$$

Следовательно, вместо тождества Якоби мы имеем

$$\{\{F, G\}, H\} + c.p. = -\frac{1}{3}\int\limits_{\Omega} D_{i+j+k+1}\left(E^i(f)DE^j(g)D_2E^k(h) + c.p.\right).$$

Итак, вторая структура уравнения KdV может быть гамильтоновой только при специальных граничных условиях.

Пример 8.2

Рассмотрим теперь другой пример, также неультралокальный, но оператор здесь остается гамильтоновым в новых скобках, независимо от граничных условий. Уравнения Эйлера для потока идеальной жидкости можно записать в следующем виде (Пример 7.10 из книги [79])

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathcal{D}\frac{\delta H}{\delta \omega},$$

где

$$H = \int \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2, \qquad \omega = \nabla \times \mathbf{u}.$$

Ограничим наше рассмотрение 2-мерным случаем, когда ω имеет только одну компоненту ω и

$$\mathcal{D} = \omega_x D_y - \omega_y D_x,$$

где $\omega_i = D_i\omega$, $i = (x, y)$. Мы можем построить антисимметричный оператор

$$\hat{I} = \frac{1}{2}\Big(\theta\mathcal{D} - (\theta\mathcal{D})^*\Big) = \theta(\omega_x D_y - \omega_y D_x) + \frac{1}{2}(D_y\theta\omega_x - D_x\theta\omega_y),$$

и затем бивектор

$$\Psi = \frac{1}{2}\int \xi \wedge \hat{I}\xi = \frac{1}{2}\int \theta(\omega_x\xi \wedge \xi_y - \omega_y\xi \wedge \xi_x),$$

где $\xi = \delta/\delta\omega$. Утверждение 5.3 дает нам

$$\big[\Psi, \Psi\big]_{SN} = \int\Bigg(\theta\left(\omega_x(\xi \wedge \xi_{xy} \wedge \xi_y - \xi \wedge \xi_{yy} \wedge \xi_x)+\right.$$

$$\left. + \,\omega_y(\xi \wedge \xi_{xy} \wedge \xi_x - \xi \wedge \xi_{xx} \wedge \xi_y)\right) + (D_y\theta\omega_x - D_x\theta\omega_y)\,\xi \wedge \xi_x \wedge \xi_y\Bigg)$$

и после интегрирования по частям выражение сводится к нулю.

4.9 Выводы

Изложение в данной главе было основано на работе [38], предварительные варианты докладывались на ряде конференций [45, 46]. Основная идея состоит в том, что отбрасывание дивергенций вовсе не обязательно для формального вариационного исчисления и они могут быть полностью сохранены (без какой бы то ни было спецификации граничных условий). Тогда формула для скобки Пуассона, введенная в главе 3 более или менее эвристически, получается как естественный результат. Кроме того, значительно упрощается процедура проверки тождества Якоби для различных скобок. Дальнейшее развитие должно заключаться в переходе на язык вариационного бикомплекса [90]. Также важным представляется исследовать, могут ли физически важные алгебры быть реализованы с помощью новых скобок Пуассона как алгебры локальных функционалов. Один такой пример [43] будет рассмотрен в главе 6. Построенный формализм будет также применяться в главе 8 к задаче со свободной границей [39].

Глава 5

Альтернативное предложение для граничного вклада в скобку Пуассона

Показано, что скобка Пуассона с граничными членами, недавно предложенная Берингом может быть получена из скобки Пуассона, предложенной автором, если опустить в последней все слагаемые не содержащие производных Эйлера-Лагранжа ("принцип аннигиляции"). Это соответствует другому определению формального умножения обобщенных функций (или, иными словами, другому определению спаривания между 1-формами и 1-векторами в формальном вариационном исчислении). Мы расширяем эту формулу (первоначально предложенную Берингом только для ультралокального случая с постоянными коэффициентами) на общие неультралокальные скобки с коэффициентами, зависящими от полей и их пространственных производных. Отсутствие инвариантности по отношению к заменам зависимых переменных (переопределениям полей) представляется недостатком подхода Беринга.

5.1 Постановка задачи

Недавно Берингом [55] была предложена формула для теоретико-полевой скобки Пуассона с граничными членами, отличающаяся от предложенной автором в работе [37] и рассмотренной выше в главах 3, 4. В общем, мотивация введения новых скобок возникает из того факта, что хорошо известная стандартная теоретико-полевая скобка Пуассона неприменима ко множеству нетривиальных граничных задач. В частности, она не удовлетворяет тождеству Якоби. Члены, нарушающие тождество Якоби, конечно, имеют чисто граничную природу (являются дивергенциями) и поэтому могут быть уничтожены какими-нибудь граничными условиями, которые мы здесь называем тривиальными. Проблема обсуждаемая здесь, как и в публикациях [55, 37, 41, 38], состоит в нахождении формулы для скобки Пуассона, которая точно удовлетворяла бы тождеству Якоби еще до наложения каких бы то ни было граничных условий.

Насколько нам известно, первый раз внимание на эту проблему было обращено и была сделана успешная попытка ее решения в работе Льюис, Марсдена, Монтгомери и Ратью (LMMR) по динамике идеальной жидкости со свободной границей [69]. Обе формулы, предложенные в работах [55] и [37], в действительности являются только двумя различными экстраполяциями одной формулы, найденной в статье [69]. Поэтому будет лучше сначала напомнить подход пионеров.

В противоположность популярной точке зрения [1], что в гамильтоновом подходе все функционалы должны быть "дифференцируемыми" вариации функционалов, рассматриваемых LMMR, не свободны от граничных членов

$$D_q F(q,p)\cdot\delta q = \int\limits_{\Omega} \frac{\delta^\wedge F}{\delta q}\cdot\delta q\; dV + \oint\limits_{\partial\Omega} \frac{\delta^\vee F}{\delta q}\cdot\delta q|_{\partial\Omega} dS, \tag{5.1}$$

$$D_q F(q,p)\cdot\delta p=\int\limits_{\Omega}\frac{\delta^{\wedge}F}{\delta p}\cdot\delta p\; dV+\oint\limits_{\partial\Omega}\frac{\delta^{\vee}F}{\delta p}\cdot\delta p|_{\partial\Omega}dS. \tag{5.2}$$

Идея состоит в том, чтобы обобщить определение вариационной производной, включив в нее граничный вклад,

$$\frac{\delta F}{\delta q}=\frac{\delta^{\wedge}F}{\delta q}+\delta(S)\cdot\frac{\delta^{\vee}F}{\delta q}. \tag{5.3}$$

$$\frac{\delta F}{\delta p}=\frac{\delta^{\wedge}F}{\delta p}+\delta(S)\cdot\frac{\delta^{\vee}F}{\delta p}. \tag{5.4}$$

Далее, LMMR в действительности предложили использовать для новой скобки Пуассона старую формулу

$$\{F,G\}=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\delta F}{\delta q(x)}\frac{\delta G}{\delta p(x)}-\frac{\delta G}{\delta q(x)}\frac{\delta F}{\delta p(x)}\right]dV,$$

но с новыми вариационными производными (5.3), (5.4)

$$\begin{aligned}\{F,G\}&=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\delta^{\wedge}F}{\delta q(x)}\frac{\delta^{\wedge}G}{\delta p(x)}-\frac{\delta^{\wedge}G}{\delta q(x)}\frac{\delta^{\wedge}F}{\delta p(x)}\right]dV\\&+\oint\limits_{\partial\Omega}\left[\left.\frac{\delta^{\wedge}F}{\delta q(x)}\right|_{\partial\Omega}\frac{\delta^{\vee}G}{\delta p(x)}+\frac{\delta^{\vee}F}{\delta q(x)}\left.\frac{\delta^{\wedge}G}{\delta p(x)}\right|_{\partial\Omega}\right]dS\\&-\oint\limits_{\partial\Omega}\left[\left.\frac{\delta^{\wedge}G}{\delta q(x)}\right|_{\partial\Omega}\frac{\delta^{\vee}F}{\delta p(x)}+\frac{\delta^{\vee}G}{\delta q(x)}\left.\frac{\delta^{\wedge}F}{\delta p(x)}\right|_{\partial\Omega}\right]dS.\end{aligned}$$

Сразу видно, что наиболее опасное слагаемое с произведением δ-функций здесь отсутствует. В самом деле, чтобы избавиться от этого слагаемого, LMMR приняли специальное граничное условие

$$\frac{\delta^{\vee}F}{\delta q}\frac{\delta^{\vee}G}{\delta p}-\frac{\delta^{\vee}G}{\delta q}\frac{\delta^{\vee}F}{\delta p}=0, \tag{5.5}$$

обеспечивающее нулевое значение коэффициента, стоящего перед этим опасным произведением.[1] К сожалению, нет полной ясности, сохраняет ли скобка Пуассона $\{F,G\}$ это свойство в общем случае, даже если исходные функционалы F и G ему и удовлетворяют (5.5).

[1] Интересно отметить, что в работе по вычислению центральных зарядов, возникающих в алгебрах симметрии границы в теории поля Черна-Саймонса [119] подобное слагаемое сокращается автоматически, благодаря самой структуре скобки.

Здесь мы видим точку раздвоения для последующих обобщений результата LMMR. Идея работы Беринга [55] заключается в том, что эти опасные члены с произведениями δ-функций должны быть отброшены независимо от каких-либо граничных условий ("принцип аннигиляции"). Другая идея, проводимая здесь и в работе автора [37], состоит в том чтобы найти разумное выражение для этих членов.

Для более детального объяснения необходимо сначала ввести соответствующий формализм для работы с вариациями функционалов общего вида, зависящих от произвольного (но конечного!) числа пространственных производных. В работе [37] адекватная математическая техника была найдена в виде так называемых высших эйлеровых операторов [79, 89, 91]. Здесь мы используем обозначения работ [37, 41, 38]. Также применяется правило Эйнштейна, т.е. мы опускаем знак суммы по повторяющимся индексам и мульти-индексам.

Первая вариация общего локального функционала ($\max|J| < \infty$)

$$F = \int\limits_{\Omega} f(\phi_A(x), \phi_A^{(J)}(x)) d^n x$$

может быть представлена в виде

$$\delta F = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_J \delta\phi_A d^n x \equiv \int\limits_{\Omega} f'_A(\delta\phi_A) d^n x \equiv \int\limits_{\Omega} D_J \left(E_A^J(f) \delta\phi_A \right) d^n x, \qquad (5.6)$$

где, вообще говоря, J обозначает мульти-индекс $J = (j_1, ..., j_n)$ и

$$\phi_A^{(J)} = \frac{\partial^{|J|}\phi_A}{\partial^{j_1} x^1 \dots \partial^{j_n} x^n} \equiv D_J \phi_A, \qquad |J| = j_1 + ... + j_n.$$

а в простейшем случае одномерного пространства — просто порядок пространственной производной. Мы вводим также производную Фреше, которая является дифференциальным оператором

$$f'_A = \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_J. \qquad (5.7)$$

Высшие эйлеровы операторы E_A^J однозначно определяются формулой

$$E_A^J(f) = \binom{K}{J}(-D)_{K-J}\frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(K)}}. \tag{5.8}$$

Обе работы [55] и [37] используют для построения новых скобок Пуассона полную вариацию (5.6), но делают это по-разному. Здесь и в работе [37] предлагается начать с формулы

$$\{F,G\} = \delta_G F \equiv \int\limits_\Omega D_J\big(E_A^J(f)\delta_G\phi_A\big)d^nx \equiv \int\limits_\Omega f'_A(\delta_G\phi_A)d^nx,$$

и искать для $\delta_G\phi_A$ такую форму, которая удовлетворила бы уравнению

$$\delta_G F = -\delta_F G.$$

После некоторых преобразований в работе [37] была получена формула

$$\{F,G\} = \int\limits_\Omega D_{J+K}\left(E_A^J(f)\hat{I}_{AB}E_B^K(g)\right)d^nx \equiv \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_A\hat{I}_{AB}g'_B\right)d^nx. \tag{5.9}$$

Для облегчения задачи сравнения со случаем Беринга [55] сначала рассмотрим только так называемые ультралокальные скобки, тогда

$$\{\phi_A(x),\phi_B(y)\} = I_{AB}\delta(x,y), \quad I_{AB} = -I_{BA}.$$

В отличие от вышеизложенного предложение Беринга [55] состоит в том, чтобы сразу начать с антисимметричного выражения

$$\{F,G\} = \Delta_G F - \Delta_F G - \{F,G\}_{\text{old}},$$

где

$$\{F,G\}_{\text{old}} = \int\limits_\Omega E_A^0(f)I_{AB}E_B^0(g)d^nx,$$

$$\Delta_G F = \int\limits_\Omega D_J(E_A^J(f)\Delta_G\phi_A)d^nx \equiv \int\limits_\Omega f'_A(\Delta_G\phi_A)d^nx.$$

Тогда можно использовать стандартное выражение для вариации поля

$$\Delta_G\phi_A = I_{AB}E_B^0(g)$$

и результирующая формула будет иметь вид

$$\{F, G\} = \int\limits_{\Omega} D_J \Big(E_A^J(f) I_{AB} E_B^0(g) - E_A^J(g) I_{AB} E_B^0(f) \Big) d^n x - \{F, G\}_{\text{old}}. \tag{5.10}$$

Таким образом, легко видеть, что последняя формула содержит только одно суммирование по мульти-индексу J, тогда как формула (5.9) содержит двойную сумму по J и K. Если опустить в этой двойной сумме все члены, не содержащие хотя бы одного оператора E^0, мы немедленно получим (5.10).

Возможно стоит добавить, что в ультралокальном случае для локальных функционалов, зависящих от пространственных производных полей порядка не выше N, скобка Беринга будет содержать пространственные производные порядка $3N$, тогда как скобка, предложенная в работе [37] и рассматриваемая в диссертации, содержит их до порядка $2N$, так же как и стандартная скобка.

Затруднение, вызываемое формулой Беринга, заключается по-видимому в отсутствии инвариантности по отношению к заменам зависимых переменных (дифференциальным подстановкам полей).

5.2 Дифференциальные подстановки

Рассмотрим свойства инвариантности теоретико-полевой скобки Пуассона относительно преобразований полей вида

$$\phi_A \to \bar{\phi}_{\bar{B}} = \xi_{\bar{B}}(\phi_A, D_J\phi_A), \tag{5.11}$$

(дифференциальные подстановки).

Если сначала у нас имелись локальные скобки Пуассона для полей $\phi_A(x)$, т.е.

$$\{\phi_A(x), \phi_B(y)\} = \hat{I}_{AB}(x)\delta(x, y), \tag{5.12}$$

где $\hat{I}_{AB} = I^K_{AB} D_K$ — дифференциальный оператор конечного порядка с зависящими от полей коэффициентами

$$I^K_{AB} = I^K_{AB}(\phi_C, D_J \phi_C), \tag{5.13}$$

то в результате дифференциальной подстановки (5.11) мы получим

$$\{\bar{\phi}_{\bar{C}}(x), \bar{\phi}_{\bar{D}}(y)\} = (\xi_{\bar{C}})'_A(x)\,(\xi_{\bar{D}})'_B(y)\hat{I}_{AB}(x)\delta(x,y).$$

Чтобы преобразовать это выражение к виду, подобному (5.12), нам требуется определить “сопряженный” оператор

$$\hat{J}_{AB}(x)\delta(x,y) = \hat{J}^{\text{“adjoint”}}$$

$_{AB}(y)\delta(x,y)$,тогда мы будем иметь

$$(\xi_{\bar{C}})'_A(x)\,(\xi_{\bar{D}})'_B(y)\hat{I}_{AB}(x)\delta(x,y) = (\xi_{\bar{C}})'_A(x)\hat{I}_{AB}(x)\left[(\xi_{\bar{D}})'_B\right]^{\text{“adjoint”}}$$

(x)$\delta(x,y)$,и

$$\hat{I}_{\bar{C}\bar{D}}(x) = (\xi_{\bar{C}})'_A(x)\hat{I}_{AB}(x)\left[(\xi_{\bar{D}})'_B\right]^{\text{“adjoint”}}$$

(x).

Предлагаемый здесь подход отличается от стандартного трактовкой граничных (или дивергенциальных) членов. Все они должны быть сохранены в процессе вычислений. Это означает, что мы требуем выполнения точного равенства

$$\int\limits_{\Omega} \xi_A \hat{J}_{AB} \eta_B d^n x = \int\limits_{\Omega} \eta_A \hat{J}^{\dagger}{}_{AB} \xi_B d^n x,$$

без отбрасывания каких-либо граничных членов (дивергенций). Напротив, при стандартном подходе требуется лишь равенство с точностью до граничных членов

$$\xi_A \hat{J}_{AB} \eta_B \approx \eta_A \hat{J}^{*}{}_{AB} \xi_B \quad \text{(по модулю дивергенций)},$$

или, в других обозначениях,

$$\langle \xi | \hat{J} | \eta \rangle = \langle \eta | \hat{J}^* | \xi \rangle.$$

Из последнего определения мы получаем обычное соотношение

$$\hat{J}^*_{AB} = (-D)_K \circ J^K_{BA}. \tag{5.14}$$

Но написанное выше приводит к другому результату:

$$\hat{J}^\dagger{}_{AB} = (-D)_K \circ \theta_\Omega J^K_{BA}. \tag{5.15}$$

Здесь мы используем характеристическую функцию области интегрирования (физической области) $\theta_\Omega(x)$ для записи дивергенций. Имеется очевидное соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (-D)_K \theta_\Omega f(x) d^n x = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta_\Omega D_K f(x) d^n x \equiv \int\limits_{\Omega} D_K f(x) d^n x.$$

Итак при помощи θ_Ω можно записать все пространственные интегралы не как интегралы по физической области, а как интегралы по всему бесконечному координатному пространству $\mathbb{R}^n$.

5.3 Стандартная скобка

Рассмотрим сначала преобразование стандартной скобки Пуассона

$$\{F, G\}_{\text{old}} = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(E^0_A(f) \hat{I}_{AB} E^0_B(g) - E^0_A(g) \hat{I}_{AB} E^0_B(f) \right) d^n x, \tag{5.16}$$

при заменах полей типа (5.11). Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} E^0_A(f) &= \left[(\xi_{\bar{C}})'_A \right]^* E^0_{\bar{C}}(f) \equiv \\ &\equiv \left(E^0_A(\xi_{\bar{C}}) - E^1_A(\xi_{\bar{C}}) D + E^2_A(\xi_{\bar{C}}) D_2 - \ldots \right) E^0_{\bar{C}}(f) \equiv \\ &\equiv (-1)^{|K|} E^K_A(\xi_{\bar{C}}) D_K E^0_{\bar{C}}(f), \end{aligned} \tag{5.17}$$

выведенной в Приложении B к данной главе. Тогда в подинтегральном выражении (5.16) получим следующие выражения

$$\begin{aligned} E^0_A(f) \hat{I}_{AB} E^0_B(g) &= \left[(\xi_{\bar{C}})'_A \right]^* E^0_{\bar{C}}(f) \hat{I}_{AB} \left[(\xi_{\bar{D}})'_B \right]^* E^0_{\bar{D}}(g) = \\ &= E^0_{\bar{C}}(f) \left[\left[(\xi_{\bar{C}})'_A \right]^* \right]^\dagger \hat{I}_{AB} \left[(\xi_{\bar{D}})'_B \right]^* E^0_{\bar{D}}(g). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Но как обсуждалось выше, два определения “сопряженного” дифференциального оператора не эквивалентны

$$\left[\left[(\xi_{\bar{C}})'_A\right]^*\right]^\dagger = (\xi_{\bar{C}})'_A \circ \theta_\Omega \neq (\xi_{\bar{C}})'_A\,,$$

и таким образом,

$$\left[\left[(\xi_{\bar{C}})'_A\right]^*\right]^\dagger \hat{I}_{AB}\left[(\xi_{\bar{D}})'_B\right]^* \neq \hat{I}_{\bar{C}\bar{D}}.$$

Разумеется, отличия выражаются дивергенциями. Таким образом мы видим, что стандартная теоретико-полевая скобка Пуассона инвариантна относительно замен полевых переменных вида (5.11) (т.е. дифференциальных подстановок) только с точностью до граничных членов. Конечно этого достаточно, ибо все остальные требования (тождество Якоби, антисимметрия, правило Лейбница) также выполняются лишь с точностью до граничных членов и эта скобка не претендует на адекватность в нетривиальных граничных задачах.

5.4 Общий подход к скобкам Беринга и автора

Имея дело с локальными функционалами и локальными скобками Пуассона в теории поля мы всегда приходим для скобки двух функционалов к общему выражению вида

$$\{F, G\} = \int\limits_\Omega d^n x \int\limits_\Omega d^n y f'_A(x) g'_B(y) \{\phi_A(x), \phi_B(y)\},$$

где производные Фреше $f'_A(x)$, $g'_B(y)$ являются дифференциальными операторами (5.7). Если представить каждый из интегралов не как интеграл по конечной области, а как интеграл по всему бесконечному $\mathbb{R}^n$ с характеристической функцией области Ω

$$\{F, G\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta_\Omega(x) d^n x \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta_\Omega(y) d^n y f'_A(x) g'_B(y) \{\phi_A(x), \phi_B(y)\},$$

то легко выполнить формальное интегрирование по частям и получить

$$\{F, G\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n y \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} \frac{\delta G}{\delta \phi_B(y)} \{\phi_A(x), \phi_B(y)\},$$

где

$$\frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} = \left(f'_A(x)\right)^\dagger \theta_\Omega = (-D)_K \left(\theta_\Omega \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(K)}}\right) \equiv E_A^J(f)(-D)_J\theta_\Omega,$$

аналогичная формула будет справедлива для вариационной производной от G. Для простоты ограничим рассмотрение ультралокальным случаем, тогда

$$\{F,G\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n y \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} I_{AB} \frac{\delta G}{\delta \phi_B(y)} \delta(x,y),$$

и в обоих подходах мы считаем, что

$$\{F,G\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} d^n x \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} I_{AB} \frac{\delta G}{\delta \phi_B(x)}.$$

Но конечно, это выражение содержит произведения обобщенных функций вида $D_J\theta_\Omega \times D_K\theta_\Omega$, и здесь подходы различаются:

- в подходе Беринга [55]:

$$D_J\theta_\Omega \times D_K\theta_\Omega = \delta_{J0} D_K\theta_\Omega + \delta_{K0} D_J\theta_\Omega - \delta_{J0}\delta_{K0}\theta_\Omega,$$

- в подходе автора [37]:

$$D_J\theta_\Omega \times D_K\theta_\Omega = D_{J+K}\theta_\Omega.$$

Очевидно, что можно полностью избежать этих обобщенных функций, так как они служат только для условной записи дивергенций. Это продемонстрировано в публикациях [38]. Тогда ключевое преобразование от двойного интегрирования по всему пространству к однократному интегрированию с помощью δ-функции можно понимать просто как спаривание 1-форм и 1-векторов в формальном вариационном исчислении [79, 84, 101]. То спаривание, которое вводилось в работах [37, 38], согласовано с квазиградуировкой относящейся к дивергенциям.

Теперь, если мы воспользуемся приведенной выше формулой для спаривания Беринга, можно вывести скобки Пуассона в наиболее общем (не рассмотренном в работе [55]) неультралокальном случае, где $\hat{I}_{AB}$ —

дифференциальный оператор конечного порядка с коэффициентами, зависящими от полей. В действительности, это будет та же самая формула, только с добавлением шляпок[2]

$$\begin{aligned}\{f,g\} &= f'_A\left(\hat{I}_{AB}E^0_B(g)\right) - g'_A\left(\hat{I}_{AB}E^0_B(f)\right) - \\ &- \frac{1}{2}\left(E^0_A(f)\hat{I}_{AB}E^0_B(g) - E^0_A(g)\hat{I}_{AB}E^0_B(f)\right).\end{aligned}$$

Больше того, можно продемонстрировать, что для этой скобки выполняется тождество Якоби для любого локального оператора $\hat{I}_{AB}$ с постоянными коэффициентами. В случае ультралокальных скобок Пуассона с зависящими от полей коэффициентами (но исключая зависимость от производных полей) в Приложении Б мы выводим условие выполнения тождества Якоби для скобки, построенной в согласии с предложением Беринга

$$I_{AB,C}I_{CD} + I_{DA,C}I_{CB} + I_{BD,C}I_{CA} = 0.$$

В Приложении Б мы также приводим условие и для самого общего случая неультралокальных скобок с коэффициентами, зависящими от пространственных производных полей.

5.5 Дифференциальные подстановки и скобка Беринга

Теперь рассмотрим полученную в предыдущем параграфе формулу в качестве дальнейшего развития исходного предложения Беринга [55]

$$\{F,G\}_B = \int\limits_\Omega f'_A\hat{I}_{AB}E^0_B(g)d^nx - \int\limits_\Omega g'_A\hat{I}_{AB}E^0_B(f)d^nx - \{F,G\}_{\text{old}}, \tag{5.19}$$

где $\{F,G\}_{\text{old}}$ — стандартная скоба Пуассона, рассмотренная выше.

[2] Можно получить и более общую формулу, если не предполагать, что оператор $\hat{I}_{AB}$ должен быть антисимметричным по отношению к стандартному определению сопряженного оператора. Но эта формула не удовлетворяет тождеству Якоби даже для неультралокальных скобок с постоянными коэффициентами.

При дифференциальных подстановках (5.11) производная Фреше преобразуется следующим образом (см. Приложение B)

$$f'_A = f'_{\bar{C}}\,(\xi_{\bar{C}})'_A\,,$$

таким образом, получаем

$$f'_A \hat{I}_{AB} E^0_B = f'_{\bar{C}}\,(\xi_{\bar{C}})'_A\,\hat{I}_{AB}\left[(\xi_{\bar{D}})'_B\right]^*E^0_{\bar{D}}(g).$$

Это означает, что первое и второе слагаемые в скобке будут инвариантны, если предположить

$$\hat{I}_{\bar{C}\bar{D}} = (\xi_{\bar{C}})'_A\,\hat{I}_{AB}\left[(\xi_{\bar{D}})'_B\right]^*,$$

т.е. здесь должно использоваться старое определение сопряженного оператора (5.14) в согласии с трактовкой, даваемой Берингом (см. параграф (5.5) работы [55]).

К сожалению, эта скобка содержит также слагаемое вида $\{F, G\}_{\mathrm{old}}$ (стандартную скобку Пуассона) с другими трансформационными свойствами. Как было показано в параграфе 3, это слагаемое инвариантно относительно переопределений полей только с точностью до дивергенций. Таким образом, скобка Беринга в целом не является инвариантной.

5.6 Дифференциальные подстановки и скобка автора

Покажем, что формула

$$\{F, G\} = \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}_{AB} g'_B\right) d^n x$$

в точности инвариантна относительно переопределений полей вида (5.11). Напоминаем, что след используется здесь для обозначения правила композиции дифференциальных операторов f'_A, $\hat{I}_{AB}$ and g'_B:

$$\begin{aligned} f'_A &= \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_J, \\ \hat{I}_{AB} &= I_{AB}^K D_K, \\ g'_B &= \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(J)}} D_J. \end{aligned}$$

Оператор f'_A действует на все, стоящее справа от него, то же самое делает и оператор $\hat{I}_{AB}$, а оператор g'_B действует на все, стоящее слева от него, т.е. действует на все, кроме своих собственных коэффициентов,

$$\mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}_{AB} g'_B\right) \equiv \binom{J}{L}\binom{K}{M} D_M \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_{J+K-L-M} \hat{I}_{AB} D_L \frac{\partial g}{\partial \phi_B^{(K)}}.$$

После переопределения полей мы получаем

$$\{F, G\} = \int_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_{\bar{C}} (\xi_{\bar{C}})'_A \hat{I}_{AB} g'_{\bar{D}} (\xi_{\bar{D}})'_B\right) d^n x.$$

Таким образом, если использовать здесь сопряженный оператор к $(\xi_{\bar{D}})'_B$, определенный формулой (5.15), то он будет действовать только на $g'_{\bar{D}}$

$$\{F, G\} = \int_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_{\bar{C}} (\xi_{\bar{C}})'_A \hat{I}_{AB} \left[(\xi_{\bar{D}})'_B\right]^\dagger g'_{\bar{D}}\right) d^n x.$$

Но согласно нашим определениям, приведенным в параграфе 2,

$$\hat{I}_{\bar{C}\bar{D}} = (\xi_{\bar{C}})'_A \hat{I}_{AB} \left[(\xi_{\bar{D}})'_B\right]^\dagger.$$

В результате видим, что это определение полевой скобки Пуассона с граничными членами в точности инвариантно относительно дифференциальных подстановок.

В главе 6 и в публикации [43] эта инвариантность демонстрируется на конкретном примере — для преобразования гравитационных переменных Аштекара [107, 108, 109].

5.7 Выводы

Ряд интересных работ по модификации стандартной формулы скобок Пуассона с целью сделать ее пригодной для нетривиальных граничных задач и точно удовлетворить тождеству Якоби был сделан Берингом [55, 74, 75, 76]. Мы рассмотрели здесь предложение Беринга относительно граничных членов в теоретико-полевой скобке Пуассона, сделанное в работе [55]. К сожалению, Беринг до сих пор не использовал предложенную им формулу в конкретных физических задачах, ограничившись формальными построениями. В то же время ему не удалось распространить свои результаты на неультралокальные скобки Пуассона, встречающиеся, например, в гидродинамике (см. главу 8). В данной главе мы обобщили построение Беринга на самые общие локальные скобки Пуассона и нашли условия, необходимые для выполнения тождества Якоби. В нашей трактовке, детально представленной в работах [37, 38] и в главах 3,4, в конструкции скобки Пуассона имеется три различных ингредиента, которые требуют пересмотра: это дифференциал локального функционала, пуассонов бивектор и операция спаривания. Беринг использует то же самое определение дифференциала, но изменяет спаривание и бивектор. Попытка изменить одно только спаривание ведет к затруднениям с тождеством Якоби в неультралокальном случае. Выше было показано, что естественное, с точки зрения автора диссертации, обобщение оказывается неинвариантным при общих заменах полевых переменных. Работа Беринга [55] содержит множество новых идей которые заслуживают более подробного обсуждения. Здесь мы остановились только на недостатке, который по всей видимости в ней содержится. Вероятно, дальнейшие исследования покажут, можно ли преодолеть этот недостаток оставаясь в рамках подхода Беринга. Но так или иначе, эти трудности не возникают, если работать с формулой, предложенной в главе 3.

Приложение A. Некоторые полезные соотношения

Предположим, что $\hat{I}_{AB} = I^M_{AB} D_M$, где $I^M_{AB} = I^M_{AB}(\phi^{(J)})$, и

$$\hat{I}^*_{AB} = (-D)_M \circ I^M_{BA}.$$

Тогда с помощью техники высших эйлеровых операторов [79, 91], собранной в Леммах 2.5 – 2.12 главы 3 и работы [37], можно доказать следующие соотношения:

$$\left(E^0_B(g)\right)'_C (\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) = (-D)_L \left[\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^{(L)}_B \partial\phi^{(J)}_C} D_J(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) \right],$$

$$\begin{aligned} E^0_B\left(g'_C(\hat{I}_{CD}E^0_D(h))\right) &= (-D)_L \left[\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^{(L)}_B \partial\phi^{(J)}_C} D_J(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) + \right. \\ &+ \frac{\partial^2 h}{\partial\phi^{(L)}_B \partial\phi^{(J)}_C} D_J(\hat{I}^*_{CD} E^0_D(g)) + \\ &+ \left. E^0_C(g) \frac{\partial I^M_{CD}}{\partial\phi^{(L)}_B} D_M E^0_D(h) \right], \\ E^0_B\left(E^0_C(g)\hat{I}_{CD}E^0_D(h)\right) &= (-D)_L \left[\frac{\partial^2 g}{\partial\phi^{(L)}_B \partial\phi^{(J)}_C} D_J(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) + \right. \\ &+ \frac{\partial^2 h}{\partial\phi^{(L)}_B \partial\phi^{(J)}_C} D_J(\hat{I}^*_{CD} E^0_D(g)) + \\ &+ \left. E^0_C(g) \frac{\partial I^M_{CD}}{\partial\phi^{(L)}_B} D_M E^0_D(h) \right], \end{aligned}$$

Пусть также $\hat{I}^*_{AB} = -\hat{I}_{AB}$, тогда из написанного выше следует

$$\begin{aligned} E^0_B\left(g'_C(\hat{I}_{CD}E^0_D(h))\right) = -E^0_B\left(h'_C(\hat{I}_{CD}E^0_D(g))\right) = \\ = E^0_B\left(E^0_C(g)\hat{I}_{CD}E^0_D(h)\right) = (-D)_L \left[E^0_C(g) \frac{\partial I^M_{CD}}{\partial\phi^{(L)}_B} D_M E^0_D(h) \right] + \\ + \left(E^0_B(g)\right)'_C (I_{CD}E^0_D(h)) - \left(E^0_B(h)\right)'_C (I_{CD}E^0_D(g)). \end{aligned}$$

Мы воспользуемся этими соотношениями при проверке тождества Якоби в Приложении B.

Проиллюстрируем наши результаты на не самом общем случае ультралокальных скобок Пуассона

$$\hat{I}_{AB} = I_{AB} = -I_{BA},$$

и предположим для простоты, что функции I_{AB} зависят только от полей, но не зависят от их производных

$$I_{AB} = I_{AB}(\phi_C).$$

Тогда

$$\frac{\partial I^M_{CD}}{\partial \phi^{(L)}_B} = \delta_{M0}\delta_{L0} I_{CD,B},$$

и таким образом,

$$(-D)_L \left[E^0_C(g) \frac{\partial I^M_{CD}}{\partial \phi^{(L)}_B} D_M E^0_D(g) \right] = I_{CD,B} E^0_C(g) E^0_D(h).$$

Приложение Б. Тождество Якоби

Используя формулу Беринга для скобки Пуассона мы получаем

$$
\begin{aligned}
\{F, G\} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \{f, g\} d^n x, \\
\{f, g\} &= f'_A(\hat{I}_{AB} E^0_B(g)) - g'_A(\hat{I}_{AB} E^0_B(f)) - \\
&- \frac{1}{2} E^0_A(f) \hat{I}_{AB} E^0_B(g) + \frac{1}{2} E^0_A(g) \hat{I}_{AB} E^0_B(f), \\
\{\{f, g\}, h\} &= \{f, g\}'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) - h'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(\{f, g\})) - \\
&- \frac{1}{2} E^0_C(\{f, g\}) \hat{I}_{CD} E^0_D(h) + \frac{1}{2} E^0_C(h) \hat{I}_{CD} E^0_D(\{f, g\}) = \\
&= f''_{AC}\left(\hat{I}_{AB} E^0_B(g), \hat{I}_{CD} E^0_D(h)\right) - g''_{AC}\left(\hat{I}_{AB} E^0_B(f), \hat{I}_{CD} E^0_D(h)\right) + \\
&+ f'_A\left((\hat{I}_{AB})'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) E^0_B(g) + \hat{I}_{AB}(E^0_B(g))'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h))\right) - \\
&- g'_A\left((\hat{I}_{AB})'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) E^0_B(f) + \hat{I}_{AB}(E^0_B(f))'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h))\right) - \\
&- \frac{1}{2}(E^0_A(f))'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) \hat{I}_{AB} E^0_B(g) - \\
&- \frac{1}{2} E^0_A(f)(\hat{I}_{AB})'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) E^0_B(g) - \\
&- \frac{1}{2} E^0_A(f) \hat{I}_{AB}(E^0_B(g))'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) + \\
&+ \frac{1}{2}(E^0_A(g))'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) \hat{I}_{AB} E^0_B(f) + \\
&+ \frac{1}{2} E^0_A(g)(\hat{I}_{AB})'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) E^0_B(f) + \\
&+ \frac{1}{2} E^0_A(g) \hat{I}_{AB}(E^0_B(f))'_C(\hat{I}_{CD} E^0_D(h)) + \\
&+ h'_C\left(\hat{I}_{CD} E^0_D\big(g'_A(\hat{I}_{AB} E^0_B(f)) - f'_A(\hat{I}_{AB} E^0_B(g)) + \right. \\
&+ \left. E^0_A(f) \hat{I}_{AB} E^0_B(g)\big)\big)\right) - \\
&- \frac{1}{2} E^0_C\left(f'_A(\hat{I}_{AB} E^0_B(g)) - g'_A(\hat{I}_{AB} E^0_B(f)) - \right. \\
&- \left. \frac{1}{2} E^0_A(f) \hat{I}_{AB} E^0_B(g) + \frac{1}{2} E^0_A(g) \hat{I}_{AB} E^0_B(f)\right) \hat{I}_{CD} E^0_D(h) + \\
&+ \frac{1}{2} E^0_C(h) \hat{I}_{CD} E^0_D\left(f'_A(\hat{I}_{AB} E^0_B(g)) - g'_A(\hat{I}_{AB} E^0_B(f)) - \right. \\
&- \left. \frac{1}{2} E^0_A(f) \hat{I}_{AB} E^0_B(g) + \frac{1}{2} E^0_A(g) \hat{I}_{AB} E^0_B(f)\right)
\end{aligned}
$$

Здесь мы использовали обозначение

$$
f''_{AB}(\xi_A, \eta_B) = \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^{(J)}_A \partial \phi^{(K)}_B} D_J \xi_A D_K \eta_B.
$$

Затем делая циклические перестановки и пользуясь формулами из Приложения A приходим к результату

$$
\begin{gathered}
\{\{f,g\},h\}+\{\{h,f\},g\}+\{\{g,h\},f\}= \\
= f'_A\left(\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_C}D_L(\hat{I}_{CD}E^0_D(h)D_ME^0_B(g))\right)- \\
-g'_A\left(\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_C}D_L(\hat{I}_{CD}E^0_D(h)D_ME^0_B(f))\right)- \\
-h'_C\left(\hat{I}_{CD}(-D)_L\left[\frac{1}{2}E^0_A(f)\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_D}D_ME^0_B(g)-\frac{1}{2}E^0_A(g)\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_D}D_ME^0_B(f)\right]\right)- \\
-\frac{1}{2}E^0_A(f)\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_C}D_L(\hat{I}_{CD}E^0_D(h))D_ME^0_B(g)+ \\
+\frac{1}{2}E^0_A(g)\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_C}D_L(\hat{I}_{CD}E^0_D(h))D_ME^0_B(f)- \\
-\frac{1}{2}(-D)_L\left[\frac{1}{2}E^0_A(f)\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_C}D_ME^0_B(g)-\frac{1}{2}E^0_A(g)\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_C}D_ME^0_B(f)\right]\hat{I}_{CD}E^0_D(h)+ \\
+\frac{1}{2}E^0_C(h)\hat{I}_{CD}(-D)_L\left[\frac{1}{2}E^0_A(f)\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_D}D_ME^0_B(g)-\frac{1}{2}E^0_A(g)\frac{\partial I^M_{AB}}{\partial\phi^{(L)}_D}D_ME^0_B(f)\right]+ \\
+\quad (f,g,h).
\end{gathered}
$$

Из выписанного выше выражения очевидно, что в случае постоянных коэффициентов I^M_{AB} тождество Якоби выполняется. Прямым вычислением проверяется, что в случае ультралокальных скобок Пуассона с коэффициентами, зависящими от полей (но не от их пространственных производных), получается хорошо известное условие на коэффициенты:

$$I_{AB,C}I_{CD}+\quad (A,B,D)=0.$$

Приложение B. Законы преобразования

Здесь мы получим правила преобразования производных Эйлера-Лагранжа и Фреше при дифференциальных подстановках полей (5.11).

Сначала рассмотрим вариацию произвольной функции от полевых переменных

$$\delta f = f'_A \delta\phi_A \equiv \frac{\partial f}{\partial \phi_A^{(J)}} D_J \delta\phi_A.$$

Если взять преобразованные поля

$$\bar{\phi}_{\bar{B}} = \xi_{\bar{B}}(\phi_A, D_J\phi_A),$$

то получаем

$$\delta f = f'_{\bar{B}} \delta\bar{\phi}_{\bar{B}} \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{\phi}_{\bar{B}}^{(K)}} D_K \delta\bar{\phi}_{\bar{B}},$$

где

$$\delta\bar{\phi}_{\bar{B}} = (\xi_{\bar{B}})'_A \delta\phi_A.$$

Следовательно

$$f'_A = f'_{\bar{B}} \circ (\xi_{\bar{B}})'_A.$$

Затем рассмотрим выражение

$$\langle 1|f'_A|\delta\phi_A\rangle = \langle \delta\phi_A|(f'_A)^*|1\rangle \equiv E^0_A(f)\delta\phi_A,$$

где угловыми скобками выделено стандартное подинтегральное выражение, определенное с точностью до дивергенций, и сделаем замену переменных

$$\phi_A \to \bar{\phi}_{\bar{B}} = \xi_{\bar{B}}(\phi_A, D_J\phi_A),$$

тогда

$$E^0_A(f)\delta\phi_A = \langle 1|f'_{\bar{B}} \circ (\xi_{\bar{B}})'_A|\delta\phi_A|\rangle = \langle 1|f'_{\bar{B}}|(\xi_{\bar{B}})'_A\delta\phi_A\rangle =$$

$$= \langle (\xi_{\bar{B}})'_A\delta\phi_A|(f'_{\bar{B}})^*|1\rangle = E^0_{\bar{B}}(f)(\xi_{\bar{B}})'_A\delta\phi_A =$$

$$= \langle E^0_{\bar{B}}(f)|(\xi_{\bar{B}})'_A|\delta\phi_A\rangle = \langle \delta\phi_A|\left((\xi_{\bar{B}})'_A\right)^*|E^0_{\bar{B}}(f)\rangle,$$

или

$$E^0_A(f) = \left((\xi_{\bar{B}})'_A\right)^* E^0_{\bar{B}}(f).$$

Этот результат может быть подтвержден и более утомительным, но прямым вычислением с помощью формул для высших операторов Эйлера, приведенных в статье [91].

Глава 6

Особенности канонического формализма Аштекара

6.1 Постановка задачи

Предложенные в 1980-х годах Аштекаром новые гамильтоновы переменные для гравитации [107] в основном привлекли к себе внимание перспективой продвинуться в направлении квантования гравитационного поля [110, 111]. В первых работах [112, 113, 114, 115] было показано, что новые переменные появляются в результате последовательности канонических преобразований, начинающейся с обычного тетрадного гамильтонова формализма. Ключевым в этой последовательности является переход к комплексной (анти)самодуальной связности. В этой главе мы покажем, следуя нашим работам [35, 51, 36, 47, 43], что при этом переходе игнорировались некоторые поверхностные члены, хотя они могут быть отличны от нуля, например, в асимптотически плоском пространстве при граничных условиях, принятых в работах [108, 109]. Причиной этого стало то, что некоторые результаты, строго доказанные лишь в механике, были экстраполированы на теорию поля. Формализм Аштекара может рассматриваться в качестве примера того, как в теории поля проявляется роль поверхностных интегралов в симплектической форме и в скобках Пуассона.

Далее в этой главе мы используем новое определение скобки Пуассона, введенное в главе 3, для анализа канонического формализма общей теории относительности в переменных Аштекара и АДМ, следуя работе [43]. Будет показано, что известные алгебры могут быть реализованы здесь независимо от выбора граничных условий. Особенностью формализма Аштекара является использование переменных, которые при учете поверхностных членов не являются каноническими.

6.2 Преобразование Аштекара

Вместо метрического тензора γ_{ij} введем триады E_i^a, так что $\gamma_{ij} = E_i^a E_j^a$, $a = 1, 2, 3$. Обратные к триадам матрицы будем обозначать E_a^i, т.е. $E_i^a E_a^j = \delta_i^j$, $E_i^a E_b^i = \delta_b^a$. Поскольку $\gamma^{kj}\gamma_{ji} = \gamma^{kj} E_j^a E_i^a = \delta_i^k$, то обратную матрицу можно получить поднимая индекс с помощью γ^{kj}, $E_a^k = E^{ka} = \gamma^{kj} E_j^a$. Положение индекса a, нумерующего векторы триады, безразлично. Нетрудно также убедиться, что

$$\gamma^{ij} = E^{ia} E^{ja}, \qquad \gamma = \det|E_i^a E_j^a| = (\det|E_i^a|)^2 = E^2. \tag{6.1}$$

Введем сопряженные к полям триад импульсы π_a^i

$$\left\{E_i^a(x), \pi_b^j(y)\right\} = \delta_i^j \delta_b^a \delta(x, y), \tag{6.2}$$

которые легко связать с импульсами π^{ij} формализма АДМ

$$\pi^{ij} = \frac{1}{4}\left(\pi_a^i E_a^j + \pi_a^j E_a^i\right). \tag{6.3}$$

При этом оказывается, что скобки Пуассона для переменных АДМ частично изменяются

$$\left\{\gamma_{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \delta_{ij}^{kl}\delta(x, y), \qquad \{\gamma_{ij}(x), \gamma_{kl}(y)\} = 0, \tag{6.4}$$

но

$$\left\{\pi^{ij}(x),\pi^{kl}(y)\right\}=\frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\mathcal{M}^{jl}+\gamma^{il}\mathcal{M}^{jk}+\gamma^{jk}\mathcal{M}^{il}+\gamma^{jl}\mathcal{M}^{ik}\right)\delta(x,y), \tag{6.5}$$

где

$$\mathcal{M}^{ij}=\frac{1}{4}\left(E^{ia}\pi^j_a-E^{ja}\pi^i_a\right)=\mathcal{M}^{[ij]}. \tag{6.6}$$

Сохранение соответствия пуассоновых структур требует наложения трех связей $\mathcal{M}^{ij}=0$, что обеспечивает также сохранение числа степеней свободы (симметричный тензор $\gamma_{ij}(x)$ определялся в каждой точке 6 числами, а матрица триады $E^a_i(x)$ содержит 9 независимых компонент). Можно эквивалентным образом представить связи в виде

$$J^{ab}\equiv J^{[ab]}=0,\qquad J^{ab}=\mathcal{M}^{ij}E^a_iE^b_j. \tag{6.7}$$

При этом связи находятся в инволюции

$$\left\{\mathcal{M}^{ij}(x),\mathcal{M}^{kl}(y)\right\}=\frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\mathcal{M}^{jl}-\gamma^{il}\mathcal{M}^{jk}-\gamma^{jk}\mathcal{M}^{il}+\gamma^{jl}\mathcal{M}^{ik}\right)\delta(x,y). \tag{6.8}$$

Разумеется, выбор $\left(E^a_i,\pi^i_a\right)$ в качестве канонических переменных не является единственным. С точки зрения предстоящего перехода к переменным Аштекара удобнее использовать переменные $\left(\tilde{E}^{ia},K^a_i\right)$, выбранные так, что

$$\tilde{E}^{ia}=EE^{ia},\quad K^a_i=K_{ij}E^{ja}+E^{-1}E_{ib}J^{ab}, \tag{6.9}$$

тогда

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x),K^b_j(y)\right\}=\frac{1}{2}\delta^i_j\delta^{ab}\delta(x,y), \tag{6.10}$$

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x),\tilde{E}^{jb}(y)\right\}=0,\qquad \left\{K^a_i(x),K^b_j(y)\right\}=0. \tag{6.11}$$

В работах [107, 108, 109] Аштекаром было предложено замечательное преобразование, которое позволило представить плотность гравитационного гамильтониана в виде полинома четвертой степени по каноническим переменным. Наше изложение следует, в основном, работе [112]. Преобразование Аштекара аналогично каноническим преобразованиям классической механики вида

$$q^A\to q^A,\quad p_A\to p_A+\frac{\partial F(q)}{\partial q_A}. \tag{6.12}$$

В данном случае вместо порождающей преобразование функции $F(q)$ используется функционал

$$F = F\left[\tilde{E}^{ia}\right] = \int\limits_{\Omega} \tilde{E}^{ia}\Gamma_i^a d^3x, \tag{6.13}$$

где

$$\Gamma_i^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}E_{jc}E^{jb}{}_{|i}. \tag{6.14}$$

а вместо частной производной по координате — вариационная производная Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\delta F}{\delta \tilde{E}^{ia}} = \Gamma_i^a. \tag{6.15}$$

Если не принимать во внимание поверхностные члены, то такое преобразование будет каноническим. Аштекаром одновременно вводится комплексная параметризация, так что новой переменной служит связность

$$A_i^a = iK_i^a + \Gamma_i^a, \tag{6.16}$$

причем

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), A_j^b(y)\right\} = \frac{i}{2}\delta_j^i\delta^{ab}\delta(x,y), \tag{6.17}$$

$$\left\{\tilde{E}^{ia}(x), \tilde{E}^{jb}(y)\right\} = 0, \qquad \left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} = 0. \tag{6.18}$$

Замена переменных в гамильтониане приводит, с точностью до поверхностных членов, к анализу которых мы перейдем ниже, к выражению

$$H = \int\limits_{\Omega} \left(\mathcal{N}\epsilon^{abc}\tilde{E}^{ia}\tilde{E}^{jb}F_{ij}^c + N^i 2i\tilde{E}^{ja}F_{ij}^a + \hat{\xi}^a 2\mathcal{D}_i\tilde{E}^{ia}\right) d^3x. \tag{6.19}$$

Здесь

$$\mathcal{D}_i\tilde{E}^{ia} \equiv i\epsilon^{abc}J^{bc} \equiv i\epsilon^{abc}E_{ib}E_{jc}\mathcal{M}^{ij}, \tag{6.20}$$

а новая ковариантная производная $\mathcal{D}_i$ определяется формулой

$$\mathcal{D}_i\lambda^{ka} = \lambda^{ka}{}_{|i} + \epsilon^{abc}A_i^b\lambda^{kc}. \tag{6.21}$$

Кривизна связности A_i^a определяется соотношением

$$\left(\mathcal{D}_i\mathcal{D}_j - \mathcal{D}_j\mathcal{D}_i\right)\lambda^a = \epsilon^{abc}F_{ij}^b\lambda^c, \tag{6.22}$$

так что,

$$F_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + \epsilon^{abc}A_i^b A_j^c. \tag{6.23}$$

Отметим, что в этой работе, как и в [36], связи и гамильтониан отличаются множителем 2, а скобка Пуассона — множителем 1/2 от приведенных в публикациях [107, 108, 109]. Уравнения движения при этом совпадают. Мы предпочитаем пользоваться данными обозначениями, поскольку тогда лагранжев множитель N^i совпадает с множителем АДМ формализма, а $\mathcal{N} = E^{-1}N$.

Приведем для сравнения с АДМ формализмом

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= \left(\gamma^{ik}(x)\mathcal{H}_k(x) + \gamma^{ik}(y)\mathcal{H}_k(y)\right)\delta_{,i}(x,y), \\
\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_k(y)\} &= \mathcal{H}_i(y)\delta_{,k}(x,y) + \mathcal{H}_k(x)\delta_{,i}(x,y), \\
\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} &= \mathcal{H}(x)\delta_{,i}(x,y).
\end{aligned} \tag{6.24}$$

алгебру для генераторов (6.19):

$$\{H(\mathcal{N}, N^i, \hat{\xi}^a), H(\mathcal{M}, M^j, \hat{\eta}^b)\} = H(\mathcal{L}, L^k, \hat{\lambda}^c), \tag{6.25}$$

$$\mathcal{L} = N^k\mathcal{M}_{,k} - \mathcal{M}N^k{}_{,k} - M^k\mathcal{N}_{,k} + \mathcal{N}M^k{}_{,k}, \tag{6.26}$$

$$L^k = \tilde{E}^{ka}\tilde{E}^{ja}\left(\mathcal{N}\mathcal{M}_{,j} - \mathcal{M}\mathcal{N}_{,j}\right) + N^jM^k{}_{,j} - M^jN^k{}_{,j}, \tag{6.27}$$

$$\hat{\lambda}^c = i\epsilon^{cab}\hat{\xi}^a\hat{\eta}^b + \frac{i}{2}F^c_{jk}(N^jM^k - M^jN^k) + \epsilon^{cab}F^a_{jk}\tilde{E}^{kb}N^j\mathcal{M}. \tag{6.28}$$

6.3 Некоммутативность вариационных производных

В дальнейшем нас будет интересовать ситуация, когда поверхностные члены играют существенную роль. Будет показано, что в этом случае преобразование Аштекара отлично от канонического, а именно

$$\left\{A^a_i(x), A^b_j(y)\right\} \neq 0. \tag{6.29}$$

Если в механике соотношение

$$\frac{\partial^2 F(q)}{\partial q^A \partial q^B} = \frac{\partial^2 F(q)}{\partial q^B \partial q^A}, \tag{6.30}$$

является тождеством, то в теории поля по отношению к аналогичному равенству

$$\frac{\delta^2 F[\phi]}{\delta\phi^A(x)\delta\phi^B(y)} = \frac{\delta^2 F[\phi]}{\delta\phi^B(y)\delta\phi^A(x)} \tag{6.31}$$

утверждать это уже нельзя, в общем случае последнее не выполняется из-за присутствия частных производных в подинтегральном выражении $F[\phi]$ (мы для простоты ограничимся рассмотрением только первых производных),

$$F[\phi] = \int\limits_V f\left(\phi^C(z^i), \frac{\partial \phi^C(z^i)}{\partial z^j}\right) d^n z. \tag{6.32}$$

Координатно-инвариантный интеграл берется по связной, конечной или бесконечной, области V с гладкой границей ∂V, здесь A, B, C — некие абстрактные индексы. Наше утверждение может показаться неопределенным (или неверным), если пользоваться для вычислений δ-функцией, причина этого заключается в неадекватности такого формализма. Ниже мы рассмотрим это подробнее. Однако проще решить задачу с помощью сглаженных производных Эйлера-Лагранжа, определенных следующим образом:

$$\int\limits_V N^A(x) \frac{\delta F(\phi)}{\delta \phi^A(x)} d^n x = \int\limits_V N^A(x) \left(\frac{\partial f}{\partial \phi^A} - \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial \phi^A_{,i}}\right) d^n x, \tag{6.33}$$

где $N^A(x)$ — произвольные бесконечно дифференцируемые функции с трансформационными свойствами, сохраняющими координатную инвариантность интеграла. Тогда можно видеть, что справедливо следующее соотношение

$$\int\limits_V d^n x \int\limits_V d^n y N^A(x) M^B(y) \left[\frac{\delta^2}{\delta\phi^B(y)\delta\phi^A(x)} - \frac{\delta^2}{\delta\phi^A(x)\delta\phi^B(y)}\right] F[\phi] = \tag{6.34}$$

$$= \oint\limits_{\partial V} (N^A M^B - N^B M^A) \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^{[B} \partial \phi^{A]}_{,j}} dS_j + \oint\limits_{\partial V} (N^B M^A_{,i} - M^B N^A_{,i}) \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^B_{,j} \partial \phi^A_{,i}} dS_j,$$

где поверхностные интегралы берутся по границе ∂V, квадратные скобки обозначают антисимметризацию, а запятая — частную производную по соответствующей координате.

Теперь проследим последовательность преобразований, ведущих к переменным Аштекара. Симплектическая форма тетрадного гамильтонова формализма гравитации во временно́й калибровке имеет вид

$$\Omega = \int \delta E^a_i(x) \wedge \delta \pi^{ia}(x) d^3 x, \tag{6.35}$$

где в принятых обозначениях, $a, b, c, \ldots$ — триадные индексы; $i, j, k, \ldots$ — пространственные. Как было показано в работе [112], эти переменные сначала следует заменить на

$$\widetilde{E}^{ia} = E E^{ia}, \qquad K_i^a(x) = K_{ij} E^{ja} + E^{-1} J^{ab} E_{ib}, \tag{6.36}$$

где E^{ia} — обратная матрица для E_i^a, $E = \det(E_i^a)$, K_{ij} — вторая фундаментальная форма гиперповерхности постоянного времени и J^{ab} — шесть связей, генерирующих вращения триад. Тогда получаем

$$\{\widetilde{E}^{ia}(x), K_j^b(y)\} = \frac{1}{2}\delta_j^i \delta^{ab} \delta(x, y), \qquad \{K_i^a(x), K_j^b(y)\} = 0. \tag{6.37}$$

Последним шагом к переменным Аштекара является следующее преобразование:

$$\begin{aligned} \widetilde{E}^{ia}(x) &\rightarrow \quad \widetilde{E}^{ia}(x), \\ K_i^a(x) &\rightarrow \quad {}^{\pm}A_i^a(x) = \pm i K_i^a(x) + \frac{\delta}{\delta \widetilde{E}^{ia}(x)} F[\widetilde{E}], \end{aligned} \tag{6.38}$$

где мы можем использовать ${}^{+}A_i^a(x)$ или ${}^{-}A_i^a(x)$ в качестве переменной, сопряженной к $\widetilde{E}^{ia}$,

$$F[\widetilde{E}] = \int \widetilde{E}^{jb}(y) \Gamma_j^b(y) d^3y, \qquad \Gamma_i^a(x) = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}(E_{jc}\partial_i E^{jb} + \Gamma_{ij}^k E^{jb} E_{kc}), \tag{6.39}$$

Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля и

$$\frac{\delta F[\widetilde{E}]}{\delta \widetilde{E}^{ia}(x)} = \Gamma_i^a(x), \tag{6.40}$$

поскольку члены с $\delta\Gamma_i^a$ являются дивергенциями и не дают вклада в функциональную производную. Скобка Пуассона

$$\{\int\limits_V N^{ia}(x) {}^{\pm}A_i^a(x) d^3x, \int\limits_V M^{jb}(y) {}^{\pm}A_j^b(y) d^3y\} = \tag{6.41}$$

$$= \pm\frac{i}{2} \int\limits_V d^3x \int\limits_V d^3y N^{ia}(x) M^{jb}(y) \left[\frac{\delta}{\delta \widetilde{E}^{jb}(y)} \frac{\delta}{\delta \widetilde{E}^{ia}(x)} - \frac{\delta}{\delta \widetilde{E}^{ia}(x)} \frac{\delta}{\delta \widetilde{E}^{jb}(y)}\right] F[\widetilde{E}],$$

согласно (6.34) является отличной от нуля. Следовательно скобки Пуассона в формализме Аштекара должны определяться формулой:

$$\{H_1, H_2\} = \int\limits_V d^3x \int\limits_V d^3y[\left(\frac{\delta H_1}{\delta \tilde{E}^{ia}(x)} \frac{\delta H_2}{\delta^{\pm} A_j^b(y)} - \frac{\delta H_2}{\delta \tilde{E}^{ia}(x)} \frac{\delta H_1}{\delta^{\pm} A_j^b(y)}\right) \times \tag{6.42}$$

$$\times\{\tilde{E}^{ia}(x), \overset{\pm}{A}{}_j^b(y)\} + \frac{\delta H_1}{\delta^{\pm} A_i^a(x)} \frac{\delta H_2}{\delta^{\pm} A_j^b(y)}\{\overset{\pm}{A}{}_i^a(x), \overset{\pm}{A}{}_j^b(y)\}],$$

или

$$\{H_1, H_2\} = \pm\frac{i}{2}\int\limits_V \left[\frac{\delta H_1}{\delta \tilde{E}^{ia}} \frac{\delta H_2}{\delta^{\pm} A_i^a} - \frac{\delta H_2}{\delta \tilde{E}^{ia}} \frac{\delta H_1}{\delta^{\pm} A_i^a}\right] d^3x \pm \tag{6.43}$$

$$\pm\frac{i}{4}\oint\limits_{\partial V} \epsilon^{acd} E^{-1}(\delta_j^k \delta^{bd} E_{ic} - E_{ib} E_{jc} E^{kd}) \left[\frac{\delta H_1}{\delta^{\pm} A_i^a} \frac{\delta H_2}{\delta^{\pm} A_j^b} - \frac{\delta H_2}{\delta^{\pm} A_i^a} \frac{\delta H_1}{\delta^{\pm} A_j^b}\right] dS_k,$$

и соответствующая симплектическая форма имеет вид

$$\Omega = \pm 2i \int\limits_V \delta \overset{\pm}{A}{}_i^a \wedge \delta \tilde{E}^{ia} d^3x \pm \tag{6.44}$$

$$\pm 4i \oint\limits_{\partial V} \epsilon^{acd} E^{-1}(\delta_j^k \delta^{bd} E_{ic} - E_{ib} E_{jc} E^{kd}) \delta \tilde{E}^{ia} \wedge \delta \tilde{E}^{jb} dS_k.$$

Рассмотренная выше некоммутативность вариационных производных может иметь более широкий круг приложений и пролить новый свет на преобразования полей при редукции в калибровочных теориях.

6.4 Поверхностные члены и δ-функция

Теперь сделаем обещанные замечания о неадекватности обычного применения δ-функций к проблеме вычисления поверхностных членов в канонических скобках Пуассона. Если сначала вычисляются скобки локальных подинтегральных выражений, то чтобы получить из них результаты в виде однократных интегралов, т.е. локальных функционалов, необходимо уметь считать двойные интегралы, подобные следующему,

$$\int\limits_V d^n x \int\limits_V d^n y \phi(x) \psi(y) \frac{\partial^{(k)}}{\partial x^{i_1} \ldots \partial x^{i_k}} \frac{\partial^{(l)}}{\partial y^{j_1} \ldots \partial y^{j_l}} \delta(x - y). \tag{6.45}$$

Но в стандартной теории обобщенных функций [94] такие интегралы определены только при условии, что носитель гладких (C^∞) пробных функций ϕ, ψ расположен строго внутри области V, т.е. не может появиться никаких поверхностных интегралов. Иначе поверхностные члены, которые возникают при обычных формальных манипуляциях с δ-функциями, неоднозначны и зависят от порядка интегрирования. Нетрудно убедиться, что ответ будет единственным, причем именно тем, который возникает при непосредственном интегрировании эйлеровых производных по стандартной формуле:

$$F, G = \int\limits_V \left(\frac{\delta F}{\delta q^A(x)} \frac{\delta G}{\delta p_A(x)} - \frac{\delta G}{\delta q^A(x)} \frac{\delta F}{\delta p_A(x)} \right) d^n x, \tag{6.46}$$

если мы определим (слегка выходя при этом за рамки стандартной теории обобщенных функций, но отнюдь не претендуя на то, чтобы предложить взамен новую теорию) интеграл (6.45) как

$$(-1)^{k+l} \int\limits_V \frac{\partial^{(k)} \phi}{\partial x^{i_1} ... \partial x^{i_k}} \frac{\partial^{(l)} \psi}{\partial x^{j_1} ... \partial x^{j_l}} d^n x. \tag{6.47}$$

Другими словами, производная от δ-функции, взятая по одному аргументу, должна при интегрировании по частям переноситься на пробную функцию по тому же самому аргументу. Итак мы видим, что неоднозначность в локальных вычислениях возникает из-за неоправданного использования соотношения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \delta(x, y) = 0. \tag{6.48}$$

Нетрудно проверить, что поверхностные интегралы в скобках Пуассона будут совпадать с теми, что были получены с помощью эйлеровых производных из (6.46), если вместо (6.48) применять следующую формулу:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \delta(x, y) = -\delta_i(S_x) \delta(x, y), \tag{6.49}$$

где поверхностная δ-функция определяется, аналогично [94], как

$$\int\limits_V f^i(x) \delta_i(S_x) d^n x = \oint\limits_{\partial V} f^i(x) dS_i \equiv \int\limits_V f^i_{,i}(x) d^n x, \tag{6.50}$$

и $f^i(x)$ должно быть векторной плотностью, бесконечно дифференцируемой (C^∞) в n-мерной области V вместе с ее границей ∂V. Все обычные формулы для δ-функции и ее производных, которые берутся только по одному из двух ее аргументов, остаются в силе. Дифференцируя (6.49) мы можем вывести полезные формулы для смешанных вторых и третьих производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial y^j}\delta(x,y) &= -\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\delta(x,y) - \delta_j(S_y)\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(x,y) = \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\delta(x,y) - \delta_i(S_x)\frac{\partial}{\partial y^j}\delta(x,y), \qquad (6.51) \\ \frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^j \partial y^k}\delta(x,y) &= -\frac{\partial^3}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k}\delta(x,y) - \delta_k(S_y)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\delta(x,y) \qquad (6.52) \end{aligned}$$

Фактически, этих правил в обычных ситуациях достаточно для вычисления поверхностных интегралов в скобках Пуассона, например, в метрическом гамильтоновом формализме ОТО, где ответ (1.6) был получен в главе 1.

Приведенные в этом параграфе формулы были получены в работе [36] на основе стандартного определения скобки Пуассона (6.46). Изменение определения скобки Пуассона, сделанное в главе 3, автоматически влечет за собой и изменение формул для производных δ-функции, новые формулы приведены в главе 4. В частности знак в соотношении (6.49) оказывается противоположным.

6.5 Поверхностные члены в АДМ формализме

В качестве примера вычисления новой скобки Пуассона, введенной в главе 3, по формуле

$$\{F,G\} = \int \mathrm{Tr}\left(f'_A \hat{I}_{AB} g'_B\right) d^n x, \qquad (6.53)$$

рассмотрим скобку для функционалов, известных как генераторы пространственных диффеоморфизмов в асимптотически-плоском пространстве-времени,

$$\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} = \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(h'_{\gamma_{ij}}(N^i) h'_{\pi^{ij}}(M^j) - h'_{\gamma_{ij}}(M^j) h'_{\pi^{ij}}(N^i)\right) d^3x, \qquad (6.54)$$

где

$$H(N^i)=\int\limits_{\Omega}N^i\mathcal{H}_i d^3x+\oint\limits_{\partial\Omega}2\pi^j_i N^i dS_j\equiv\int\pi^{ij}(N_{i|j}+N_{j|i})d^3x. \tag{6.55}$$

Вариация такого функционала имеет вид

$$\delta H=\int\left((N_{i|j}+N_{j|i})\delta\pi^{ij}+2\pi^{ij}\delta(\gamma_{ik}(N^k_{\ ,j}+\Gamma^k_{jm}N^m))\right)d^3x. \tag{6.56}$$

Воспользовавшись известной формулой

$$\delta\Gamma^k_{jm}=\frac{1}{2}\gamma^{kn}\left(\delta\gamma_{nj|m}+\delta\gamma_{nm|j}-\delta\gamma_{jm|n}\right), \tag{6.57}$$

находим

$$\delta H(N^i)=\int\limits_{\Omega}\Big((N_{i|j}+N_{j|i})\delta\pi^{ij}+(\pi^{ik}N^j_{\ |k}+\pi^{kj}N^i_{\ |k})\delta\gamma_{ij}+N^k\pi^{ij}(\delta\gamma_{ij})_{|k}\Big)d^3x, \tag{6.58}$$

откуда видно, что производные Фреше по каноническим переменным определяются формулами:

$$h'_{\pi^{ij}}(N^i)\ =\ N_{i|j}+N_{j|i}, \tag{6.59}$$

$$h'_{\gamma_{ij}}(N^i)\ =\ \pi^{ik}N^j_{\ |k}+\pi^{kj}N^i_{\ |k}+N^k\pi^{ij}\nabla_k, \tag{6.60}$$

где ∇_k обозначает ту же ковариантную производную, согласованную с метрикой γ_{ij}, что и вертикальная черта. Таким образом, здесь производная Фреше по импульсам от генератора (6.55) является функцией, а производная по метрике — дифференциальным оператором. В отличие от вычислений, проводимых для нахождения производной Эйлера-Лагранжа, здесь нет необходимости интегрировать по частям.

Вычислим след

$$\mathrm{Tr}\left(h'_{\gamma_{ij}}(N^i)h'_{\pi^{ij}}(M^j)\right)=\left(\pi^{ik}N^j_{\ |k}+\pi^{kj}N^i_{\ |k}+N^k\pi^{ij}\nabla_k\right)(M_{i|j}+M_{j|i}). \tag{6.61}$$

Симметричные по N,M члены не дадут вклада в скобку Пуассона, и после переобозначения индексов получаем

$$\left\{H(N^i),H(M^j)\right\}=\int\limits_{\Omega}2\pi^{ij}\left((N^k_{\ |j}M_{i|k}-M^k_{\ |j}N_{i|k})+(N^kM_{i|jk}-M^kN_{i|jk})\right)d^3x. \tag{6.62}$$

Далее, изменим порядок вторых ковариантных производных согласно соотношению

$$M_{i|jk} = M_{i|kj} + R_{mijk} M^m, \tag{6.63}$$

тогда вклад

$$2\pi^{ij} R_{mijk} \left(N^k M^m - M^k N^m \right) \tag{6.64}$$

обращается в нуль, в силу свойств симметрии тензора Римана, следовательно

$$\left\{ H(N^i), H(M^j) \right\} = \int\limits_{\Omega} 2\pi^{ij} \big(N^k M_{i|k} - M^k N_{i|k} \big)_{|j} d^3x = H([N, M]^k). \tag{6.65}$$

Мы видим, что генераторы $H(N^i)$ реализуют представление алгебры диффеоморфизмов 3-мерной гиперповерхности. При этом мы не задавали каких-либо специальных граничных условий, т.е. при обычном подходе эти генераторы не являются "дифференцируемыми" функционалами. С нашей точки зрения, это означает лишь то, что стандартной формулой для скобки Пуассона нельзя пользоваться в общем случае. Если попытаться формально вычислить ту же самую скобку применяя обычную формулу

$$\{F, G\} = \int\limits_{\Omega} \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \hat{I}_{AB} \frac{\delta G}{\delta \phi_B} d^n x, \tag{6.66}$$

то результат будет отличаться от нашего ответа поверхностным интегралом

$$\Delta \left\{ H(N^i), H(M^j) \right\} = - \oint\limits_{\partial\Omega} \pi^{ij} \left(N^k (M_{i|j} + M_{j|i}) - M^k (N_{i|j} + N_{j|i}) \right) dS_k. \tag{6.67}$$

Естественно, что в общем случае тождество Якоби для скобки (6.66) также не будет выполняться.

$$\big\{ \{ H(N^i), H(M^j) \}, H(L^k) \big\} + \big\{ \{ H(L^i), H(N^j) \}, H(M^k) \big\} +$$

$$+ \big\{ \{ H(M^i), H(L^j) \}, H(N^k) \big\} \neq 0.$$

Условием выполнения тождества Якоби для стандартной скобки Пуассона будет здесь требование, чтобы N^i, M^j, L^k были векторами Киллинга метрики γ_{ij} на границе $\partial\Omega$ или чтобы они были касательными к границе.

Очевидно, в первом случае новая и старая формулы дадут один и тот же результат, хотя функционалы $H(N^i)$, $H(M^j)$ и останутся "недифференцируемыми"

$$\delta H = \int\limits_{\Omega} \left(E^0_{\gamma_{ij}}(h)\delta\gamma_{ij} + E^0_{\pi^{ij}}(h)\delta\pi^{ij} \right) d^3x + \oint\limits_{\partial\Omega} N^k \pi^{ij} \delta\gamma_{ij} dS_k. \tag{6.68}$$

Этот факт вновь свидетельствует в пользу пересмотра стандартного определения скобки Пуассона.

6.6 Поверхностные члены в формализме Аштекара

Естественно ожидать, что переход от переменных АДМ к переменным Аштекара не должен существенно повлиять на алгебру генераторов пространственных диффеоморфизмов (6.65). Однако, имеются по меньшей мере две особенности этого преобразования, которые нам хотелось бы обсудить подробнее.

Во-первых, выше уже отмечалось, что переход к триадам сохраняет прежние скобки Пуассона лишь на поверхности связей $\mathcal{M}^{ij} = 0$, а следовательно, чтобы получить полную (off-shell) структуру пуассоновой алгебры, необходимо проделать дополнительные вычисления.

Во-вторых, как также упоминалось ранее, преобразование Аштекара канонично лишь с точностью до поверхностных членов и важно понять, какую роль в алгебре играет неканонический вклад.

Поскольку речь идет о применении новой формулы для скобки Пуассона, мы считаем оправданным подробное изложение технических деталей расчетов.

Итак, начнем с проверки того, как изменится соотношение

$$\left\{ H(N^i), H(M^j) \right\} = H\left([N, M]^k \right), \tag{6.69}$$

где

$$[N, M]^k = N^i M^k_{,i} - M^i N^k_{,i}. \tag{6.70}$$

(6.69) при переходе к триадам. Поскольку

$$\left\{\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(y)\right\} = \mathcal{C}^{ijkl}_{mn} \mathcal{M}^{mn} \delta(x, y), \tag{6.71}$$

где

$$\mathcal{C}^{ijkl}_{mn} = \frac{1}{4}\left(\gamma^{ik}\delta^{jl}_{mn} + \gamma^{il}\delta^{jk}_{mn} + \gamma^{jk}\delta^{il}_{mn} + \gamma^{jl}\delta^{ik}_{mn}\right), \tag{6.72}$$

то возникает дополнительный вклад в найденную ранее скобку, который обращается в нуль на поверхности связей $\mathcal{M}^{mn} = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} &= \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(h'_{\pi^{ij}}(N^i)\mathcal{C}^{ijkl}_{mn}\mathcal{M}^{mn}h'_{\pi^{kl}}(M^j)\right) d^3x = \\ &= \int\limits_\Omega (N_{i|j} + N_{j|i})\mathcal{C}^{ijkl}_{mn}\mathcal{M}^{mn}(M_{k|l} + M_{l|k}) d^3x = \\ &= \int\limits_\Omega (N^k{}_{|m} + N_m{}^{|k})(M_{k|n} + M_{n|k})\mathcal{M}^{mn} d^3x. \end{aligned} \tag{6.73}$$

Эта добавка может обратиться в нуль и вне поверхности связей, если хотя бы одно из векторных полей $N^i(x),\ M^j(x)$ удовлетворяет уравнению Киллинга, т.е. сохраняет метрику $\gamma_{ij}(x)$ в области Ω.

Для вычисления скобки непосредственно в новых переменных, например в переменных $\left(E^a_i, \pi^i_a\right)$, не всегда необходимо использовать явные выражения генераторов через эти переменные. Часто достаточно бывает выразить вариации старых полей через новые

$$\delta\gamma_{ij} = E^a_i \delta E^a_j + E^a_j \delta E^a_i, \tag{6.74}$$

$$\delta\pi^{ij} = \frac{1}{4}\left(E^{ia}\delta\pi^{ja} + \pi^{ja}\delta E^{ia} + E^{ja}\delta\pi^{ia} + \pi^{ia}\delta E^{ja}\right). \tag{6.75}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta H &= \int\limits_\Omega \left(h'_{\gamma_{ij}}\delta\gamma_{ij} + h'_{\pi_{ij}}\delta\pi^{ij}\right) d^3x = \int\limits_\Omega \left(\tilde{h}'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + \tilde{h}'_{\pi^{ia}}\delta\pi^{ia}\right) d^3x = \\ &= \int\limits_\Omega \left(h'_{\gamma_{kj}}(\gamma_{kj})'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + h'_{\pi_{kj}}(\pi^{kj})'_{E_{ia}}\delta E_{ia} + h'_{\pi_{kj}}(\pi^{kj})'_{\pi^{ia}}\delta\pi^{ia}\right) d^3x, \end{aligned} \tag{6.76}$$

откуда находим

$$\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(N^i) = h'_{\pi_{ij}}(N^i)\frac{1}{2}E^{ja} = \frac{1}{2}(N_{i|j} + N_{j|i})E^{ja},$$

$$\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i) = h'_{\gamma_{ij}}(N^i)2E_{ja} + h'_{\pi^{kl}}(N^i)\left(-\frac{1}{2}\right)\pi^{kb}E^{ib}E^{la} =$$

$$= \left(\pi^{ik}N^l{}_{|k} + \pi^{kl}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{il}\nabla_k\right)2E_{la} - \frac{1}{2}(N_{k|l} + N_{l|k})\pi^{kb}E^{ib}E^{la}. \qquad (6.77)$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left(\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(M^j)\right) &= \left(\pi^{ik}N^l{}_{|k} + \pi^{kl}N^i{}_{|k} + N^k\pi^{il}\nabla_k\right)(M_{i|l} + M_{l|i}) - \\ &- \frac{1}{4}\pi^{kb}E^{ib}(N_k{}^{|j} + N^j{}_{|k})(M_{i|j} + M_{j|i}). \end{aligned} \qquad (6.78)$$

Таким образом,

$$\left\{H(N^i), H(M^j)\right\} = \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(\tilde{h}'_{E_{ia}}(N^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(M^j) - \tilde{h}'_{E_{ia}}(M^i)\tilde{h}'_{\pi^{ia}}(N^j)\right)d^3x =$$

$$= H([N,M]^k) + \int\limits_\Omega (N^k{}_{|m} + N_m{}^{|k})(M_{k|n} + M_{n|k})\mathcal{M}^{mn}d^3x, \qquad (6.79)$$

как следовало ожидать, ответ не изменился при этой замене переменных по сравнению с деформированной, согласно (6.71), (6.65), скобкой АДМ (6.73).

Аналогичным образом, рассмотрим переход к $\left(\tilde{E}^{ia}, K_i^a\right)$. Для этого воспользуемся (6.9) и легко проверяемым соотношением

$$\pi^{ia} = 2E\left(E^{ia}E^{jb} - E^{ib}E^{ja}\right)K_j^b, \qquad (6.80)$$

тогда получаем

$$\begin{aligned} \delta E_{ia} &= \frac{1}{2E}(E_{ia}E_{jb} - 2E_{ja}E_{ib})\delta\tilde{E}^{jb}, \\ \delta\pi^{ia} &= 2E(E^{ia}E^{jb} - E^{ib}E^{ja})\delta K_j^b + \Big(2(K_j^bE^{ia} + K_k^cE^{kc}\delta_j^i\delta^{ab} - K_j^cE^{ic}\delta^{ab} - \\ &- K_k^bE^{ka}\delta_j^i) + K_k^cE_{jb}(E^{ic}E^{ka} - E^{kc}E^{ia})\Big)\delta\tilde{E}^{jb}. \end{aligned} \qquad (6.81)$$

Вычисления, аналогичные предыдущим, также подтверждают, что результат не меняется при выборе новых переменных.

Отметим, что до сих пор мы рассматривали алгебраические, т.е. не содержащие зависимости от производных полей, преобразования. При переходе к переменным Аштекара

$$\tilde{E}^{ia} \to \tilde{E}^{ia}, \quad K_i^a \to A_i^a = iK_i^a + \Gamma_i^a, \tag{6.82}$$

это свойство уже не имеет места, ибо

$$\Gamma_i^a = \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\tilde{E}_{jc}\tilde{E}^{jb}_{\ \ |i}, \tag{6.83}$$

где $\tilde{E}_{jc}$ — обратная к $\tilde{E}^{ib}$ матрица. Выразив вариации старых переменных через новые, получаем

$$\delta K_i^a = -i\delta A_i^a + i(\Gamma_i^a)'_{\tilde{E}^{jb}}\delta\tilde{E}^{jb}, \tag{6.84}$$

и, таким образом, для произвольного функционала

$$\delta F = \int\limits_\Omega \left(f'_{\tilde{E}^{ia}}\delta\tilde{E}^{ia} + f'_{K_i^a}\delta K_i^a\right) d^3x = \int\limits_\Omega \left(\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}}\delta\tilde{E}^{ia} + \tilde{f}'_{A_i^a}\delta A_i^a\right) d^3x, \tag{6.85}$$

где

$$\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}} = f'_{\tilde{E}^{ia}} + f'_{K_j^b}(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}, \tag{6.86}$$

$$\tilde{f}'_{A_i^a} = -if'_{K_i^a}. \tag{6.87}$$

Если бы это преобразование было каноническим (с точностью до множителя i), то скобка Пуассона в новых переменных определялась бы по формуле

$$\{F,G\} = \frac{i}{2}\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(\tilde{f}'_{\tilde{E}^{ia}}\tilde{g}'_{A_i^a} - \tilde{f}'_{A_i^a}\tilde{g}'_{\tilde{E}^{ia}}\right) d^3x =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_{\tilde{E}^{ia}}g'_{K_i^a} - f'_{K_i^a}g'_{\tilde{E}^{ia}}\right) d^3x + \frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(f'_{K_j^b}(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}g'_{K_i^a} - f'_{K_i^a}g'_{K_j^b}(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}\right) d^3x. \tag{6.88}$$

Но в таком случае инвариантность скобки была бы нарушена

$$\Delta_1\{F,G\} = \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_{K_i^a}\hat{C}_{aibj}g'_{K_j^b}\right) d^3x, \tag{6.89}$$

где

$$\hat{C}_{aibj} = \frac{1}{2}\left((\Gamma_i^a)'_{\tilde{E}^{jb}} - \left[(\Gamma_j^b)'_{\tilde{E}^{ia}}\right]^*\right). \tag{6.90}$$

Мы видим, что предположение о каноничности переменных Аштекара ведет к неинвариантности скобки Пуассона. Но ранее, в параграфе 3 данной главы, было показано, еще с использованием стандартной формулы (6.66), что

$$\left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} = i\hat{C}_{aibj}(x)\delta(x,y) \neq 0, \tag{6.91}$$

а именно,

$$\left\{A_i^a(x), A_j^b(y)\right\} = i\left\{\Gamma_i^a(x), K_j^b(y)\right\} + i\left\{K_i^a(x), \Gamma_j^b(y)\right\} = \frac{i}{2}\Bigg(\left(\Gamma_i^a(x)\right)'_{\tilde{E}^{jb}} -$$

$$-\left(\Gamma_j^b(y)\right)'_{\tilde{E}^{ia}}\Bigg)\delta(x,y) = \frac{i}{2}\left(\left(\Gamma_i^a(x)\right)'_{\tilde{E}^{jb}} - \left[\left(\Gamma_j^b(x)\right)'_{\tilde{E}^{ja}}\right]^*\right)\delta(x,y). \tag{6.92}$$

Если не учитывать поверхностных членов, то производная Фреше от производной Эйлера-Лагранжа является симметричным оператором [79], следовательно, здесь мы получаем чисто поверхностный вклад. Из-за неканоничности переменных Аштекара возникает, таким образом, вторая поправка

$$\Delta_2\{F,G\} = \int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(\tilde{f}'_{A_i^a}\hat{C}_{aibj}\tilde{g}'_{A_j^b}\right)d^3x = -\int\limits_\Omega \mathrm{Tr}\left(f'_{K_i^a}\hat{C}_{aibj}g'_{K_j^b}\right)d^3x, \tag{6.93}$$

которая компенсирует первую. Новая формула для скобки Пуассона является инвариантной при замене $\left(\tilde{E}^{ia}, K_i^a\right) \to \left(\tilde{E}^{ia}, A_i^a\right)$, не исключая инвариантности и для поверхностных вкладов.

Инвариантность скобки позволяет использовать для вычислений алгебры генераторов различные переменные. Явные вычисления, исходящие из записи генераторов в формализме Аштекара, значительно более трудоемки, чем рассмотренные выше. Приведем для сравнения явное выражение генератора $H(N^i)$ в переменных Аштекара, наиболее краткий вывод которого дан в работе [117]

$$\begin{aligned} H(N^i) &= 2i\int\limits_\Omega N^k\tilde{E}^{ia}F^a_{ki}d^3x - 2i\oint\limits_{\partial\Omega}\left(A_i^a - \Gamma_i^a\right)\left(\tilde{E}^{ia}N^k - \tilde{E}^{ka}N^i\right)dS_k - \\ &- 2i\int\limits_\Omega\left(N^iA_i^c - \frac{1}{2}\epsilon^{abc}\tilde{E}_{ib}\left(\tilde{E}^{ia}{}_{|k}N^k - \tilde{E}^{ka}N^i{}_{|k}\right)\right)\mathcal{D}_j\tilde{E}^{jc}d^3x. \end{aligned} \tag{6.94}$$

В качестве примера вычислений, проводимых непосредственно в переменных Аштекара, рассмотрим скобку генераторов комплексных вращений триад. Вариация генератора имеет вид

$$\delta H(\hat{\xi}^a) = \delta \int\limits_\Omega \hat{\xi}^a 2\mathcal{D}_i \tilde{E}^{ia} d^3x = \int\limits_\Omega \left(h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a) \delta \tilde{E}^{jc} + h'_{A^c_j}(\hat{\xi}^a) \delta A^c_j \right) d^3x, \tag{6.95}$$

где

$$\begin{aligned} h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a) &= 2\hat{\xi}^c \partial_j + 2\hat{\xi}^a \epsilon^{abc} A^b_j, && (6.96) \\ h'_{A^c_j}(\hat{\xi}^a) &= -2\hat{\xi}^a \epsilon^{abc} \tilde{E}^{jb}. && (6.97) \end{aligned}$$

Скобка Пуассона дается формулой

$$\begin{aligned} \{H(\hat{\xi}^a), H(\hat{\eta}^b)\} &= \frac{i}{2} \int\limits_\Omega \mathrm{Tr} \left(h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\xi}^a) h'_{A^c_j}(\hat{\eta}^b) - h'_{A^c_j}(\hat{\xi}^a) h'_{\tilde{E}^{jc}}(\hat{\eta}^b) \right) d^3x + \\ &+ i \int\limits_\Omega \mathrm{Tr} \left(h'_{A^c_j}(\hat{\xi}^a) \hat{C}_{cjdk} h'_{A^d_k}(\hat{\eta}^b) \right) d^3x. && (6.98) \end{aligned}$$

Здесь необходим явный вид неканонической поправки

$$\begin{aligned} \hat{C}_{aibj} &= \theta_{,k} C^k_{aibj} = && (6.99) \\ &= \theta_{,k} \frac{i}{4E} \left(\epsilon^{acb} \delta^k{}_j E_{ic} - \epsilon^{bca} \delta^k{}_i E_{jc} - \epsilon^{acd} E_{ib} E_{jc} E^{kd} + \epsilon^{bcd} E_{ja} E_{ic} E^{kd} \right). \end{aligned}$$

В итоге получаем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \{H(N^i), H(M^j)\} &= H\left([N, M]^k \right) + H(\hat{\lambda}^a), && (6.100) \\ \{H(N^i), H(\hat{\xi}^a)\} &= 0, && (6.101) \\ \{H(\hat{\xi}^a), H(\hat{\eta}^b)\} &= H\left(i(\hat{\xi} \times \hat{\eta})^c \right), && (6.102) \end{aligned}$$

где

$$[N, M]^k = N^i M^k{}_{,i} - M^i N^k{}_{,i}, \qquad (\hat{\xi} \times \hat{\eta})^c = \epsilon^{cab} \hat{\xi}^a \hat{\eta}^b, \tag{6.103}$$

$$\hat{\lambda}^a = \epsilon^{abc} E^{ib} E^{jc} \left(N^k{}_{|i} + N_i{}^{|k} \right) \left(M_{k|j} + M_{j|k} \right), \tag{6.104}$$

где поверхностные члены фиксированы, а граничные условия остаются полностью свободными.

Последнее слагаемое в формуле (6.100) было пропущено в аналогичной формуле (5.3) работы [117], что впрочем несущественно для основного результата. Причина этой неточности в том, что переход от канонических скобок для переменных АДМ к деформированным скобкам (6.71) не является заменой переменных и сохраняет скобки Пуассона лишь на поверхности связей $\mathcal{M}^{ij} = 0$.

6.7 Выводы

Выше мы показали, как новое определение скобок Пуассона позволяет изучать пуассоновы алгебры на более широком, чем обычно, классе функционалов. Здесь мы считаем допустимыми произвольные локальные функционалы, а не только "дифференцируемые", вариация которых не содержит вклада от границы. При этом оказывается, что можно найти генераторы, отличающиеся, вообще говоря, от связей поверхностными интегралами, такие, что их алгебра замыкается. Найденные выражения генераторов встречаются, например, при рассмотрении асимптотически плоского пространства-времени [117]. Новым является утверждение об их применимости в гораздо более общем случае, независимо от выбора граничных условий.

Первоначальная попытка автора диссертации распространить результаты главы 1 на формализм Аштекара в ОТО выявила интересную особенность: переменные Аштекара являются каноническими лишь по модулю поверхностных членов. Это выяснилось при анализе построения этих переменных из традиционных переменных ОТО (АДМ и тетрадных).

Операторы Эйлера-Лагранжа (т.е. операторы Эйлера нулевого порядка) оказываются неперестановочными, если принимать во внимание дивергенции. Перестановочны лишь <u>полные</u> вариации, включающие в себя и вариации граничных значений полей. А производные Эйлера-Лагранжа не являются полными вариационными производными, они получаются в результате отбрасывания граничных членов, возникающих при интегрировании по частям. Это соответствует постановке вариационной задачи с фиксированными на концах переменными.

В свою очередь, некоммутативность производных Эйлера-Лагранжа ведет к невыполнению стандартными скобками Пуассона тождества Якоби. Желание исправить положение привело к модификации скобки Пуассона, рассмотренной в главе 3. Кроме того, выяснилось, что стандартные вычисления с δ-функцией также пренебрегают поверхностными членами и для сохранения последних необходимо фиксировать имеющуюся неоднозначность. Такая фиксация, согласованная с новой скобкой Пуассона, дается формулами типа (4.10). Первоначально автором диссертации была предложена другая формула (6.49), отличающаяся от (4.10) знаком, поскольку она была согласована не с новой скобкой, а со стандартной.

Вторая часть главы основана на работе [43], где была построена замкнутая алгебра с поверхностными членами для генераторов 3-диффеоморфизм и калибровочных вращений триад. Это построение справедливо независимо от граничных условий и поэтому может применяться в весьма различных задачах.

Глава 7

Вычисление энтропии черной дыры из поверхностных членов в скобках Пуассона

7.1 Постановка задачи

В общей теории относительности имеются классические решения, описывающие объекты, окруженные горизонтами, за которые не может заглянуть внешний наблюдатель. За этими объектами закрепилось название "черные дыры". Падение тела в черную дыру является необратимым и означает почти полную потерю информации о нем, поэтому такое падение может быть описано как увеличение энтропии. Энтропия черной дыры пропорциональна площади поверхности ее горизонта [118].

Как объяснить возникновение этой энтропии с точки зрения статистической механики, какие микроскопические степени свободы ей соответствуют? Этот вопрос интересует многих теоретиков и на него даются разные ответы (в рамках теории струн, в рамках подхода Аштекара к квантованию гравитации и т.д.). Одно из таких объяснений энтропии черных дыр обращается к возбуждениям, живущим на поверхности горизонта. При этом оказывается, что определяющую роль играют только два измерения, описываемые радиальной и временно́й координатами. В результате, возбуждения, отвечающие за величину энтропии черных дыр, могут быть поняты как состояния двумерной конформной теории поля. Математическое описание основано на центральном расширении алгебры конформной симметрии — алгебры Вирасоро. Оказывается, как было показано в работе [56], оно проявляется уже в классической теории – в гамильтоновом формализме общей теории относительности, при правильном учете граничных условий на горизонте черной дыры.

Нестандартность данной задачи обнаруживает себя в ненулевых поверхностных интегралах, которые необходимо учитывать при вычислениях скобок Пуассона, реализующих алгебру Вирасоро. До сих пор основным подходом в задачах, где граничные члены, возникающие при интегрировании по частям, не обращаются в ноль и не могут быть отброшены, служил метод Редже и Тейтельбойма (1974) [1]. Этот метод возник как ответ на долго мучивший гравитационистов вопрос: обращается ли в ноль гамильтониан гравитационного поля. Однако в обсуждаемой задаче подход Редже-Тейтельбойма не позволяет достичь результата. Необходимым оказывается обобщение стандартной формулы скобок Пуассона, принятой в теории поля, путем добавления поверхностных интегралов (или, что то же самое, добавления к объемным интегралам вклада от дивергенций). Первая попытка такого обобщения была сделана в работе, посвященной задаче со свободной границей в гидродинамике идеальной жидкости [69]. Дальнейшие обобщения были предложены в работах [37, 55]. Ниже будет показано, что корректность вывода формулы энтропии черной дыры может быть достигнута в рамках подхода, использующего новую формулу для скобок Пуассона [52, 53, 54].

7.2 Обозначения и идея расчета энтропии

Мы будем использовать те же самые обозначения, которые использовались в работе [56]. Так, метрика n-мерного (в дальнейшем $n = 4$) пространства-времени будет предполагаться имеющей вид

$$ds^2 = -N^2dt^2 + f^2(dr + N^r dt)^2 + \sigma_{\alpha\beta}(dx^\alpha + N^\alpha dt)(dx^\beta + N^\beta dt),$$

где $\alpha, \beta \ldots$ соответствуют координатам на сфере $r = \mathrm{const}$, $t = \mathrm{const}$ и принимают значения $1, 2, \ldots, n-2$. Функция N стремится к нулю на горизонте черной дыры $r = r_+$ таким образом, что

$$N^2 = h(x^\alpha)(r - r_+) + O(r - r_+)^2. \tag{7.1}$$

Далее, гамильтониан имеет вид линейной комбинации связей $\{\mathcal{H}_t, \mathcal{H}_a\}$ плюс возможные поверхностные интегралы

$$H[\hat{\xi}] = \int_\Sigma d^{n-1}x\, \hat{\xi}^\mu \mathcal{H}_\mu + \oint_{\partial\Sigma} \ldots, \tag{7.2}$$

где параметры деформаций гиперповерхности одновременности (лагранжевы множители при связях) получаются как компоненты разложения инфинитезимального диффеоморфизма пространства-времени ξ^μ по базису $\{(1/N, -N^a/N), \partial/\partial x^a\}$:

$$\hat{\xi}^t = N\xi^t, \qquad \hat{\xi}^a = \xi^a + N^a\xi^t. \tag{7.3}$$

Если вычислить вариацию относительно g_{ab} и π^{ab} от той части гамильтониана, которая содержит только связи (без граничных добавок), и считать ξ^μ не зависящими от канонических переменных, то мы получим

$$\begin{aligned}\delta \int_\Sigma d^{n-1}x\, \hat{\xi}^\mu \mathcal{H}_\mu = \int_\Sigma d^{n-1}x \left(\frac{\delta H}{\delta g_{ab}} \delta g_{ab} + \frac{\delta H}{\delta \pi^{ab}} \delta \pi^{ab} \right) - \\ - \frac{1}{16\pi G} \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x\, \left\{ \sqrt{\sigma} \left(\sigma^{ac} n^b - \sigma^{ab} n^c \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\hat{\xi}^t \nabla_c \delta g_{ab} - \nabla_c \hat{\xi}^t \delta g_{ab} \right) + 2\hat{\xi}^a \delta \pi_a{}^r - \hat{\xi}^r \pi^{ab} \delta g_{ab} \right\},\end{aligned} \tag{7.4}$$

n^a – вектор единичной нормали к границе при $t = \text{const}$, K_{ab} – тензор внешней кривизны гиперповерхности одновременности, $\pi^{ab} = -f\sqrt{\sigma}(K^{ab} - g^{ab}K)$ – сопряженные к пространственной метрике g_{ab} переменные (знак отличается от [56]). Поверхностный интеграл берется по границе, которая должна включать в себя, с одной стороны, горизонт черной дыры, а с другой — пространственную бесконечность. Никаких граничных условий здесь пока еще не использовалось. С точностью до обозначений формула совпадает с аналогичной формулой из работы Редже и Тейтельбойма [1].

В дальнейшем в игру вступают граничные условия на канонические переменные и на параметры деформаций. Они выбираются так, чтобы

1. задать в фазовом пространстве область "близкую" к решению для черной дыры;

2. обеспечить сохранение этой области при эволюции, задаваемой параметрами деформаций.

Так, Карлип [56] использует следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} f = \frac{\beta h}{4\pi} N^{-1} + O(1), \qquad N^r = O(N^2), \qquad \sigma_{\alpha\beta} = O(1), \qquad N^\alpha = O(1), \\ (\partial_t - N^r\partial_r) g_{\mu\nu} = O(N) g_{\mu\nu}, \qquad \nabla_\alpha N_\beta + \nabla_\beta N_\alpha = O(N), \qquad \partial_r N = O(1/N), \\ K_{rr} = O(1/N^3), \qquad K_{\alpha r} = O(1/N), \qquad K_{\alpha\beta} = O(1), \\ \hat{\xi}^r = O(N^2), \qquad \hat{\xi}^t = O(N), \qquad \hat{\xi}^\alpha = O(1). \end{aligned}$$

Что касается части границы, расположенной на пространственной бесконечности, то считая там функции $\hat{\xi}$ быстро убывающими, мы избавляемся от ее вклада в вариацию гамильтониана.

Несмотря на принятые граничные условия, вариация гамильтониана по-прежнему будет содержать некоторый поверхностный вклад и, чтобы избавиться от него, в работе [56] предлагается добавить к линейной комбинации связей поверхностный интеграл вида

$$J[\hat{\xi}] = \frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^{n-2}x \left\{ n^a \nabla_a \hat{\xi}^t \sqrt{\sigma} + \hat{\xi}^a \pi_a{}^r + \left[n_a \hat{\xi}^a K \sqrt{\sigma} \right] \right\}. \tag{7.5}$$

Последнее слагаемое в дальнейшем не потребуется, поскольку на тензор внешней кривизны в [56] накладываются дополнительные ограничения $K_{rr} = 0 = K_{\alpha\beta}$. После этого вариация улучшенного гамильтониана принимает вид

$$\delta \left(H[\hat{\xi}] + J[\hat{\xi}] \right) = \textit{объемные члены} +$$

$$+ \frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^{n-2}x \left(\delta n^r \partial_r \hat{\xi}^t + \left[\frac{1}{f} \hat{\xi}^r \delta K_{rr} + \delta n_r \hat{\xi}^r K \right] \right) \sqrt{\sigma}. \tag{7.6}$$

Два последних слагаемых в дальнейшем не нужны.

После этого в работе [56] утверждается, что, во-первых, мы можем вычислять скобку Пуассона генераторов двух различных деформаций по формуле

$$\left\{ L[\hat{\xi}_2], L[\hat{\xi}_1] \right\} = \delta_{\hat{\xi}_2} L[\hat{\xi}_1], \tag{7.7}$$

а во-вторых, предполагается, что это равенство останется справедливым после редукции, т.е. учета связей “в сильном смысле”. Последнее означает, что формула останется справедливой для поверхностных интегралов, взятых в отдельности:

$$\textit{граничные члены из } \left\{ L[\hat{\xi}_2], L[\hat{\xi}_1] \right\} \approx \delta_{\hat{\xi}_2} \textit{граничные члены из } L[\hat{\xi}_1]. \tag{7.8}$$

В результате такого вычисления для поверхностного вклада в скобку Пуассона $\left\{ L[\hat{\xi}_2], L[\hat{\xi}_1] \right\}$ было получено выражение

$$-\frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^{n-2}x \sqrt{\sigma} \left\{ \frac{1}{f^2} \left[\partial_r (f \hat{\xi}_2^r) \partial_r \hat{\xi}_1^t - \partial_r (f \hat{\xi}_1^r) \partial_r \hat{\xi}_2^t \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{f} \partial_r \left[\hat{\xi}_1^r \partial_r \hat{\xi}_2^t - \delta_{\hat{\xi}_2} \hat{\xi}_1^t \right] \right\}. \tag{7.9}$$

которое в дальнейшем было использовано для реализации алгебры Вирасоро, центральный заряд которой позволил установить связь числа состояний на горизонте со стандартной формулой энтропии Бекенстейна-Хоукинга. В следующих параграфах этой главы мы покажем, что аргументация [56] при выводе формулы (7.9) должна быть пересмотрена. Здесь же для полноты изложения проследим вывод энтропии из (7.9).

Рассматривается черная дыра, обладающая осевой симметрией $\partial_\phi g_{\mu\nu} = 0$. Деформации гиперповерхности ограничиваются $r-t$ плоскостью. Параметр $\xi^t = \hat{\xi}^t/N$ вблизи горизонта зависит только от $t-r_\star$. На горизонте фиксирована функция смещения N. Тогда оказываются справедливы соотношения:

$$\xi^\phi = -N^\phi \xi^t = -\frac{N^\phi}{N}\hat{\xi}^t,$$

$$\partial_r \xi^t = -\frac{f}{N}\partial_t \xi^t.$$

Последнее позволяет выразить радиальные производные через производные по времени. При $N_r = 0$

$$\delta g^{tt} = 0 = \frac{2}{N^2}\left(\partial_t - N^\phi \partial_\phi\right)\xi^t + \frac{h}{N^4}\xi^r.$$

Таким образом, возникают левые $\partial_t \xi^t = \Omega \partial_\phi \xi^t$ и правые $\partial_t \tilde{\xi}^t = -\Omega \partial_\phi \tilde{\xi}^t$ моды, причем $\Omega = -N^\phi(r_+)$ — угловая скорость вращения горизонта. Тогда

$$\xi^r = -\frac{4N^2}{h}\partial_t \xi^t, \quad \tilde{\xi}^r = 0.$$

Левые моды на горизонте записываются в виде

$$\xi^t_n = \frac{T}{4\pi}\exp\left[\frac{2\pi i n}{T}\left(t - r_\star + \Omega^{-1}\phi\right)\right],$$

T – произвольный период, выпадающий из окончательного ответа. При этом алгебра деформаций приводит к соотношению

$$\{\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n\}^t = i(n-m)\hat{\xi}_{m+n}.$$

Подставляя в формулу для граничного вклада (7.9) выражения для левых мод получаем

$$\delta_{\hat{\xi}_m} L[\hat{\xi}_n] = \; + \frac{A}{8\pi G}\frac{\beta}{T} i n^3 \delta_{m+n},$$

где A – площадь границы при $r = r_+$. Поверхностные члены (7.8) принимают вид

$$\frac{A}{8\pi G}\frac{\beta}{T} i n^3 \delta_{m+n} = J[\{\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n\}] + K[\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n] =$$

$$= i(n-m)J[\hat{\xi}_{m+n}] + K[\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n].$$

Из уравнения (7.5) можно получить на решениях уравнений связи

$$J[\hat{\xi}_p] = \frac{A}{16\pi G}\frac{T}{\beta}\delta_{p0}.$$

Тогда

$$K[\hat{\xi}_m, \hat{\xi}_n] = \frac{A}{8\pi G}\frac{\beta}{T} in(n^2 - \frac{T^2}{\beta^2})\delta_{m+n}, \tag{7.10}$$

что соответствует алгебре Вирасоро с центральным зарядом

$$c = \frac{3A}{2\pi G}\frac{\beta}{T}.$$

Зависимость от n превращается в стандартную $n(n^2-1)$ после сдвига величины L_0 на постоянную. Такая замена не влияет на результат для энтропии.

Итак, получается что квантовые состояния на горизонте черной дыры преобразуются в соответствии с алгеброй Вирасоро с центральным зарядом (7.10). Тогда конформная теория поля дает плотность состояний $\rho(L_0)$, которая асимптотически ведет себя как

$$\log \rho(L_0) \equiv 2\pi\sqrt{\frac{c_{\text{eff}} L_0}{6}},$$

где c_{eff} – "эффективный центральный заряд". Если основное состояние является собственным состоянием оператора L_0 с нулевым собственным значением, то $c_{\text{eff}} = c$. Предполагая, что в квантовой гравитации эти условия выполняются, получаем

$$\log \rho(L_0) \equiv \frac{A}{4G},$$

что дает стандартный ответ для энтропии Бекенстейна-Хокинга. Дополнительный вклад правых мод в плотность состояний не влияет на энтропию, так как центральный заряд для этих мод равен нулю. Эта аргументация была представлена Карлипом в работе [56].

7.3 Метод Редже-Тейтельбойма

В работе Редже и Тейтельбойма [1], написанной в 1974 году, гамильтонов формализм теории поля был впервые применен к задаче, где поверхностные интегралы, возникающие при интегрировании по частям, не обращаются в ноль, а напротив, имеют важный физический смысл. А именно, после наложения калибровок, т.е. редукции, роль генераторов асимптотической группы Пуанкаре (преобразований, сохраняющих граничные условия асимптотически плоского пространства-времени) играют как раз поверхностные интегралы (см. главу 1). Эти поверхностные интегралы появляются в результате вычисления скобок Пуассона по известной формуле

$$\{F + \oint_{\partial\Sigma}, G + \oint_{\partial\Sigma}\}. = \int_\Sigma d^{n-1}x \left(\frac{\delta F}{\delta q_A(x)} \frac{\delta G}{\delta p_A(x)} - \frac{\delta F}{\delta p_A(x)} \frac{\delta G}{\delta q_A(x)} \right),$$

причем любое изменение функционалов F и G на поверхностные интегралы $\oint_{\partial\Sigma} \ldots$ (или, что то же самое, изменение их подинтегральных выражений на дивергенции) оставляет эту скобку без изменения. Это очевидно, ибо стандартная скобка определяется исключительно производными Эйлера-Лагранжа, а они обращаются в нуль для всех дивергенций. Обычно считается, что суть метода Редже-Тейтельбойма заключается в фиксировании поверхностных членов в функционалах (генераторах), так чтобы вариации имели вид

$$\delta F = \int_\Sigma d^{n-1}x \frac{\delta F}{\delta \phi_A(x)} \delta\phi_A(x),$$

без каких-либо граничных членов.

Однако в подходе Редже-Тейтельбойма можно начинать не с требования "дифференцируемости" функционалов, как это обычно делается, а с вычисления поверхностных интегралов в скобках Пуассона. Эта возможность была использована в нашей работе [32] (см. главу 1). При этом для

$$H[\hat{\xi}] = \int_\Sigma d^{n-1}x \, \hat{\xi}^\mu \mathcal{H}_\mu, \tag{7.11}$$

где $\{\mathcal{H}_t, \mathcal{H}_a\}$ — связи, мы получили (здесь формулы из работы [32] переписаны в обозначениях статьи [56] (при $n = 4$)) следующие скобки

Пуассона:

$$\{H[\hat{\xi}_1] + \oint_{\partial\Sigma} \ldots, H[\hat{\xi}_2] + \oint_{\partial\Sigma} \ldots\}_. = H[\hat{\xi}_3] + 2\oint_{\partial\Sigma} \hat{\xi}_3^a \pi_a{}^b dS_b +$$
$$+ \oint_{\partial\Sigma} \mathcal{H}_t(\hat{\xi}_1^t \hat{\xi}_2^a - \hat{\xi}_2^t \hat{\xi}_1^a) dS_a - \oint_{\partial\Sigma} \pi^{ab} \Big[\hat{\xi}_1^c(\hat{\xi}_{2a|b} + \hat{\xi}_{2b|a}) -$$
$$- \hat{\xi}_2^c(\hat{\xi}_{1a|b} + \hat{\xi}_{1b|a})\Big] dS_c + 2\oint_{\partial\Sigma} \sqrt{g} R^a_b \left(\hat{\xi}_1^t \hat{\xi}_2^b - \hat{\xi}_2^t \hat{\xi}_1^b\right) dS_a +$$
$$+2\oint_{\partial\Sigma} \sqrt{g}(g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd}) \left(\hat{\xi}_{1a}\hat{\xi}^t_{2|bd} - \hat{\xi}_{2a}\hat{\xi}^t_{1|bd}\right) dS_c, \tag{7.12}$$

где

$$\hat{\xi}_3 = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}_{\text{ДГ}}, \qquad dS_a = f^{-1} n_a d^{n-2}x, \tag{7.13}$$

причем, ДГ — деформации гиперповерхности одновременности:

$$\begin{aligned} \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}^t_{\text{ДГ}} &= \hat{\xi}_1^a \partial_a \hat{\xi}_2^t - \hat{\xi}_2^a \partial_a \hat{\xi}_1^t, \\ \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\}^a_{\text{ДГ}} &= \hat{\xi}_1^b \partial_b \hat{\xi}_2^a - \hat{\xi}_2^b \partial_b \hat{\xi}_1^a + g^{ab}\left(\hat{\xi}_1^t \partial_b \hat{\xi}_2^t - \hat{\xi}_2^t \partial_b \hat{\xi}_1^t\right). \end{aligned} \tag{7.14}$$

Теперь можно учесть в приведенных выше поверхностных интегралах граничные условия, использованные в работе [56]. Тогда получаем, например,

$$\begin{aligned} &2\sqrt{g}(g^{ab}g^{cd} - g^{ac}g^{bd}) \left(\hat{\xi}_{1a}\hat{\xi}^t_{2|bd} - \hat{\xi}_{2a}\hat{\xi}^t_{1|bd}\right) n_c = \\ &= 2f^2 \sqrt{\sigma}\sigma^{\alpha\beta} \left(\hat{\xi}_2^r \hat{\xi}^t_{1|\alpha\beta} - \hat{\xi}_1^r \hat{\xi}^t_{2|\alpha\beta}\right) = O(N). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Аналогично оказывается, что все подынтегральные выражения ведут себя как $O(N)$, т.е. обращаются в нуль на горизонте черной дыры. Таким образом, метод Редже-Тейтельбойма не позволяет получить формулу (13) из работы [56]. Это, впрочем, естественно, ибо условия применимости метода как раз нарушены — вариация δf, вызванная деформацией гиперповерхности не удовлетворяет поставленному Карлипом ограничению $\delta f/f = O(N)$ и имеет вид

$$\delta_{\hat{\xi}} f = \left(f\hat{\xi}^r\right)_{,r} = O(N^{-1}) \sim f,$$

вследствие этого поверхностный интеграл в формуле (10) работы [56]

$$\delta L[\hat{\xi}] = \int_\Sigma d^{n-1}x \left(\frac{\delta H}{\delta g_{ab}} \delta g_{ab} + \frac{\delta H}{\delta \pi^{ab}} \delta \pi^{ab}\right) + \frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^{n-2}x \, \delta n^r \partial_r \hat{\xi}^t \sqrt{\sigma}. \tag{7.16}$$

не обращается в нуль, что в терминологии Редже-Тейтельбойма должно квалифицироваться как "недифференцируемость" функционала $L[\hat{\xi}] = H[\hat{\xi}] + J[\hat{\xi}]$, где

$$J[\hat{\xi}] = \frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^2x \left\{ n^a \nabla_a \hat{\xi}^t \sqrt{\sigma} + \hat{\xi}^a {\pi_a}^r \right\}. \tag{7.17}$$

Здесь мы опустили член $n_a \hat{\xi}^a K \sqrt{\sigma}$, использованный в [56], поскольку в дальнейшем рассмотрении при выводе своей формулы (13) Карлип предполагает, что $K_{rr} = 0 = K_{\alpha\beta}$.

7.4 Новые скобки Пуассона

Но существует более общий подход к гамильтоновой динамике, где допускаются в принципе любые функционалы, в том числе, дающие ненулевой поверхностный вклад в первую вариацию. В работе [69] было впервые показано, что стандартная скобка Пуассона может быть обобщена путем добавления к ней дивергенций определенного вида. В результате, обобщенная таким образом скобка позволяет генерировать вариации с ненулевым поверхностным вкладом. Это как раз то, что требуется в рассматриваемом случае, когда поверхностью служит горизонт черной дыры. В главе 3 было предложено обобщение подхода [69] на случай, когда поверхностный вклад в вариацию функционала содержит произвольное конечное число производных от вариаций функций и сопряженных импульсов (а вообще говоря, вариаций произвольных неканонических переменных) [37]. Позднее появилось другое предложение [55]. Попытка сравнительного анализа сделана в работе [44] и изложена в главе 5. Однако, в нашем случае эти подходы дают один и тот же результат, не отличающийся от подхода работы [69].

Поясним подробнее. Пусть, например, полевые переменные не обязательно будут каноническими, однако, пусть их скобка Пуассона будет ультралокальной

$$\{\phi_A(x), \phi_B(y)\} = I_{AB}\delta(x, y),$$

тогда стандартная скобка для двух локальных функционалов имеет вид

$$\{F, G\} = \int_\Sigma d^{n-1}x \frac{\delta F}{\delta\phi_A(x)} I_{AB} \frac{\delta G}{\delta\phi_B(x)},$$

причем для “дифференцируемого” функционала

$$\delta F = \int_\Sigma d^{n-1}x \frac{\delta F}{\delta\phi_A(x)} \delta\phi_A(x).$$

Пусть теперь мы имеем дело с “недифференцируемым” в смысле Редже-Тейтельбойма функционалом простейшего возможного вида, так что его первая вариация содержит поверхностный интеграл

$$\delta F = \int_\Sigma \frac{\delta^\wedge F}{\delta\phi_A(x)} \delta\phi_A(x) d^{n-1}x + \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x \frac{\delta^\vee F}{\delta\phi_A(x)} \delta\phi_A(x).$$

Тогда образуем формальным путем полную вариационную производную вида

$$\frac{\delta F}{\delta\phi_A(x)} = \frac{\delta^\wedge F}{\delta\phi_A(x)} + \delta(\partial\Sigma)\frac{\delta^\vee F}{\delta\phi_A(x)},$$

которая учитывает поверхностный (или граничный) вклад (здесь $\delta(\partial\Sigma)$ — дельта-функция, сосредоточенная на границе области Σ). Мы, таким образом, считаем, что

$$\int_\Sigma d^{n-1}x \frac{\delta F}{\delta\phi_A(x)} \delta\phi_A(x) \equiv \int_\Sigma d^{n-1}x \frac{\delta^\wedge F}{\delta\phi_A(x)} \delta\phi_A(x) + \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x \frac{\delta^\vee F}{\delta\phi_A(x)} \delta\phi_A(x).$$

Тогда можно просто подставить в стандартную формулу () эти полные вариационные производные вместо привычных производных Эйлера-Лагранжа, при этом получаем

$$\{F, G\} = \{F, G\}_. + \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x \frac{\delta^\vee F}{\delta\phi_A} \delta_G\phi_A - \oint_{\partial\Sigma} d^{n-2}x \frac{\delta^\vee G}{\delta\phi_A} \delta_F\phi_A + \boxed{?},$$

где

$$\delta_F\phi_A = I_{AB}\frac{\delta^\wedge F}{\delta\phi_B} = \{\phi_A, F\}, \qquad \delta_G\phi_A = I_{AB}\frac{\delta^\wedge G}{\delta\phi_B} = \{\phi_A, G\},$$

а $\boxed{?}$ обозначает загадочный член, который соответствует квадрату δ-функции. В работе [69] его предлагалось исключить, приняв граничное условие, соответствующее обращению в ноль коэффициента при $[\delta(\partial\Sigma)]^2$:

$$\left(\frac{\delta^\vee F}{\delta\phi_A(x)} I_{AB} \frac{\delta^\vee G}{\delta\phi_B(x)}\right)_{\partial\Sigma} = 0.$$

Дальнейшие попытки обобщить результат работы [69] шли в двух направлениях:

1. поиск регулярных выражений, соответствующих членам типа $\boxed{?}$ — [37] (подход автора);
2. постулирование того, что эти члены отсутствуют в окончательном ответе — [55] (подход Беринга).

Итак, интересующий нас вклад в формулу (13) работы [56] возникает как раз из-за “недифференцируемости” функционала $L[\hat{\xi}]$

$$\delta L[\hat{\xi}] = \int_\Sigma d^{n-1}x \left(\frac{\delta H}{\delta g_{ab}} \delta g_{ab} + \frac{\delta H}{\delta \pi^{ab}} \delta \pi^{ab}\right) - \frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^2x \sqrt{\sigma} \frac{\delta f}{f^2} \hat{\xi}^t_{,r} \neq 0.$$

Вариация $\delta_{\hat{\xi}} f$ определяется просто из уравнений движения с гамильтонианом $L[\hat{\xi}]$

$$\delta_{\hat{\xi}} f = \{f, L[\hat{\xi}]\} = \dot{\sqrt{g_{rr}}} = \frac{\hat{\xi}_{r|r}}{f} = f\left(\hat{\xi}^r_{,r} + \Gamma^r_{rr}\hat{\xi}^r\right) = \left(f\hat{\xi}^r\right)_{,r}. \tag{7.18}$$

Таким образом, в скобке Пуассона $\{L[\hat{\xi}_1], L[\hat{\xi}_2]\}$ появляется первый поверхностный член из формулы (7.9)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^2x \frac{\sqrt{\sigma}}{f^2} \left[\delta_{\hat{\xi}_2} f \hat{\xi}^t_{1,r} - \delta_{\hat{\xi}_1} f \hat{\xi}^t_{2,r}\right] = \\ = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^2x \frac{\sqrt{\sigma}}{f^2} \left[\left(f\hat{\xi}^r_2\right)_{,r} \hat{\xi}^t_{1,r} - \left(f\hat{\xi}^r_1\right)_{,r} \hat{\xi}^t_{2,r}\right]. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Происхождение второго члена из формулы (7.9)

$$-\frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^2x \frac{\sqrt{\sigma}}{f} \partial_r \left[\delta_{\hat{\xi}_1} \hat{\xi}^t_2 - \delta_{\hat{\xi}_2} \hat{\xi}^t_1\right] = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{r=r_+} d^2x \frac{\sqrt{\sigma}}{f} \partial_r \left[\hat{\xi}^r_1 \partial_r \hat{\xi}^t_2 - \hat{\xi}^r_2 \partial_r \hat{\xi}^t_1\right], \tag{7.20}$$

связано с тем, что параметры деформаций $\hat{\xi}^t$ сами зависят от канонических переменных и поэтому имеют ненулевые скобки Пуассона. Там где эти параметры входят в виде множителей при связях, результатом будет просто изменение коэффициентов при связях в ответе, что для нас несущественно, так как мы ищем ответ на поверхности связей. Но там, где параметры деформаций $\hat{\xi}^t$ появляются в ненулевых поверхностных интегралах, их вариации $\delta_{\hat{\xi}_2}\hat{\xi}_1^t = \hat{\xi}_2^a \partial_a \hat{\xi}_1^t$ дадут отличный от нуля вклад в скобку Пуассона.

7.5 Выводы

В работе [56] был получен результат, имеющий важное значение для понимания физики черных дыр, а именно, формула, дающая значение энтропии с помощью вычисления числа степеней свободы конформной теории, возникающей для возмущений метрики на горизонте. Аналогичные выводы следуют и из ряда других работ, см. например [120]. Особенностью подхода [56] является то, что здесь используется канонический формализм ОТО и алгебра деформаций гиперповерхности. Алгебра Вирасоро с ее центральным зарядом появляется как результат вычисления скобок Пуассона и учета граничных условий на горизонте черной дыры.

Автор работы [56] утверждал, что использует подход Редже-Тейтельбойма [1] который основан на построении так называемых "дифференцируемых" генераторов. Однако, внимательное рассмотрение показывает, что в данном случае этот подход неприменим. Генераторы в работе [56] на самом деле не являются "дифференцируемыми" функционалами относительно вариаций, которые нужны при выводе алгебры Вирасоро. Действительно, прямое и непосредственное вычисление скобок Пуассона по стандартной формуле, с использованием общего вывода поверхностных членов, сделанного для случая $3+1$ пространства-времени еще в 1985 году [32], см. главу 1, дает тривиальный нулевой ответ для того поверхностного интеграла, который как раз и должен представлять собой главный результат статьи [56].

Мы показали, что в действительности в работе [56] используются (без ведома ее автора) модифицированные скобки Пуассона, применимые и в случае "недифференцируемых" функционалов. Эти скобки отличаются от стандартных поверхностными членами и, по-видимому, впервые были использованы в работе [69], а затем обобщены двумя различными способами [37, 55]. В данном случае различие между этими подходами не проявляется. Недавно эти скобки были независимо использованы также в работе [119].

Таким образом, вывод [56] формально сохраняет силу, если изменить аргументацию. Необходимо отказаться от подхода Редже-Тейтельбойма в пользу более общего подхода, использующего новые скобки Пуассона, введенные в главе 3.

Изложение материала в этой главе основано на работах [52, 53, 54]. Вслед за нами аргументы Карлипа были также подвергнуты критике в статье [119]. Карлип признал критику справедливой [130] и пересмотрел свои вычисления в новой статье [131], где использовал другое определение скобки Пуассона и измененные граничные условия. Интерес к вычислениям энтропии черной дыры с помощью центральных расширений алгебр, возникающих уже в классической теории из скобок Пуассона, остается значительным, см. например работы [132].

Глава 8

Гидродинамика идеальной жидкости со свободной поверхностью

8.1 Постановка задачи

В предыдущих главах, основываясь на работах [37, 38], мы построили достаточно общий гамильтонов формализм теории поля, не требующий отбрасывания граничных членов при интегрировании по частям. Целью этой главы является применение построенного формализма к одной конкретной задаче — описанию динамики идеальной сжимаемой жидкости с целью выяснить роль, которую играют граничные условия при определении класса допустимых функционалов. Новым общим результатом по сравнению, например, с подходом, предложенным Редже и Тейтельбоймом [1] и являющимся в настоящее время общепринятым (см., например, [61]), является то, что для неультралокальных скобок Пуассона этот класс может отличаться от класса "дифференцируемых" функционалов. Весьма краткое и предварительное изложение этих результатов впервые появилось в работе [42], где были рассмотрены два примера: формализм Аштекара в канонической гравитации и гидродинамика идеальной жидкости. Первый из примеров был детально рассмотрен в главе 6. Здесь, на основе работы [39], будет подробно разобран второй пример.

Напомним сначала историю применения гамильтонова подхода к изучению поверхностных волн в идеальной (невязкой) жидкости. В 1967 г. Захаров [66] впервые предложил использовать канонический формализм для анализа волн на поверхности несжимаемой жидкости в случае ее потенциального течения. Позднее, в 1977 г., эта проблема обсуждалась также Миллсом [67] и Майлдером [68]. В 1986 г. Марсден и его соавторы [69] предложили свой подход к более общей задаче, когда течение несжимаемой жидкости уже не предполагалось потенциальным. В 1988 г. Абарбанел и др. [70] рассмотрели случай сжимаемой жидкости. Подходы этих авторов довольно сильно отличаются друг от друга. Было бы интересно воспроизвести результаты всех этих работ на основе формализма, изложенного в главах 3,4. Здесь мы, однако, ограничимся случаем сжимаемой жидкости.

Итак, основным объектом изучения будет динамика сжимаемой невязкой жидкости в эйлеровых координатах, а основным методом — гамильтонов формализм, сохраняющий все граничные члены. Для полноты картины напомним связи, существующие между четырьмя возможными способами описания гидродинамики: вариационным принципом и гамильтоновым формализмом, в лагранжевых и в эйлеровых координатах. Наглядно эти связи могут быть представлены коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & \longrightarrow & \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ & \xrightarrow{+} & \end{array} \tag{8.1}$$

Наше изложение является новым в части, относящейся к граничным членам. Как уже отмечалось ранее [70], здесь редукция гамильтонова формализма от лагранжевых координат к эйлеровым, проведенная в работе [69], нуждается в небольшой модификации.

Мы последовательно рассмотрим каждый из четырех блоков представленной выше коммутативной диаграммы и каждый из четырех переходов между ними. Во всех случаях будет обсуждаться как фиксированная граница области, так и свободная.

Параграф 1 посвящается вариационному принципу в лагранжевых координатах. Лагранжев подход наиболее близок к механическому описанию жидкости как совокупности материальных точек. Основными переменными при этом служат координаты точечных частиц. Однако необходимо дополнить потенциальную энергию частиц во внешнем поле (в нашем примере, в поле ньютонова гравитационного потенциала) внутренней энергией жидкости, которая предполагается зависящей от плотности и энтропии. Таким образом, в игру вступает термодинамика, и появляются новые переменные: температура и давление.

При рассмотрении случая свободной границы мы воспользуемся подходом, впервые предложенным в работе [70], который позволяет удобным для последующего перехода к гамильтонову формализму образом включить в действие энергию сил поверхностного натяжения.

В параграфе 2 описывается переход от лагранжева к гамильтонову формализму в лагранжевых переменных. В данном случае этот переход не вызывает больших затруднений, он сводится к нахождению канонически сопряженных к координатам частиц жидкости импульсов и преобразованию Лежандра.

В случае свободной границы здесь при выводе гамильтоновых уравнений движения не требуется выходить за рамки критерия Редже-Тейтельбойма. Это объясняется тем, что скобки Пуассона канонические, а значит, ультралокальные.

Параграф 3 посвящен переходу от лагранжевых координат к эйлеровым в рамках гамильтонова формализма. Эйлерово описание, в отличие от лагранжева, больше напоминает теорию поля, чем механику. Нетривиальность задачи перехода к новым переменным проявляется в том, что при этом преобразовании смешиваются “зависимые” (поля) и “независимые” (координаты) переменные. Формальные манипуляции производятся при помощи δ-функций, что в случае свободной границы никак нельзя считать строгим выводом, результаты, однако, в дальнейшем оправдываются их самосогласованностью. В случае фиксированной границы мы приводим строгие вычисления, основанные на методах главы 4, явно демонстрирующие выполнение тождества Якоби. Выполнение тождества Якоби здесь не является банальностью, на что обращалось внимание в работе [69]. Для свободной границы нам пока не удалось найти столь же простого доказательства тождества Якоби. Но формализм позволяет получить гамильтоновы уравнения (гамильтоново векторное поле) путем операции внутреннего умножения 1-формы (вариации гамильтониана) на бивектор, задающий скобку Пуассона. Первоначально в гамильтоновом векторном поле имеется сингулярный вклад, пропорциональный граничной δ-функции. Требование регулярности, т.е. обращения в ноль этого вклада, оказывается равносильным граничному условию задачи.

В параграфе 4 строится вариационный принцип для эйлеровых переменных. Для фиксированной границы интересное обсуждение этой проблемы имеется в книге Купершмидта [71]. В результате добавления в лагранжиан связей появляются переменные Клебша, которые в следующем параграфе становятся каноническими переменными гамильтонова формализма.

При рассмотрении задачи со свободной границей к действию добавляется (со знаком минус) вклад поверхностной энергии. Для того, чтобы из действия получались при варьировании правильные граничные условия, требуется дополнительно изменить его на новый поверхностный член. После этого оказывается, что плотность лагранжиана совпадает с давлением жидкости. В частном случае двумерного потенциального течения несжимаемой жидкости без поверхностного натяжения тот факт, что из действия следуют динамические граничные условия, был отмечен Люком [72]. Независимо Захаров [66] показал, что граничные условия являются гамильтоновыми уравнениями.

Параграф 5 посвящен переходу от вариационного принципа к гамильтонову формализму на языке эйлеровых переменных. При работе с фиксированной границей переменные Клебша оказываются каноническими. Мы используем здесь метод Фаддеева-Джэкива [73], т.е. просто вычисляем матрицу, обратную к матрице симплектической формы, не обращаясь к "первичным связям" Дирака [12]. Из потенциалов Клебша легко строятся стандартные импульсы эйлерова подхода, скобки Пуассона между которыми представляют алгебру диффеоморфизмов. Гамильтониан выражается через эти переменные и малую толику переменных Клебша — плотность и энтропию, в результате замыкая нашу диаграмму.

В случае свободной поверхности добавляется новая функция, описывающая положение границы, после чего переменные уже не являются каноническими. На этот раз мы пользуемся методом Дирака для работы со связями и строим скобки Дирака, которые затем используем для записи пуассонова бивектора. Этот бивектор, в отличие от построенного в параграфе 3, записывается в других переменных. Однако, воспользовавшись им для нахождения гамильтонова векторного поля, т.е. для вывода гамильтоновых уравнений, мы вновь приходим к тому же самому результату, что и в параграфе 3. Таким образом, и в случае свободной границы диаграмма замыкается.

Следует отметить, что недавно Берингом была предложена еще одна формула [55] для скобки Пуассона, точно удовлетворяющей тождеству Якоби, рассмотренная в главе 5. Однако построение пока является недостаточно общим для того, чтобы включить в рассмотрение неультралокальные скобки, и поэтому не может быть применено к обсуждаемой в этой главе задаче.

8.2 Вариационный принцип в лагранжевых переменных

Описание динамики среды в лагранжевых координатах означает, что прослеживается движение ее отдельных частиц. Это позволяет вывести уравнения движения среды из уравнений движения материальных точек — ее составляющих. Добавляются также термодинамические характеристики: внутренняя энергия, температура, давление, энтропия и др. Нумерация частиц среды может быть произведена, например, с помощью фиксации их начальных положений. Пусть движение происходит в некоторой (фиксированной или меняющейся со временем) области Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, и пусть $\mathbf{r} \in \Omega_0$ есть "номер" частицы, а $\mathbf{Y}(t)$ — ее положение в произвольный момент времени t. Для простоты изложения мы ограничимся использованием декартовых координат. Тогда закон движения определяется функцией

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{r}, t), \qquad \mathbf{r} \equiv \mathbf{Y}(\mathbf{r}, 0).$$

Детерминизм классической механики позволяет быть уверенным в существовании обратной функции

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{x}, t), \quad \text{так что} \quad \mathbf{r} \equiv \mathbf{R}(\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t), t).$$

8.2.1 Фиксированная граница

Естественно ожидать, что лагранжиан среды выражается интегралом по области Ω_0 от разности плотностей кинетической и потенциальной энергий (с добавлением к последней внутренней энергии):

$$L = \int\limits_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{r}) \left[\frac{\dot{\mathbf{Y}}^2}{2} - \Phi(\mathbf{Y}) - \varepsilon\left(\rho(\mathbf{Y}), s_0(\mathbf{r})\right) \right] d\mathbf{r}, \tag{8.2}$$

где $\dot{\mathbf{Y}} = \partial \mathbf{Y}/\partial t(\mathbf{r}, t)$; $\Phi(\mathbf{Y})$ и $\varepsilon(\rho, s_0)$ — соответственно, потенциальная и внутренняя энергия, приходящиеся на единицу массы, внутренняя энергия задана как функция плотности массы $\rho(\mathbf{Y})$ и удельной энтропии $s_0(\mathbf{r})$, $\rho_0(\mathbf{r})$ — плотность массы в начальный момент времени $t = 0$. Удобно ввести матрицы перехода

$$J_{ij} = \frac{\partial Y^i}{\partial r^j}, \qquad J^{ij} = \frac{\partial r^i}{\partial Y^j}. \tag{8.3}$$

При этом пусть $J = \det|J_{ij}|$. Очевидно,

$$J_{ij}J^{jk} = \delta_i^k.$$

В силу сохранения массы

$$\rho_0(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \rho(\mathbf{Y})d\mathbf{Y}, \qquad \text{следовательно}, \qquad \rho_0 = \rho J.$$

Энтропия же предполагается присущей каждой частице в отдельности и аддитивной, причем

$$s_0(\mathbf{r}) = s(\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t), t).$$

Дополнительную информацию вносит первое начало термодинамики

$$\delta\varepsilon = T ds_0 - p d\frac{1}{\rho},$$

где T — абсолютная температура; p — давление; таким образом,

$$T = \frac{\partial \varepsilon}{\partial s_0}, \qquad p = \rho^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}.$$

Варьирование действия как функционала от $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{r}) \left[\dot{\mathbf{Y}} \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Y}} \delta \mathbf{Y} - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \delta \rho \right] d\mathbf{r},$$

с учетом формулы

$$\delta\rho = \delta\left(\frac{\rho_0}{J}\right) = -\frac{\rho_0}{J^2}\delta J,$$

и, следовательно, соотношения

$$-\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \delta \rho = p \delta J,$$

ведет к уравнениям движения. Поскольку вариация якобиана определяется формулой

$$\delta J = J J^{ji} \delta J_{ij} = J J^{ji} \frac{\partial}{\partial r^j} \delta Y^i,$$

получаем

$$p \delta J = \frac{\partial}{\partial r^j} \left(p J J^{ji} \delta Y^i \right) - J J^{ji} \frac{\partial p}{\partial r^j} \delta Y^i - p \frac{\partial}{\partial r^j} \left(J J^{ji} \right) \delta Y^i.$$

В Приложении к этой главе показано, что последнее слагаемое обращается в ноль. Учитывая, что

$$\frac{\partial p}{\partial Y^i} = \frac{\partial p}{\partial r^j} \frac{\partial r^j}{\partial Y^i} = J^{ji} \frac{\partial p}{\partial r^j},$$

мы приходим к следующему выражению для вариации действия:

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} L dt = \int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r} \rho_0 \dot{\mathbf{Y}} \delta \mathbf{Y} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega_0} \delta \mathbf{Y} \left[-\rho_0 \ddot{\mathbf{Y}} - \rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Y}} - J \frac{\partial p}{\partial \mathbf{Y}} \right] d\mathbf{r} +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \oint\limits_{\partial \Omega_0} p J J^{ji} \delta Y^i dS_j. \tag{8.4}$$

Вариационный принцип Гамильтона требует фиксации варьируемой функции на границах временно́го интервала

$$\delta \mathbf{Y}(t_1) = \delta \mathbf{Y}(t_2) = 0.$$

Член, содержащий вариацию $\delta \mathbf{Y}$ на пространственной границе $\partial \Omega_0$, обращается в ноль в силу условий, обеспечивающих неподвижность границы области $\Omega = \Omega_0$

$$n_j J^{ji} \delta Y^i \big|_{\partial \Omega_0} = 0, \qquad \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{Y} \big|_{\partial \Omega} = 0, \tag{8.5}$$

где n^j — вектор нормали к $\partial \Omega_0$ (для определенности, в дальнейшем — единичной внешней нормали), которая предполагается гладкой, соответственно, $\mathbf{n}$ — тот же вектор в координатах $\mathbf{Y}$.

Смысл этих граничных условий в том, что частицы, которые в начальный момент времени были на границе области, останутся на ней навсегда.

Требование обращения в нуль объемного интеграла в вариации действия приводит к уравнениям Лагранжа, записанным в лагранжевых координатах

$$\ddot{\mathbf{Y}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Y}} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \mathbf{Y}}, \qquad \ddot{Y}^i = -JJ^{ji}\frac{\partial \Phi}{\partial r^j} - \frac{JJ^{ji}}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r^j}. \tag{8.6}$$

8.2.2 Свободная граница

Предположим теперь, что граница жидкости или какая-либо ее часть является свободной. Тогда положение границы области $\partial\Omega = \partial\Omega_t$ должно быть описано динамическими переменными. В эйлеровом подходе это потребует введения новой независимой функции, а здесь оказывается достаточным использование той же самой переменной $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$, вариация которой на границе теперь не будет связана условием (8.5). Кроме того, в действии могут появиться новые члены, задаваемые граничными интегралами, например, энергия поверхностного натяжения жидкости

$$L \to L - E_{.},$$

которая с точностью до постоянной определяется формулой

$$E_{.} = \tau \int\limits_{\partial\Omega_t} dS = \tau \int\limits_{\partial\Omega_t} n^i dS_i = \tau \int\limits_{\Omega_t} \nabla \cdot \mathbf{n} d\mathbf{Y}, \tag{8.7}$$

где n^i — вектор единичной внешней нормали на границе области, гладко продолженный на всю область. Рассмотрение таких задач можно проводить на основе предложенного в главах 3,4 формализма, который, однако, должен быть несколько обобщен. Введем функцию $P_\Omega(\mathbf{Y})$, которая положительна всюду внутри области Ω, равна нулю на границе $\partial\Omega$ и отрицательна снаружи. Тогда мы можем формально представить интеграл по области Ω как интеграл по всему пространству $\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_{\Omega} f d\mathbf{Y} = \int \theta(P_\Omega) f d\mathbf{Y}. \tag{8.8}$$

Требуемое обобщение состоит в том, что в предыдущих главах мы не рассматривали P_Ω как варьируемую величину, теперь это необходимо делать. В предположении что $\nabla P_\Omega \neq 0$ на $\partial\Omega$, вектор единичной внешней нормали к граничной поверхности представляется формулой

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla P_\Omega}{|\nabla P_\Omega|}.$$

Поверхностная энергия жидкости (8.7) тогда может быть записана в виде

$$E_. = \tau \int \theta(P_\Omega)\nabla \cdot \mathbf{n} d\mathbf{Y} = -\tau \int (\nabla\theta \cdot \mathbf{n})\, d\mathbf{Y}.$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial\theta(P_\Omega)}{\partial Y^i} = \frac{d\theta(P_\Omega)}{dP_\Omega}\frac{\partial P_\Omega}{\partial Y^i}, \qquad \frac{d\theta(P_\Omega)}{dP_\Omega} = \left(\nabla\theta(P_\Omega) \cdot \frac{\nabla P_\Omega}{|\nabla P_\Omega|^2}\right), \tag{8.9}$$

т.е.

$$E_. = \tau \int \frac{d\theta(P_\Omega)}{dP_\Omega}|\nabla P_\Omega| d\mathbf{Y}.$$

Введем обозначение

$$K = \nabla \cdot \mathbf{n}.$$

Нетрудно убедиться, что на границе K является следом второй фундаментальной формы граничной поверхности. Тогда

$$E_. = \tau \int\limits_{\Omega_t} K d\mathbf{Y} = \tau \int \theta(P_\Omega) K d\mathbf{Y}.$$

Для получения естественного граничного условия нам необходимо найти вариацию этого выражения при варьировании функции $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$. Рассмотрим сначала вариацию поверхностной энергии по функции P_Ω:

$$\delta E_. = \tau \int \frac{d\theta(P_\Omega)}{dP_\Omega}\delta P_\Omega K d\mathbf{Y} + \tau \int \theta(P_\Omega)\delta K d\mathbf{Y}.$$

Покажем, что второе слагаемое обращается в нуль (опуская $d\mathbf{Y}$ в интегралах):

$$\int \theta(P_\Omega)\delta K = \int \theta(P_\Omega)\delta\nabla \cdot \mathbf{n} = -\int \nabla\theta(P_\Omega)\delta\mathbf{n} =$$
$$= -\int \frac{d\theta}{dP_\Omega}|\nabla P_\Omega|\,(\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{n}) = 0, \tag{8.10}$$

так как вклад в интеграл дает только граница $\partial\Omega$, а на границе вариация единичной нормали ортогональна самой нормали. Таким образом,

$$\delta E_{.} = \tau \int \frac{d\theta}{dP_\Omega} K \delta P_\Omega d\mathbf{Y}.$$

Эта формула в ее непосредственном виде понадобится нам позже при рассмотрении задачи в эйлеровых координатах. Здесь же мы должны искать вариацию $\delta E_{.}$ по отношению к $\delta \mathbf{Y}$, так как P_Ω не является независимой переменной при использовании лагранжевых переменных. Дело в том, что область изменения координат $\mathbf{r}$, а именно, Ω_0, не изменяется даже в случае изменяющейся области Ω.

Вместо функции $P_\Omega(\mathbf{Y}, t)$, соответствующей области Ω, для области Ω_0 можно использовать функцию

$$P_{\Omega_0}(\mathbf{r}) = P_\Omega(\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t), t),$$

или

$$P_\Omega(\mathbf{x}, t) = P_{\Omega_0}(\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)).$$

Функция $P_{\Omega_0}(\mathbf{r})$ не подлежит варьированию так же, как и функции $\rho_0(\mathbf{r})$ и $s_0(\mathbf{r})$. Итак, следует принять во внимание соотношение

$$\delta P_\Omega = \frac{\partial P_\Omega}{\partial \mathbf{Y}} \delta \mathbf{Y} = \frac{\partial P_{\Omega_0}}{\partial r^j} J^{ji} \delta Y^i.$$

Тогда

$$\delta E_{.} = \tau \int \frac{d\theta}{dP_\Omega} \frac{\partial P_\Omega}{\partial Y_i} K \delta Y^i d\mathbf{Y},$$

или, учитывая (8.9),

$$\delta E_{.} = \tau \int \theta_{,j} K J J^{ji} \delta Y^i d\mathbf{r} = -\tau \int\limits_{\Omega_0} \partial_j (K J J^{ji} \delta Y^i) d\mathbf{r}.$$

Этот член вместе с поверхностным членом, содержащимся в формуле (8.4), дает нам полный поверхностный вклад в вариацию действия в случае свободной границы:

$$(\delta S)_{.} = \int\limits_{t_1}^{t^2} dt \int\limits_{\Omega_0} \partial_j \left((p - \tau K) J J^{ji} \delta Y^i \right) d\mathbf{r} = \int\limits_{t_1}^{t^2} dt \oint\limits_{\partial\Omega_0} (p - \tau K) J J^{ji} \delta Y^i dS_j.$$

Вариационный принцип Гамильтона требует обращения этого выражения в ноль, а так как вариация $\delta\mathbf{Y}$ здесь произвольна, мы получаем так называемые естественные граничные условия [2, 77]:

$$(p - \tau K)\big|_{\partial\Omega_0} = 0. \tag{8.11}$$

Поскольку граница переходит в границу при замене переменных $\mathbf{r} \to \mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$, последнее равенство можно переписать в стандартном виде [78]:

$$(p - \tau K)\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8.12}$$

8.3 Гамильтонов формализм в лагранжевых переменных

8.3.1 Фиксированная граница

Из формулы для вариации действия (8.4) очевидно определение импульсов, канонически сопряженных к переменным $\mathbf{Y}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r})\dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{r}, t), \qquad \{Y^i(\mathbf{r}, t), M_j(\mathbf{r}', t)\} = \delta^i_j \delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Стандартное преобразование Лежандра лагранжиана (8.2) приводит к гамильтониану

$$\mathrm{H} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\mathbf{M}^2}{2\rho_0} + \rho_0 \Phi(\mathbf{Y}) + \rho_0 \varepsilon(\rho(\mathbf{Y}), s_0) \right) d\mathbf{r}. \tag{8.13}$$

В вариации гамильтониана

$$\delta\mathrm{H} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\delta\mathbf{M} \left[\frac{\mathbf{M}}{\rho_0} \right] + \delta\mathbf{Y} \left[\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Y}} + J \frac{\partial p}{\partial \mathbf{Y}} \right] \right) d\mathbf{r} - \int\limits_{\partial\Omega_0} p J J^{ji} \delta Y^i dS_j$$

при граничных условиях (8.5) последнее слагаемое обращается в ноль, что позволяет называть вариационными производными выражения, стоящие в квадратных скобках, и гамильтоновы уравнения имеют привычный вид

$$\dot{\mathbf{Y}} = \{\mathbf{Y}, \mathrm{H}\} = \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \mathbf{M}}, \qquad \dot{\mathbf{M}} = \{\mathbf{M}, \mathrm{H}\} = -\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \mathbf{Y}}, \tag{8.14}$$

т.е.

$$\dot{\mathbf{Y}} = \frac{\mathbf{M}}{\rho_0}, \qquad \dot{\mathbf{M}} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Y}} - J \frac{\partial p}{\partial \mathbf{Y}}. \tag{8.15}$$

Эквивалентность этих уравнений лагранжевым (8.6) очевидна. (8.6). Что касается тождества Якоби, то, как было несколькими способами показано нами в главах 3,4, каноническая скобка Пуассона, поверхностные члены в которой получены на основе [37, 38], удовлетворяет ему независимо от граничных условий.

8.3.2 Свободная граница

Дополним гамильтониан (8.13) поверхностной энергией

$$\mathrm{H} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\frac{\mathbf{M}^2}{2\rho_0} + \rho_0 \Phi(\mathbf{Y}) + \rho_0 \varepsilon\left(\rho(\mathbf{Y}), s_0\right) \right) d\mathbf{r} + \tau \int\limits_{\partial\Omega} n^i dS_i.$$

Его вариация имеет вид

$$\delta \mathrm{H} = \int\limits_{\Omega_0} \left(\delta \mathbf{M} \left[\frac{\mathbf{M}}{\rho_0} \right] + \delta \mathbf{Y} \left[\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{Y}} + J \frac{\partial p}{\partial \mathbf{Y}} \right] \right) d\mathbf{r} - \int\limits_{\partial\Omega_0} (p - \tau K) J J^{ji} \delta Y^i dS_j,$$

причем вариация $\delta\mathbf{Y}$ свободна на границе. Отсюда находим полные вариационные производные

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta Y^i} &= \theta(P_{\Omega_0}) \left[\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial Y^i} + J \frac{\partial p}{\partial Y^i} \right] + \frac{\partial \theta(P_{\Omega_0})}{\partial r^i} \left[p - \tau K \right], \\ \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta M^i} &= \theta(P_{\Omega_0}) \left[\frac{M^i}{\rho_0} \right]. \end{aligned}$$

Гамильтоново векторное поле и уравнения движения формально сохраняют тот же вид, что и в случае фиксированной границы (8.14). Однако в них присутствует сингулярный вклад, пропорциональный δ-функции. Требование исчезновения этого вклада ведет к стандартным граничным условиям (8.11). В данном случае, когда скобка Пуассона является канонической и, следовательно, ультралокальной,

$$\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\} = -\mathsf{dF} \lrcorner \, \mathsf{dG} \lrcorner \, \Psi = \int \left(\frac{\delta \mathrm{F}}{\delta Y^i} \frac{\delta \mathrm{G}}{\delta M_i} - \frac{\delta \mathrm{G}}{\delta Y^i} \frac{\delta \mathrm{F}}{\delta M_i} \right) d\mathbf{r},$$

это требование эквивалентно обращению в ноль поверхностного члена в вариации гамильтониана, т.е. требованию его "дифференцируемости" по Редже и Тейтельбойму [1]. Ниже мы убедимся, что для неультралокальных скобок Пуассона эти два условия не являются равносильными. Относительно тождества Якоби остается в силе аргументация, приведенная выше в случае фиксированной границы, поскольку граница области $\partial\Omega_0$ не является динамической.

Отметим, что и в работе [69], и в нашей работе [37], именно возможность присутствия ненулевых поверхностных членов в вариации гамильтониана для несжимаемой жидкости послужила стимулом к модификации стандартной формулы для скобок Пуассона. Однако в публикации [70] было справедливо отмечено, что как раз этот поверхностный вклад должен исчезать вследствие граничных условий. Подобные вклады, как мы увидим ниже, играют роль лишь в более сложных случаях, когда скобки Пуассона неультралокальны.

8.4 Гамильтонов формализм в эйлеровых переменных

8.4.1 Фиксированная граница

Переход от лагранжева описания к эйлерову в гамильтоновом формализме представляет собой замену переменных более общего типа, чем те, которые обычно встречаются в теории поля. Отчасти подобная замена напоминает преобразования общей теории относительности, когда координаты начинают зависеть от метрики (c-числа начинают зависеть от q-чисел в квантовой теории)

$$M_i(\mathbf{r},t)d\mathbf{r} = \pi_i\left(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t),t\right)d\mathbf{Y},$$

или

$$\pi_i(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\Omega_0} \delta\left(\mathbf{x}-\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)\right)M_i(\mathbf{r},t)d\mathbf{r}.$$

Аналогичные формулы связывают плотности массы в двух подходах

$$\rho_0(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \rho\left(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t),t\right)d\mathbf{Y}, \qquad \rho(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\Omega_0} \delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{Y}(\mathbf{r},t)\right)\rho_0(\mathbf{r})d\mathbf{r},$$

а формулы для энтропии отличаются, поскольку эта величина является скаляром, а не скалярной плотностью

$$s(\mathbf{x},t) = s_0\left(\mathbf{R}(\mathbf{x},t)\right), \qquad s(\mathbf{x},t) = \int\limits_{\Omega_0} \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\mathbf{x},t)\right)s_0(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \tag{8.16}$$

Здесь

$$\mathbf{R}\left(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t),t\right) \equiv \mathbf{r}, \qquad \mathbf{Y}\left(\mathbf{R}(\mathbf{x},t),t\right) \equiv \mathbf{x}.$$

Если переменные импульсов $M_i(\mathbf{r},t)$ заменяются в эйлеровом подходе равным числом степеней свободы $\pi_i(\mathbf{x},t)$, то место координат $Y^i(\mathbf{r},t)$ занимают новые переменные $\rho(\mathbf{x},t)$, $s(\mathbf{x},t)$, число которых, вообще говоря, отличается от размерности пространства. Мы увидим, кроме того, что скобки Пуассона даже для "новых импульсов" π_i будут отличны от канонических.

Для вычисления скобок Пуассона между новыми переменными удобно перейти к линейным функционалам, например,

$$\pi(\lambda) = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\lambda^i(\mathbf{x})\pi_i(\mathbf{x}) = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}\int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\lambda^i(\mathbf{x})\delta\left(\mathbf{x} - \mathbf{Y}(\mathbf{r},t)\right)M_i(\mathbf{r},t) =$$

$$= \int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\lambda^i\left(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)\right)M_i(\mathbf{r},t).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\{\pi(\lambda),\pi(\mu)\} &= \int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}'\{\lambda^i(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t))M_i(\mathbf{r},t),\mu^j(\mathbf{Y}(\mathbf{r}',t))M_j(\mathbf{r}',t)\} = \\
&= \int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}\int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}'\left(\{\lambda^i(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t)),M_j(\mathbf{r}',t)\}M_i(\mathbf{r},t)\mu^j(\mathbf{Y}(\mathbf{r}',t)) + \right.\\
&+ \left.\{M_i(\mathbf{r},t),\mu^j(\mathbf{Y}(\mathbf{r}',t))\}\lambda^i(\mathbf{Y}(\mathbf{r},t))M_j(\mathbf{r}',t)\right) = \\
&= -\int\limits_{\Omega_0} d\mathbf{r}[\lambda,\mu]^i M_i = -\int\limits_{\Omega} d\mathbf{x}[\lambda,\mu]^i\pi_i = -\pi([\lambda,\mu]),
\end{aligned} \tag{8.17}$$

где

$$[\lambda,\mu]^i = \lambda^j\mu^i_{,j} - \mu^j\lambda^i_{,j}.$$

Аналогичным образом получаем соотношение

$$\{\rho(\lambda), \pi(\mu)\} = \rho(\mu^i \lambda_{,i}). \tag{8.18}$$

Используя полученные в главах 3,4 правила, мы приходим к выводу, что на локальном языке равенства (8.17), (8.18) означают

$$\begin{aligned} \{\pi_i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{x}')\} &= \pi_i(\mathbf{x}')\delta_{,j}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) - \pi_j(\mathbf{x})\delta_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), & (8.19)\\ \{\rho(\mathbf{x}), \pi_i(\mathbf{x}')\} &= \rho(\mathbf{x}')\delta_{,i}(\mathbf{x}', \mathbf{x}). & (8.20) \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что полученные скобки соответствуют обычной реализации алгебры диффеоморфизмов, генераторами которой являются переменные $\pi_i(\mathbf{x})$.

Скобка для $\rho(\mathbf{x})$ соответствует закону преобразования скалярной плотности. В отличие от $\rho(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$ преобразуется как скаляр, что означает

$$\{s(\mathbf{x}), \pi(\mathbf{x}')\} = -s_{,i}\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \tag{8.21}$$

Очевидно, что остальные скобки обращаются в ноль.

Скобки Пуассона для произвольных локальных функционалов от переменных $\pi_i(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$ с учетом всех граничных членов могут быть построены с помощью определенных на основе нашего формализма в главе 4 пуассонова бивектора, операций внутреннего умножения и дифференциала (полной вариации локального функционала):

$$\{\mathrm{F}, \mathrm{G}\} = -\mathsf{d}\mathrm{F} \lrcorner \mathsf{d}\mathrm{G} \lrcorner \Psi.$$

Например, в простейшем случае, когда граница области Ω неподвижна, и когда присутствует только зависимость от самих функций $\pi_i(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$, $s(\mathbf{x})$, но не от их пространственных производных, получаем

$$\{F, G\} = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x} \left[\rho\left(\partial_i\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)\frac{\partial g}{\partial \pi_i} - \partial_i\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}\right)\frac{\partial f}{\partial \pi_i}\right) - \right.$$
$$\left. -s_{,i}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial \pi_i} - \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial \pi_i}\right) + \pi_i\left(\partial_j\left(\frac{\partial f}{\partial \pi_i}\right)\frac{\partial g}{\partial \pi_j} - \partial_j\left(\frac{\partial g}{\partial \pi_i}\right)\frac{\partial f}{\partial \pi_j}\right)\right].$$

Вид гамильтониана при переходе к эйлеровым переменным почти не изменяется

$$\mathrm{H} = \int\limits_{\Omega} d\mathbf{x} \left(\frac{\pi^2}{2\rho} + \rho\Phi(\mathbf{x}) + \rho\varepsilon(\rho, s)\right). \tag{8.22}$$

Его вариационные производные равны

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \pi_i} &= \theta \frac{\pi_i}{\rho}, \\
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta \rho} &= \theta \left(-\frac{\pi^2}{2\rho^2} + \Phi + \varepsilon + \frac{p}{\rho} \right), \\
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta s} &= \theta \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = \theta \rho T.
\end{aligned}$$

Гамильтоновы уравнения получаются с помощью внутреннего умножения дифференциала гамильтониана на пуассонов бивектор согласно общему формализму главы 4. Удобно переписать эти уравнения через эйлерову скорость $v^i = \pi_i/\rho$

$$\dot{\rho} = -\left(\rho v^i\right)_{,i}, \tag{8.23}$$

$$\dot{s} = -v^i s_{,i}, \tag{8.24}$$

$$\dot{v}^i = -v^j v^i_{,j} - \Phi_{,i} - \frac{p_{,i}}{\rho}, \tag{8.25}$$

где $p = \rho^2 \partial\varepsilon/\partial\rho$. Для проверки тождества Якоби здесь можно воспользоваться методом, изложенным и обоснованным в главе 4. В действительности, наши расчеты отличаются от стандартных, описанных, например, в книге Олвера [79], только учетом всех граничных вкладов. Бивектор, определяющий скобку Пуассона, имеет вид

$$\begin{aligned}
\Psi = {} & \frac{1}{2} \int\int \frac{\delta}{\delta \phi_A(x)} \{\phi_A(x), \phi_B(y)\} \wedge \frac{\delta}{\delta \phi_B(y)} = \\
= {} & \frac{1}{2} \int\int \frac{\delta}{\delta \pi_i(x)} \{\pi_i(x), \pi_j(y)\} \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_j(y)} + \\
& + \frac{\delta}{\delta \rho(x)} \{\rho(x), \pi_i(y)\} \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i(y)} + \frac{\delta}{\delta \pi_i(x)} \{\pi_i(x), \rho(y)\} \wedge \frac{\delta}{\delta \rho(y)} + \\
& + \frac{\delta}{\delta s(x)} \{s(x), \pi_i(y)\} \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i(y)} + \frac{\delta}{\delta \pi_i(x)} \{\pi_i(x), s(y)\} \wedge \frac{\delta}{\delta s(y)}.
\end{aligned}$$

После преобразований и интегрирования получаем другую его запись:

$$\Psi = \int \pi_i D_j \left(\frac{\delta}{\delta \pi_i} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_j} + \rho D_i \left(\frac{\delta}{\delta \rho} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i} - s_{,i} \frac{\delta}{\delta s} \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i}.$$

Тогда нетрудно увидеть, что

$$\mathsf{d}\Psi = \int \delta\pi_i D_j \left(\frac{\delta}{\delta \pi_i} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i} + \delta\rho D_i \left(\frac{\delta}{\delta \rho} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i} - (\delta s)_{,i} \frac{\delta}{\delta s} \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i},$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
\mathsf{d}\Psi \lrcorner \Psi &= \int \pi_i D_k \left[D_j \left(\frac{\delta}{\delta \pi_i} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_j} \right] \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_k} - D_j \left(\frac{\delta}{\delta \pi_i} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_j} \wedge \pi_k D_i \left(\frac{\delta}{\delta \pi_k} \right) - \\
&- D_j \left(\frac{\delta}{\delta \pi_i} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_j} \wedge \rho D_i \left(\frac{\delta}{\delta \rho} \right) + s_{,i} D_j \left(\frac{\delta}{\delta \pi_i} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_j} \wedge \frac{\delta}{\delta s} + \\
&+ D_k \left[D_i \left(\frac{\delta}{\delta \rho} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i} \right] \wedge \rho \frac{\delta}{\delta \pi_k} + \frac{\delta}{\delta s} \wedge \frac{\delta}{\delta \pi_i} \wedge D_i \left(s_{,k} \frac{\delta}{\delta \pi_k} \right).
\end{aligned}
$$

Прямым вычислением, сохраняя полные дивергенции, нетрудно проверить, что это выражение обращается в ноль точно, а не по модулю дивергенций. Это означает обращение в ноль скобки Схоутена-Нейенхейса бивектора Ψ с самим собой, поскольку для бивекторов

$$
[\Psi, \Psi]_{SN} = \mathsf{d}\Psi \lrcorner \Psi + (-1)^{2\cdot 2} \mathsf{d}\Psi \lrcorner \Psi = 2\mathsf{d}\Psi \lrcorner \Psi,
$$

что, как было показано в главе 4, равносильно выполнению тождества Якоби при произвольных локальных функционалах:

$$
\{\{F, G\}, H\} + \{\{H, F\}, G\} + \{\{G, H\}, F\} = -[\Psi, \Psi]_{SN}(\mathsf{d}F, \mathsf{d}G, \mathsf{d}H). \tag{8.26}
$$

8.4.2 Свободная граница

Если в лагранжевых координатах нам для описания движения границы хватило тех же переменных, что и в случае, когда граница неподвижна, то здесь необходимо рассматривать введенную выше функцию $P_\Omega(\mathbf{x}, t)$ как независимую динамическую переменную. Для этой функции справедливы формулы, аналогичные (8.16):

$$
P_\Omega(\mathbf{x}, t) = P_0(\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)), \qquad P_\Omega(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{\Omega_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}(\mathbf{x}, t)) P_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r},
$$

поэтому ее скобки Пуассона аналогичны скобкам для переменной удельной энтропии $s(\mathbf{x}, t)$

$$
\{P_\Omega(\mathbf{x}, t), \pi^i(\mathbf{x}', t)\} = -P_{\Omega,i} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),
$$

а скобки с другими переменными обращаются в ноль.

В случае свободной границы гамильтониан зависит от функции P_Ω и через аргумент θ-функции и через выражение для поверхностной энергии (8.7)

$$\mathrm{H} = \int \theta(P_\Omega) \left[\frac{\pi^2}{2\rho} + \rho\Phi(\mathbf{x}) + \rho\varepsilon(\rho, s) + \tau\nabla\cdot\mathbf{n} \right] d\mathbf{x}, \tag{8.27}$$

причем в последнем случае это означает и зависимость от пространственных производных P_Ω до второго порядка включительно. Однако, с учетом соотношения (8.10) полная вариационная производная гамильтониана по P_Ω равна

$$\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta P_\Omega} = \frac{d\theta}{dP_\Omega} \left[\frac{\pi^2}{2\rho} + \rho\Phi(\mathbf{x}) + \rho\varepsilon(\rho, s) + \tau\nabla\cdot\mathbf{n} \right], \tag{8.28}$$

или

$$\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta P_\Omega} = \theta_{,i} \frac{P_{\Omega,i}}{|P_{\Omega,i}|^2} \left[\frac{\pi^2}{2\rho} + \rho\Phi(\mathbf{x}) + \rho\varepsilon(\rho, s) + \tau K \right],$$

а производные по остальным переменным по сравнению со случаем фиксированной границы не изменяются.

Согласно определениям глав 3,4, с помощью пуассонова бивектора

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{1}{2} \int\int \frac{\delta}{\delta\phi_A(\mathbf{x})} \wedge \frac{\delta}{\delta\phi_B(\mathbf{y})} \{\phi_A(\mathbf{x}), \phi_B(\mathbf{y})\} d\mathbf{x}d\mathbf{y} = \\ &= \int \pi_i D_j \left(\frac{\delta}{\delta\pi_i} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta\pi_j} + \rho D_i \left(\frac{\delta}{\delta\rho} \right) \wedge \frac{\delta}{\delta\pi_i} - s_{,i} \frac{\delta}{\delta s} \wedge \frac{\delta}{\delta\pi_i} - P_{\Omega,i} \frac{\delta}{\delta P_\Omega} \wedge \frac{\delta}{\delta\pi_i}, \end{aligned}$$

и операции внутреннего умножения находим гамильтоново векторное поле:

$$\begin{aligned} -d\mathrm{H} \lrcorner \Psi = \int \theta \left[-v^i s_{,i} \right] \frac{\delta}{\delta s} + \theta \left[-v^i P_{\Omega,i} \right] \frac{\delta}{\delta P_\Omega} + \theta \left[-\pi_{i,i} \right] \frac{\delta}{\delta\rho} + \\ + \theta \left[-(\pi_i v_j)_{,j} - \rho\partial_i\Phi - \partial_i p \right] \frac{\delta}{\delta\pi_i} - \theta_{,i} \left[p - \tau K \right] \frac{\delta}{\delta\pi_i}. \end{aligned}$$

Требование отсутствия в гамильтоновых уравнениях сингулярных вкладов ведет нас к уже известному граничному условию (8.12). Нетрудно видеть, что уравнения движения представляют собой старые уравнения (8.23), (8.25) и (8.24), а также одно новое уравнение

$$\dot{P}_\Omega = -(\mathbf{v}\cdot\nabla)P_\Omega. \tag{8.29}$$

В данном случае очевидно, что требование исчезновения граничных членов в вариации гамильтониана (или, что то же самое, в его полных вариационных производных (8.28)) приведет к граничному условию, отличному от общепринятого. Это означает, что при общей постановке задачи, когда канонический выбор переменных не предполагается заранее, критерий выбора поверхностных вкладов Редже-Тейтельбойма [1] должен быть заменен на требование исключения сингулярного вклада в гамильтоновом векторном поле (т.е. в гамильтоновых уравнениях движения).

Следует отметить, что доказательство тождества Якоби здесь не может быть проведено путем вычисления скобки Схоутена-Нейенхейса бивектора Ψ с самим собой, поскольку в случае динамической области Ω доказательство соотношения (8.26), предложенное в главе 4, неприменимо.

8.5 Вариационный принцип в эйлеровых переменных

Естественно задаться вопросом: нельзя ли получить гамильтонов формализм для эйлеровых переменных, рассмотренный в предыдущем параграфе, непосредственно из соответствующего вариационного принципа, без апелляции к гамильтонову формализму в лагранжевых переменных? Ответ на этот вопрос, безусловно, будет положительным, однако само построение этого вариационного принципа не является очевидным и заслуживает специального обсуждения. Интересно, что оно послужило “завязкой” книги Купершмидта (см. [71, Введение]). Заинтересованного читателя мы можем также отослать к публикациям [72, 81, 82].

8.5.1 Фиксированная граница

Задумаемся сначала о возможности обратного перехода (справа налево по диаграмме 8.1): как найти лагранжиан и переменные, от которых он должен зависеть, если известен гамильтониан (в данном случае, как функционал от $\pi^i(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ и $s(\mathbf{x})$) и скобки Пуассона для гамильтоновых переменных? Конечно, если переменные оказываются каноническими, то достаточно воспользоваться преобразованием Лежандра, но в общем случае эта задача не является тривиальной. Поскольку импульсы $\pi^i(\mathbf{x})$ имеют между собой ненулевые скобки, гамильтониан (8.22) не содержит сопряженных $\pi^i(\mathbf{x})$ координат, а общее число переменных не обязательно четно (например, в $\mathbb{R}^3$ оно равно пяти), выход заключается во введении вспомогательных переменных.

Таким образом, для продвижения по левой вертикальной стрелке диаграммы 8.1 вниз мы дополним "наивный" лагранжиан

$$L_0 = \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s)\right),$$

который получается из лагранжиана (8.2) простой заменой переменных и является разностью кинетической и потенциальной (с добавлением к ней внутренней) энергий, несколькими связями вместе с соответствующими лагранжевыми множителями.

В качестве первой и наиболее очевидной связи возьмем уравнение непрерывности (закон сохранения массы)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{8.30}$$

Кроме того, используем закон сохранения энтропии

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)s = 0, \tag{8.31}$$

который можно переписать в комбинации с (8.30) так же, как

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho s\mathbf{v}) = 0.$$

Наконец, требуется наложить условие, обеспечивающее существование лагранжевых координат. Это означает, что каждой материальной точке, находящейся в момент времени t в точке с координатами $\mathbf{x}$, может быть сопоставлен ее "номер" α_μ, например, координаты ее начального положения $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$. Этот "номер" тоже должен "сохраняться" в процессе движения жидкости

$$\frac{\partial\alpha_\mu}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\alpha_\mu = 0. \tag{8.32}$$

При этом число степеней свободы, или диапазон изменения индекса μ, вообще говоря, не совпадает с размерностью пространства $\mathbb{R}^n$, например, для $n = 3$ достаточно одной компоненты α_μ. В результате, пока с точностью до поверхностных вкладов, мы приходим к лагранжиану

$$L = L_0 + \int\limits_\Omega d\mathbf{x} \left[\phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) - \eta \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s \right) - \right.$$

$$\left. - \beta_\mu \left(\frac{\partial \alpha_\mu}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \alpha_\mu \right) \right],$$

или к действию

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Omega d\mathbf{x} \left[\rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s) \right) + \phi \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) - \right.$$

$$\left. - \eta \frac{Ds}{Dt} - \beta_\mu \frac{D\alpha_\mu}{Dt} \right], \tag{8.33}$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla),$$

а знаки перед η, β_μ выбраны для удобства, так чтобы в нижеследующей формуле (8.34) были только плюсы. Варьирование действия по ϕ, η, β_μ, естественно, дает наши дополнительные условия (8.30), (8.31), (8.32).

Варьируя (8.33) по скорости $\mathbf{v}$, получаем так называемое представление Клебша для переменной скорости

$$\mathbf{v} = \nabla \phi + \frac{\eta}{\rho} \nabla s + \frac{\beta_\mu}{\rho} \nabla \alpha_\mu, \tag{8.34}$$

означающее, что скорость можно считать вспомогательной переменной.

Варьируя действие (8.33) по плотности ρ, мы получаем

$$\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s) - \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} - \dot{\phi} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi = 0,$$

что можно представить как уравнение для эволюции потенциала ϕ:

$$\dot{\phi} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi + \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho, s) - \frac{p}{\rho}. \tag{8.35}$$

Мы также получаем независимые уравнения движения варьированием (8.33) по s

$$\dot{\eta} = -\operatorname{div}(\eta\mathbf{v}) + \rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial s}, \tag{8.36}$$

и по α_μ

$$\dot{\beta}_\mu = -\operatorname{div}(\beta_\mu\mathbf{v}). \tag{8.37}$$

Легко убедиться, что уравнения движения для "старых" переменных ρ, s остались прежними (8.23), (8.24).

Можно показать, что то же самое происходит с уравнением (8.25) для скорости $\mathbf{v}$. Для этого следует продифференцировать (8.34) по времени и подставить в полученное выражение $\dot{\rho}$, $\dot{\phi}$, $\dot{s}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\alpha}_\mu$, $\dot{\beta}_\mu$ из уравнений движения (8.30), (8.35), (8.31), (8.36), (8.32), (8.37) соответственно.

Разумеется, мы пока умолчали о поверхностных членах, возникающих при интегрировании по частям в вариации действия (8.33). Выпишем их в явном виде

$$\begin{aligned}(\delta S)_. &= \int\limits_\Omega d\mathbf{x}\,[\phi\delta\rho - \eta\delta s - \beta_\mu\delta\alpha_\mu]_{t_1}^{t_2} + \\ &+ \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \oint\limits_{\partial\Omega} [\mathbf{v}(\phi\delta\rho - \eta\delta s - \beta_\mu\delta\alpha_\mu) + \rho\phi\delta\mathbf{v}]\cdot\mathbf{n}dS.\end{aligned} \tag{8.38}$$

Граничное условие

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0,$$

означающее, как и в предыдущих частях, неподвижность края области Ω, обеспечивает обращение в нуль всех вкладов на пространственной части границы, а вклад временно́й части исчезает, так как переменные ρ, s, α_μ должны быть заданы в начальный и конечный моменты времени.

8.5.2 Свободная граница

Добавим к действию (8.33) вклад поверхностной энергии и будем, как и раньше, описывать свободную границу с помощью функции $P_\Omega(\mathbf{x},t)$

$$\begin{aligned}
S &= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \theta(P_\Omega)\left[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho,s)\right) + \phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right) - \right.\\
&- \left.\eta\frac{Ds}{Dt} - \beta_\mu\frac{D\alpha_\mu}{Dt} - \tau\nabla\cdot\mathbf{n}\right] d\mathbf{x}. \qquad (8.39)
\end{aligned}$$

Вариация такого действия будет отличаться от вариации действия (8.33) лишь несколькими новыми поверхностными членами, выпишем их отдельно:

$$\begin{aligned}
&(\delta' S)_{.} = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{d\theta}{dP_\Omega}\left(\dot{P}_\Omega\left(-\phi\delta\rho + \eta\delta s + \beta_\mu\delta\alpha\right) + \right.\\
&+\delta P_\Omega\left[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho,s)\right) + \phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\right) - \right.\\
&\left.\left.-\eta\frac{Ds}{Dt} - \beta_\mu\frac{D\alpha_\mu}{Dt} - \tau K\right]\right) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Члены, стоящие в первой строке, возникают в результате интегрирования по частям частных производных по времени. Варьирование K не дает вклада, как было показано выше, см. (8.10).

Объединяя полученное выражение с ранее найденным вкладом (8.38), который можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
(\delta'' S)_{.} &= \int\limits_{t_1}^{t_2}\int d\mathbf{x}\frac{\partial}{\partial t}\left[\theta(P_\Omega)(\phi\delta\rho - \eta\delta s - \beta_\mu\delta\alpha_\mu)\right] - \\
&- \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \nabla\theta(P_\Omega)\cdot\left[\mathbf{v}(\phi\delta\rho - \eta\delta s - \beta_\mu\delta\alpha_\mu) + \rho\phi\delta\mathbf{v}\right] d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}
(\delta S). \quad &= \int \theta(P_\Omega)(\phi\delta\rho - \eta\delta s - \beta_\mu \delta\alpha_\mu)d\mathbf{x}|_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \nabla\theta(P_\Omega)\cdot(\rho\phi\delta\mathbf{v})\, d\mathbf{x} - \\
&- \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{d\theta}{dP_\Omega}(\dot{P}_\Omega + (\mathbf{v}\cdot\nabla)P_\Omega)(\phi\delta\rho - \eta\delta s - \beta_\mu\delta\alpha_\mu)d\mathbf{x} + \\
&+ \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \frac{d\theta}{dP_\Omega}\delta P_\Omega \Bigg[\rho\bigg(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho,s)\bigg) + \phi\bigg(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})\bigg) - \\
&- \eta\frac{Ds}{Dt} - \beta_\mu\frac{D\alpha_\mu}{Dt} - \tau K\Bigg] d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Часть членов дает нам граничное условие

$$\dot{P}_\Omega + (\mathbf{v}\cdot\nabla)P_\Omega = 0,$$

другая часть исчезает при задании полей на временных границах. Однако оставшиеся слагаемые не позволяют получить известное граничное условие (8.11). Как известно [2, 77], два действия, отличающиеся поверхностными членами, приводят к двум различным естественным граничным условиям. Это значит, что действие (8.39) должно быть изменено на некоторый поверхностный интеграл. Нетрудно убедиться, что мы получим нужный результат, вычитая из (8.39) выражение

$$\Delta S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla\cdot(\rho\phi\mathbf{v})\right) d\mathbf{x}.$$

Таким образом, действие, которое приводит к правильным уравнениям движения и граничным условиям в случае свободной границы, имеет вид

$$\begin{aligned}
S = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int \theta(P_\Omega) \Bigg[\rho\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) - \varepsilon(\rho,s)\right) - \\
- \rho\frac{D\phi}{Dt} - \eta\frac{Ds}{Dt} - \beta_\mu\frac{D\alpha_\mu}{Dt} - \tau K\Bigg] d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{8.40}$$

Сравнивая это выражение с формулой (8.35) мы видим, что на уравнениях движения с точностью до знака плотность лагранжиана совпадает с давлением. В работе Люка [72] для случая двумерного

$$d\mathbf{x} = dxdy, \quad P_\Omega(x, y, t) = h(x, t) - y,$$

потенциального течения $\mathbf{v} = \nabla\phi$ несжимаемой жидкости $\rho = 1$, $s = const$ без поверхностного натяжения $\tau = 0$ в постоянном гравитационном поле $\Phi(\mathbf{x}) = gy$ было впервые отмечено, что действие (8.40), принимающее вид

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} dt \int dx \int^{h(x,t)} dy \left(\frac{1}{2}{\phi_x}^2 + \frac{1}{2}{\phi_y}^2 + \dot{\phi} + gy \right),$$

позволяет получить не только уравнения движения, но и динамические граничные условия для свободной поверхности. Причем присутствие слагаемого $\dot{\phi}$ в плотности лагранжиана весьма существенно, так как именно оно порождает симплектическую форму

$$\omega = \int d\mathbf{x} \delta h \wedge \delta\phi,$$

соответствующую скобке Пуассона, открытой в почти одновременной работе Захарова [66].

Нетрудно убедиться, что действие (8.40) с равным успехом может применяться и в случае фиксированной границы области Ω.

8.6 Альтернативный вывод гамильтонова формализма в эйлеровых переменных

Покажем, что на основе вариационного принципа для эйлеровых переменных, обсужденного в предыдущей главе, может быть построен новый гамильтонов формализм, эквивалентный построенному выше путем редукции гамильтонова формализма для лагранжевых переменных. Это построение может быть выполнено как по методу Дирака [12], так и обращением матрицы симплектической формы (метод Фаддеева-Джэкива [73]).

8.6.1 Фиксированная граница

В подходе Дирака действие (8.40), где переменную $\mathbf{v}$ исключаем с помощью (8.34), приводит к появлению первичных связей

$$\pi_\phi = -\rho, \qquad \pi_\rho = 0,$$
$$\pi_s = -\eta, \qquad \pi_\eta = 0,$$
$$\pi_\alpha = -\beta, \qquad \pi_\beta = 0.$$

После этого ищутся вторичные связи, затем строятся скобки Дирака и исключаются связи второго рода.

На наш взгляд, процедура Фаддеева-Джэкива здесь проще. Находится симплектическая форма

$$\omega = \int \theta(P)(\delta\phi \wedge \delta\rho + \delta s \wedge \delta\eta + \delta\alpha_\mu \wedge \delta\beta_\mu) d\mathbf{x},$$

(здесь и ниже мы заменим громоздкое обозначение P_Ω на P), имеющая явно канонический вид, что позволяет сразу выписать скобки Пуассона:

$$\{\rho(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$
$$\{\eta(\mathbf{x}), s(\mathbf{x}')\} = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$
$$\{\beta_\mu(\mathbf{x}), \alpha_\nu(\mathbf{x}')\} = \delta_{\mu\nu}\delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),$$

которые здесь не отличаются от тех скобок Дирака, что получаются в другом подходе. Введем величины

$$\pi = \rho\nabla\phi + \eta\nabla s + \beta_\mu\nabla\alpha_\mu,$$

и вычислим для них скобки Пуассона. Ответ совпадает с формулой (8.19). Аналогичным образом проверяется соответствие формул (8.20), (8.21). Гамильтониан получается стандартным преобразованием Лежандра и, будучи выражен в переменных π, совпадает с выражением (8.22).

Таким образом, использование потенциалов Клебша позволяет установить связь между вариационным принципом и гамильтоновым формализмом в эйлеровых координатах.

8.6.2 Свободная граница

Для простоты мы в этой части считаем, что α_μ можно заменить на α. В случае свободной границы необходимо рассматривать P как динамическую переменную. Производные по времени в действие (8.40) входят в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int d\mathbf{x}\theta(P)(-\rho\dot{\phi} - \eta\dot{s} - \beta\dot{\alpha}),$$

следовательно, соответствующая симплектическая форма оказывается равной выражению

$$\omega = -\int d\mathbf{x}\,(\theta(P)(\delta\rho\wedge\delta\phi + \delta\eta\wedge\delta s + \delta\beta\wedge\delta\alpha) +$$
$$+\ \theta'(P)\delta P\wedge(\rho\delta\phi + \eta\delta s + \beta\delta\alpha))\,.$$

В рассмотренном Захаровым [66] случае потенциального течения несжимаемой жидкости эта форма сводится (при $\rho = 1$) к виду

$$\omega = \int d\mathbf{x}\theta'(P)\delta\phi\wedge\delta P,$$

позволяющему ввести канонические скобки Пуассона для пары сопряженных переменных: потенциала поля скорости на границе и положения самой границы.

Здесь для перехода к гамильтонову формализму мы воспользуемся методом Дирака [12]. Введем сопряженные импульсы ко всем переменным, так что

$$\{\phi(x), \pi_\phi(y)\} = \{\rho(x), \pi_\rho(y)\} = \{s(x), \pi_s(y)\} = \delta(x, y),$$

$$\{\eta(x), \pi_\eta(y)\} = \{\alpha(x), \pi_\alpha(y)\} = \{\beta(x), \pi_\beta(y)\} = \{P(x), \pi_P(y)\} = \delta(x, y),$$

и найдем из действия (8.40) их значения, пользуясь стандартной формулой

$$\pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}.$$

Поскольку плотность лагранжиана зависит от скоростей линейно, мы получаем столько же первичных связей, сколько ввели импульсов:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \pi_\phi + \theta(P)\rho, \qquad \psi_4 = \pi_\rho, \\ \psi_2 &= \pi_s + \theta(P)\eta, \qquad \psi_5 = \pi_\eta, \\ \psi_3 &= \pi_\alpha + \theta(P)\beta, \qquad \psi_6 = \pi_\beta, \\ \psi_7 &= \pi_P. \end{aligned}$$

Преобразование Лежандра приводит к затравочному гамильтониану

$$\mathrm{H}_0 = \int d\mathbf{x}\theta(P)\left(\frac{1}{2\rho}(\rho\nabla\phi + \eta\nabla s + \beta\nabla\alpha)^2 + \rho\Phi + \rho\varepsilon(\rho, s) + \tau K\right),$$

совпадающему с гамильтонианом (8.27), с той единственной разницей, что импульсы π_i выражены через переменные Клебша. В новых переменных, однако, гамильтониан H_0 не дает правильных уравнений движения и должен быть дополнен линейной комбинацией первичных связей

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_0 + \int d\mathbf{x}\sum_{i=1}^{7}\lambda_i\psi_i.$$

Очевидно, что первые 6 связей являются связями 2-го рода, матрица их скобок Пуассона

$$\{\psi_i, \psi_j\} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}\theta(P)\delta(x, y)$$

имеет обратную (здесь мы должны считать единичным оператором $\theta(P)\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$)

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}\theta(P)\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

и можно определить скобки Дирака согласно стандартной формуле

$$\{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\}_D = \{f(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\} -$$
$$-\sum_{i,j=1}^{6}\int d\mathbf{z}\int d\mathbf{w}\{f(\mathbf{x}), \psi_i(\mathbf{z})\}C_{ij}(\mathbf{z}, \mathbf{w})\{\psi_j(\mathbf{w}), g(\mathbf{y})\}.$$

Таким образом мы избавляемся от 6 первых импульсов и, соответственно, от 6 первых связей в гамильтониане

$$\mathrm{H} = \int d\mathbf{x}\left[\theta(P)\left(\frac{1}{2\rho}(\rho\nabla\phi + \eta\nabla s + \beta\nabla\alpha)^2 + \rho\Phi + \rho\varepsilon(\rho, s) + \tau K\right) + \lambda_P\pi_P\right]$$

Вычисление скобок Дирака для оставшихся 8 переменных дает соотношения:

$$
\begin{aligned}
\{\rho(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{y})\}_D &= \theta(P)\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \{\rho(\mathbf{x}), \pi_P(\mathbf{y})\}_D = -\theta'(P)\rho\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}),\\
\{\eta(\mathbf{x}), s(\mathbf{y})\}_D &= \theta(P)\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \{\eta(\mathbf{x}), \pi_P(\mathbf{y})\}_D = -\theta'(P)\eta\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}),\\
\{\beta(\mathbf{x}), \alpha(\mathbf{y})\}_D &= \theta(P)\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \{\beta(\mathbf{x}), \pi_P(\mathbf{y})\}_D = -\theta'(P)\beta\delta(\mathbf{x},\mathbf{y}),\\
\{P(\mathbf{x}), \pi_P(\mathbf{y})\} &= \delta(\mathbf{x},\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Таким образом, исходной симплектической форме мы теперь можем сопоставить пуассонов бивектор

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \int d\mathbf{x}\Bigg[\theta(P)\left(\frac{\delta}{\delta\rho}\wedge\frac{\delta}{\delta\phi}+\frac{\delta}{\delta\eta}\wedge\frac{\delta}{\delta s}+\frac{\delta}{\delta\beta}\wedge\frac{\delta}{\delta\alpha}\right)+\\
&+ \frac{\delta}{\delta\pi_P}\wedge\left(-\frac{\delta}{\delta P}+\theta'(P)\left(\rho\frac{\delta}{\delta\rho}+\eta\frac{\delta}{\delta\eta}+\beta\frac{\delta}{\delta\beta}\right)\right)\Bigg].
\end{aligned}
$$

Дифференциал гамильтониана имеет вид

$$
\mathsf{d}\mathrm{H} = \int d\mathbf{x}\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta\phi_A}\delta\phi_A, \tag{8.41}
$$

где некоторые полные вариационные производные содержат нетривиальные граничные вклады

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta\rho} &= \theta(P)\left(\mathbf{v}\nabla\phi-\frac{v^2}{2}+\Phi+\varepsilon+\frac{p}{\rho}\right),\\
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta\eta} &= \theta(P)\mathbf{v}\cdot\nabla s,\\
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta\beta} &= \theta(P)\mathbf{v}\cdot\nabla\alpha,\\
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta\phi} &= -\theta'(P)\rho\mathbf{v}\cdot\nabla P-\theta(P)\nabla(\rho\mathbf{v}),\\
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta s} &= -\theta'(P)\eta\mathbf{v}\cdot\nabla P-\theta(P)\left(\nabla(\eta\mathbf{v})-\rho T\right),\\
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta\alpha} &= -\theta'(P)\beta\mathbf{v}\cdot\nabla P-\theta(P)\nabla(\beta\mathbf{v}),\\
\frac{\delta \mathrm{H}}{\delta P} &= \theta'(P)\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\Phi+\rho\varepsilon+\tau K\right), \qquad \frac{\delta \mathrm{H}}{\delta\pi_P} = \lambda_P.
\end{aligned}
$$

Операция внутреннего умножения dH на пуассонов бивектор дает, с точностью до знака, гамильтоново векторное поле,

$$
\begin{aligned}
-\mathsf{dH} \lrcorner \Psi &= \left[-\theta'(P)\rho(\lambda_P + \mathbf{v}\cdot\nabla P) - \theta(P)\nabla(\rho\mathbf{v})\right]\frac{\delta}{\delta\rho} + \\
&+ \left[-\theta'(P)\eta(\lambda_P + \mathbf{v}\cdot\nabla P) - \theta(P)(\nabla(\eta\mathbf{v}) - \rho T)\right]\frac{\delta}{\delta\eta} + \\
&+ \left[-\theta'(P)\beta(\lambda_P + \mathbf{v}\cdot\nabla P) - \theta(P)\nabla(\beta\mathbf{v})\right]\frac{\delta}{\delta\beta} + \\
&+ \theta'(P)(p - \tau K)\frac{\delta}{\delta\pi} - \theta(P)\mathbf{v}\cdot\nabla\alpha\frac{\delta}{\delta\alpha} + \lambda_P\frac{\delta}{\delta P} + \\
&+ \theta(P)\left[\frac{v^2}{2} - \mathbf{v}\cdot\nabla\phi - \Phi - \varepsilon - \frac{p}{\rho}\right]\frac{\delta}{\delta\phi} - \theta(P)\left[\mathbf{v}\cdot\nabla s\right]\frac{\delta}{\delta s},
\end{aligned}
$$

т.е. гамильтоновы уравнения движения, например,

$$\dot{P} = \lambda_P. \tag{8.42}$$

Требование обращения в нуль всех сингулярных на границе членов дает два уравнения

$$\theta'(P)(\lambda_P + \mathbf{v}\cdot\nabla P) = 0, \tag{8.43}$$

$$\theta'(P)(p - \tau K) = 0, \tag{8.44}$$

учитывая (8.42) мы узнаем в них все те же стандартные граничные условия (8.12), (8.29). Если бы мы исходили здесь из критерия, выдвинутого в работе Редже и Тейтельбойма [1], т.е. требовали бы исчезновения граничных членов в вариации гамильтониана (8.41), то получили бы неверные граничные условия, в частности условие неподвижности границы.

После проведенного сокращения сингулярных членов полученные уравнения движения эквивалентны лагранжевым.

8.7 Выводы

Мы показали, что предложенный в работах [37, 38] метод применим в гамильтоновом подходе к задачам со свободной границей. Особенности этого класса проблем проявляются в данном подходе, на наш взгляд, четко и ясно.

Важно подчеркнуть, что при работе с неультралокальными скобками Пуассона общепринятый метод Редже и Тейтельбойма [1] оказывается неудовлетворительным, так как требование “дифференцируемости” гамильтониана ведет к граничным условиям, отличным от следующих из вариационного принципа, в то же время не исключая из уравнений движения сингулярного граничного вклада.

Наше требование к граничным условиям состоит в том, что необходимо исключить вклады пропорциональные граничным δ-функциям и их производным в уравнениях движения, т.е. в гамильтоновых векторных полях. Наряду с этим допускается наличие таких членов в вариации гамильтониана или в пуассоновом бивекторе.

Эти выводы подтверждаются и другими примерами [42, 43]. Мы надеемся, что обсуждаемый подход окажется полезным при рассмотрении различных задач со свободными границами.

Приложение

Докажем следующую формулу:

$$\frac{\partial}{\partial r^j}\left(JJ^{ji}\right) = 0,$$

для переменных, заданных соотношениями (8.3).

Согласно обычным правилам варьирования для определителя и обратной матрицы, соответственно, имеют место соотношения:

$$\delta J = JJ^{lk}\delta J_{kl}, \qquad \delta J^{ji} = -J^{jk}J^{li}\delta J_{kl}.$$

Тогда находим

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r^j}\left(JJ^{ji}\right) &= J\left(J^{ji}J^{lk}-J^{jk}J^{li}\right)\frac{\partial^2 Y^k}{\partial r^j \partial r^l} = \\
&= J\left(\frac{\partial r^j}{\partial Y^i}\frac{\partial r^l}{\partial Y^k}-\frac{\partial r^j}{\partial Y^k}\frac{\partial r^l}{\partial Y^i}\right)\frac{\partial^2 Y^k}{\partial r^j \partial r^l} = \\
&= J\left[\frac{\partial r^l}{\partial Y^k}\frac{\partial}{\partial r^j}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\right)\frac{\partial r^j}{\partial Y^i}-\frac{\partial r^l}{\partial Y^i}\frac{\partial}{\partial r^j}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\right)\frac{\partial r^j}{\partial Y^k}\right] = \\
&= J\left[\frac{\partial r^l}{\partial Y^k}\frac{\partial}{\partial Y^i}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\right)-\frac{\partial r^l}{\partial Y^i}\frac{\partial}{\partial Y^k}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\right)\right] = \\
&= J\left[\frac{\partial}{\partial Y^i}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\frac{\partial r^l}{\partial Y^k}\right)-\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\frac{\partial^2 r^l}{\partial Y^i \partial Y^k}-\frac{\partial}{\partial Y^k}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\frac{\partial r^l}{\partial Y^i}\right)+\right. \\
&+ \left.\frac{\partial Y^k}{\partial r^l}\frac{\partial^2 r^l}{\partial Y^k \partial Y^i}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Заключение

Перечислим здесь основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Предложен метод нахождения глобальных (или асимптотических) законов сохранения в калибровочных теориях, основанный на дополнении классического подхода Э. Нетер учетом граничных условий, обеспечивающих асимптотическую линеаризацию полевых уравнений.

2. Вычислены поверхностные члены в пуассоновой алгебре генераторов деформаций гиперповерхности общей теории относительности. Показано, что при граничных условиях, линеаризующих эти члены на фоне плоской метрики и при условии, что координатные преобразования асимптотически являются векторами Киллинга этой плоской метрики, пуассонова алгебра реализует алгебру Пуанкаре.

3. Найдены не зависящие от выбора пространственных координат граничные условия, являющиеся достаточными для асимптотической реализации алгебры Пуанкаре. Для частного случая декартовых координат эти граничные условия улучшают предшествовавшие результаты.

4. Показано, что преобразование Аштекара, лежащее в основе нового

направления квантования гравитации, является каноническим лишь с точностью до поверхностных членов. Вследствие этого оказывается, что при решении задач с нетривиальными граничными условиями необходимо вносить поправки в полученные ранее в рамках подхода Аштекара результаты.

5. Для пуассоновой алгебры генераторов преобразований пространственных координат и калибровочных вращений базисных триад показано, что учет неканоничности преобразования Аштекара совместно с использованием новой формулы для скобки Пуассона позволяет обеспечить замыкание алгебры даже в том случае, когда и поля и преобразования на границе остаются произвольными (т.е. при свободных граничных условиях).

6. Предложен подход, позволяющий учитывать поверхностные вклады, возникающие при вычислении скобок Пуассона между локальными функционалами, уже на стадии скобок для подинтегральных выражений. Он основан на явном введении в операции с δ-функцией характеристических θ-функций области интегрирования.

7. Впервые указано на ограниченность подхода Редже и Тейтельбойма к нетривиальным граничным задачам, состоящую в том, что кроме поверхностных вкладов в гамильтониан, необходимо учитывать и аналогичные вклады в теоретико-полевые скобки Пуассона или в симплектическую форму.

8. На конкретных примерах (гидродинамика, формализм Аштекара в ОТО) продемонстрировано, что в случаях, когда скобки Пуассона между переменными не являются ультралокальными, критерий

дифференцируемости гамильтониана, выдвинутый Редже и Тейтельбоймом, неприменим. Взамен предложен более общий критерий, требующий регулярности гамильтоновых векторных полей при выполнении граничных условий.

9. Предложена формула для теоретико-полевых скобок Пуассона, обеспечивающая точное выполнение тождества Якоби независимо от граничных условий, в то время как стандартные скобки удовлетворяют тождеству Якоби лишь с точностью до дивергенций.

10. Доказано, что новое выражение для скобок Пуассона является инвариантным при любых локальных, т.е. содержащих конечное число производных, преобразованиях полей, независимо от граничных условий.

11. Показано, что основные конструкции так называемого “формального вариационного исчисления” при учете дивергенций могут быть расширены так, что новая формула для скобки Пуассона следует из них единственным образом.

12. На примере гидродинамики идеальной (невязкой) жидкости построено приложение новой формулы для скобки Пуассона к задачам со свободной границей. Формализм разработан как для лагранжевых, так и для эйлеровых переменных и в обоих случаях продемонстрирована связь между гамильтоновым и лагранжевым подходами. Показано, что "естественные граничные условия"вариационного метода соответствуют в гамильтоновом методе требованию регулярности гамильтоновых векторных полей (т.е. гамильтоновых уравнений движения).

13. Показано, что при определенных граничных условиях (предложенных в работе Карлипа) новая формула для скобок Пуассона позволяет вычислить энтропию черной дыры, в то время как подход Редже и Тейтельбойма оказывается неприменимым.

Благодарности

Приношу глубокую благодарность академику А.А. Логунову за предложенные задачи, за интерес к моей работе и за возможность работать в прекрасных условиях Отдела теоретической физики Института физики высоких энергий. Искренне благодарю директора ИФВЭ и руководителя моей кандидатской диссертации профессора Н.Е. Тюрина за большую помощь в решении многих проблем. Глубоко признателен своему первому научному руководителю профессору О.А. Хрусталеву за неоценимые уроки. Благодарю В.А. Петрова и А.П. Самохина за постоянную поддержку, А.В. Разумова, С.Н. Сторчака и Ю.Г. Строганова за обсуждения результатов и многочисленные полезные советы, а всех сотрудников ОТФ — за благоприятную для работы атмосферу.

Литература

[1] T. Regge and C. Teitelboim, *Ann. of Phys.* **88** (1974) 286.

[2] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1, (Wiley, N.Y., 1989) pp.208-211. (Имеется русский перевод: Гильберт Д., Курант Р. Методы математической физики, том 1, М., 1951).

[3] E. Noether, *Gott. Nachr. Math.-phys. Kl.* **2** (1918) 235 (Имеется русский перевод: Вариационные принципы механики. Сб. статей под ред. Полака Л.С. М.: Физматгиз, 1959, сс. 611-630).

[4] P.A.M. Dirac, *Phys. Rev.* **114** (1959) 924.

[5] P.A.M. Dirac, *Phys. Rev. Lett.* **2** (1959) 368.

[6] R. Arnowitt, S. Deser and Ch.W. Misner, in *Gravitation, an Introduction to Current Research*, edited by L. Witten (New York, 1963). (Имеется русский перевод: Эйнштейновский сборник. 1967. М.: Мир, 1967).

[7] J.A. Schouten, D.J. Struik. *Einfuhrung in die neueren methoden der Differentialgeometrie.* B. 2, Berlin, 1938. (Имеется русский перевод: И.А. Схоутен, Д.Дж. Стройк. Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т.2. М. ГИИЛ, 1948.)

[8] D. Hilbert, *Gott. Nachr. Math.-phys. Kl.*, **3** (1915) 395 (Имеется русский перевод: Вариационные принципы механики. Сб. статей под ред. Полака Л.С. М.: Физматгиз, 1959, сс. 589-598).

[9] F. Klein, *Gott. Nachr. Math.-phys. Kl.* (1917) 469;

F. Klein, *Gott. Nachr. Math.-phys. Kl.* (1918) 235;

F. Klein, *Gott. Nachr. Math.-phys. Kl.* (1918) 394. (Имеется русский перевод: Эйнштейновский сборник. 1980-1981. М.: Наука, 1985, сс. 226-254).

[10] A. Einstein, *Ann. der Phys.* B.**49** (1916) 769. (Имеется русский перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т.1, М.: Наука, 1965, сс. 452-504.)

A. Einstein, *Zs. Math. und Phys.* B.**62** (1913) 225-261 (Mit. M. Grossman). (Имеется русский перевод: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, т.1, М.: Наука, 1965, сс. 227-266.)

[11] А.А. Логунов, Лекции по теории относительности, ГНЦ ИФВЭ, Протвино, 2003;

А.А. Логунов, Теория гравитационного поля, М.: Наука, 2001.

[12] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva Univ., N.Y., 1964. (Имеется русский перевод: Дирак П. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968).

[13] R. Arnowitt, S. Deser and Ch.W. Misner, *J. Math. Phys.* **1** (1960) 434.

[14] P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **3** (1959) 66.

[15] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **130** (1963) 1253.

[16] B.S. DeWitt, *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113.

[17] A.J. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian systems.* Roma: Accademia Nasionale dei Lincei, 1976.

[18] R. Benguria, P. Cordero, C. Teitelboim, *Nucl. Phys.* **B122** (1976) 61.

[19] K. Kuchař, *J. Math Phys.* **17** (1976) 777; 792; 801; **18** (1977) 158.

[20] O. Reula, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 810.

[21] J.D. Brown and M. Henneaux, *J. Math. Phys.* **27** (1986) 489.

[22] J.D. Brown, M. Henneaux, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986) 207.

[23] P.G. Bergmann, A. Komar, *Int. J. Theor. Phys.* **5** (1972) 15.

[24] C. Teitelboim, *Ann. of Phys.* **79** (1973) 542.

[25] D. Christodoulou, N. O'Murchadha, *Commun. Math. Phys.* **80** (1981) 271.

[26] R. McOwen, *Commun. Pure Appl. Math.* **32** (1979) 783.

[27] C. Rovelli, *Nuovo Cim.* **B92** (1986) 49.

[28] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М. Наука, 1963.

[29] Ch.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation.* (Имеется русский перевод: Мизнер, Торн, Уилер. Гравитация. В 3-х тт. М. Мир, 1977)

[30] А.Е. Пухов. *Вестник МГУ, Сер. Физ., Астрон.* **24(3)** (1983) 41.

[31] В.О. Соловьев, Пространство Минковского и асимптотическая группа Пуанкаре в общей теории относительности. Препринт ИФВЭ ОТФ 83-193, Протвино, 1983.

[32] В.О. Соловьев, *ТМФ* **65** (1985) 400.

[33] В.О. Соловьев, Теоремы Нетер в каноническом формализме общей теории относительности. 1. Локальный подход. Препринт ИФВЭ ОТФ 81-179, Протвино, 1981.

[34] В.О. Соловьев, Теоремы Нетер в каноническом формализме общей теории относительности. 2. Глобальный подход. Препринт ИФВЭ ОТФ 82-18, Серпухов, ИФВЭ, 1982.

[35] V.O. Soloviev, Surface integrals of Poincare algebra in Ashtekar's formalism, Proceedings of the Sixth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity, Kyoto, June 23-29, 1991, World Scientific, 1992, pp. 751-753.

[36] V.O. Soloviev, *Phys. Lett. B* **292** (1992) 30.

[37] V.O. Soloviev, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 5747.

[38] V.O. Soloviev, *J. Math. Phys.* **43** (2002) 3636.

[39] V.O. Soloviev, *J. Math. Phys.* **43**, (2002) 3655.

[40] V.O. Soloviev, *J. Math. Sci.* **82** (1996) 3844.

[41] V.O. Soloviev, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **BP49** (1996) 35.

[42] V.O. Soloviev, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 7793.

[43] В.О. Соловьев, *ТМФ* **112** (1997) 142.

[44] V.O. Soloviev, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 5369.

[45] V.O. Soloviev, Divergences as a grading of the formal variational calculus, Talk given at the conference "Secondary Calculus and Cohomological Physics Moscow, August 25-30, 1997; math.DG/9809103.

[46] V.O. Soloviev, Divergences in formal variational calculus and boundary terms. In: Hamiltonian formalism, Symplectic Singularities and Geometry of Gauge Fields, Banach Center Publications, vol. 39, pp. 373-388, Warszawa, 1997; hep-th/9511130.

[47] V.O. Soloviev, New Poisson brackets from new Hamiltonian variables, Talk given in A2 Section of the 14 International Conference on General Relativity and Gravitation, Florence, August 6-12, 1995, GR-14 Abstracts, Florence, 1995, A79-80.

[48] V.O. Soloviev, Poisson brackets for total divergences, XXth International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics, Toyonaka, Japan, July 4-9, 1994, World Scientific, 1995, pp. 444-447.

[49] V.O. Soloviev, Total divergences in Hamiltonian formalism of field theory, Proceedings of the XVII Workshop, dedicated to the 140th Birth Anniversary of Henri Poincare, Protvino, June 27 - July 1, 1994, Protvino, 1995, pp. 197-201; hep-th/9508023.

[50] V.O. Soloviev, Boundary values as Hamiltonian variables: New Poisson brackets, Problems on High Energy Physics and Field Theory: Proceedings of the XVI Workshop, Protvino, September 14-17, 1993, Protvino, 1995, pp. 59-69.

[51] V.O. Soloviev, How much canonical are the Ashtekar variables? Abstracts of the 13th International Conference on General Relativity and Gravitation, Cordoba, Argentina, June 28 - July 4, 1992.

[52] V.O. Soloviev, *Phys. Rev.* **D61** (2000) 027502.

[53] V.O. Soloviev, Black hole entropy from Poisson brackets. High Energy Physics and Quantum Field Theory, Eds. B.B. Levchenko, V.I. Savrin. Proceedings of the XIV International Workshop, Moscow, May 27 — June 2, 1999. Moscow, 2000. pp. 461-466.

[54] В.О. Соловьев, Энтропия черных дыр и поверхностные члены в скобках Пуассона, *Теоретическая физика* **1** сс. 33-39. Самара. Изд-во СамГУ, 2000.

[55] K. Bering, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 7468.

[56] S. Carlip, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 2828.

[57] C.-S. Chu and P.-M. Ho, Noncommutative open string and D-brane, *Nucl.Phys.* **B550** (1999) 151;

M.M. Sheikh-Jabbari and A. Shirzad, Boundary conditions as Dirac constraints, *Eur.Phys.J.* **C19** (2001) 383;

J.M. Romero and J.D. Vergara, Boundary conditions as constraints, hep-th/0212035.

[58] В.И. Денисов, А.А. Логунов. Итоги науки и техники. Сер. соврем. проблемы матем., т. 21. М. ВИНИТИ, 1982.

[59] Л.Д. Фаддеев, *УФН*, **136** (1982) 435.

[60] В.И. Денисов, В.О. Соловьев, *ТМФ* **56** (1983) 301-314;

Л.Д. Фаддеев, *ТМФ* **56** (1983) 315;

В.И. Денисов, В.О. Соловьев, *ТМФ* **56** (1983) 316-320.

[61] Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986, сс. 21-22.

[62] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 183.

[63] V.S. Buslaev, L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, *Physica D* **18** (1986) 255.

[64] В.А. Аркадьев, А.К. Погребков, М.К. Поливанов, *ДАН* **298** (1988) 324;

В.А. Аркадьев, А.К. Погребков, М.К. Поливанов, *ТМФ* **75** (1988) 170.

[65] A. Kundu and B.B. Mallick, *J. Phys. A: Math.Gen.* **23** (1990) L709.

[66] В.Е. Захаров. *Прикл. мех. и техн. физ.*, **2** (1968) 86.

[67] J.W. Miles, *J. Fluid Mech.* **83** (1977) 153.

[68] D.M. Milder, *J. Fluid Mech.* **83** (1977) 159.

[69] D. Lewis, J. Marsden, R. Montgomery and T. Ratiu, *Physica* **D18** (1986) 391.

[70] H.D.I. Abarbanel, R. Brown and Y.M. Yang, *Phys. Fluids* **31** (1988) 2802.

[71] B.A. Kupershmidt, *The Variational Principles of Mechanics*, World Scientific, Singapore, 1992.

[72] J.C. Luke, *J. Fluid Mech.* **27** (1967) 395.

[73] L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1692.

[74] K. Bering, Family of Boundary Poisson Brackets, Phys.Lett. B486 (2000) 426-430.

[75] K. Bering, A note on non-locality and Ostrogradski's construction. Preprint UFIFT-HEP-00-18 hep-th/0007192.

[76] K. Bering, Product of Boundary Distributions, Preprint RU01-01-B (Rockefeller University), 24 pp. hep-th/0102136.

[77] C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics*, (Univ. Toronto Press, 1964) pp. 68-73. (Имеется русский перевод: Ланцош К. Вариационные принципы механики. М.: Мир, 1965, сс.92-96).

[78] H. Lamb, *Hydrodynamics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1932) p. 456. (Имеется русский перевод: Ламб Г. Гидродинамика, М.-Л.: ГИТТЛ, 1947).

[79] P.J. Olver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Graduate texts in mathematics) Springer-Verlag, N.Y., 1986. (Имеется русский перевод: Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989).

[80] P.J. Olver, in *Fluids and Plasmas: Geometry and Dynamics.* Edited by J.E. Marsden, Contemporary Mathematics **28**. AMS, Providence, 1984.

[81] R.L. Seliger and G.B. Whitham, *Proc. Roy. Soc.* **A305** (1968) 1. (Имеется русский перевод: Механика, 1969, No.5 (117) 99).

[82] В.Л. Бердичевский. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.

[83] С.А. Габов. Введение в теорию нелинейных волн. М.: Изд-во МГУ, 1988.

[84] И.М. Гельфанд, Л.А. Дикий, *УМН* **30** (1975) 67.

[85] A.M. Astashov, A.M. Vinogradov, *J. Geom. Phys.* **3** (1986) 263.

[86] B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, *УМН* **44** (1989) 29.

[87] В.И. Арнольд, Математические методы классической механики, М., Наука, 1974, с. 186.

[88] I.M. Anderson, *Mathematical foundations of the Einstein field equations*, Ph.D. thesis, University of Arizona, 1976.

[89] I.M. Anderson, *Aequationes Mathematicae* **17** (1978) 255.

[90] I.M. Anderson. Introduction to the variational bicomplex. In: *Mathematical aspects of classical field theory.* Eds. M.J. Gotay, J.E. Marsden and V. Moncrief, Contemporary Mathematics, **132** AMS, Providence, Rhode Island, 1992.

[91] S.J. Aldersley, *J. Math. Phys.* **20** (1979) 522.

[92] M.D. Kruskal, R.M. Miura, C.S. Gardner and N.J. Zabusky, *J. Math. Phys.* **11** (1970) 952.

[93] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, Интегралы и ряды, том 1, М., Наука, 1981.

[94] И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов, Обобщенные функции.1 М., Физматгиз, 1959;

В.С. Владимиров, Уравнения математической физики, М., Наука, 1967.

[95] B. Malgrange, *Ideals of differentiable functions*, Oxford University Press, 1966. (Имеется русский перевод: Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций, М.: Мир, 1968.)

[96] Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, И.Т. Тодоров, А.И. Оксак, Общие принципы квантовой теории поля, М., Наука, 1987.

[97] Ю.В. Егоров, *УМН* **45** (1990) 3.

[98] G.E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[99] H. Nicolai and H.-J. Matschull. Aspects of canonical gravity and supergravity. Preprint DESY 92-099, Hamburg, 1992.

[100] A. Nijenhuis, *Indagationes Math.* **17** (1955) 390.

[101] I. Dorfman, *Dirac Structures and Integrability of Nonlinear Evolution Equations.* John Wiley and Sons, New York, 1993.

[102] L. Dickey, *Soliton Equations and Hamiltonian Systems.* World Scientific, Singapore, 1991.

[103] А.М. Виноградов, *Математические заметки*, **47** (1990) 138.

[104] G. Barnich and M. Henneaux, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 5273.

[105] G. Barnich, R. Fulp, T. Lada and J. Stasheff, The sh Lie structure of Poisson brackets in field theory, Preprint CGPG-96/1-7, UNC-MATH-97/3; hep-th/9702176.

[106] L.A. Dickey, in *Higher homotopy structures in topology and mathematical physics*, Edited by J. McCleary, Contemporary Mathematics **227**. AMS, Providence, 1999; solv-int/9703001.

[107] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2244.

[108] A. Ashtekar, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 1587.

[109] A. Ashtekar, P. Mazur, C.G. Torre, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 2955.

[110] T. Jacobson, L. Smolin, *Nucl. Phys.* **B299** (1988) 295.

[111] C. Rovelli, L. Smolin, *Nucl. Phys.* **B331** (1990) 80.

[112] M. Henneaux, J.E. Nelson, C. Schomblond, *Phys. Rev.* **D39** (1989) 434.

[113] J.N. Goldberg, *Phys. Rev.* **D37** (1988) 2116.

[114] J.L. Friedman, I. Jack, *Phys. Rev.* **D37** (1988) 3495.

[115] B.P. Dolan, *Phys. Lett.* **B233** (1989) 89.

[116] L. Smolin, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 6417.

[117] T. Thiemann, *Class. Quant. Grav.* **12** (1995) 181.

[118] Черные дыры. Сборник статей. (“Новости фундаментальной физики”, вып.9) Пер. с англ. М. Мир, 1978.

[119] Mu-In Park, *Nucl. Phys.* **B544** (1999) 377;

Mu-In Park, Jeongwon Ho, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 5595.

[120] S.N. Solodukhin, *Phys.Lett.* **B 454** (1999) 213.

[121] I.M. Anderson and C.G. Torre, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4109.

[122] C.G. Torre, Local Cohomology in Field Theory (with applications to the Einstein equations), Lectures given at the Second Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics held in Tlaxcala, Mexico from December 1–7, 1996. hep-th/9706092.

[123] G. Barnich and F. Brandt, *Nucl.Phys.* **B 633** (2002) 3.

[124] J. Fjelstad and S. Hwang, *Phys.Lett.* **B 466** (1999) 227.

[125] E. Getzler, A Darboux theorem for Hamiltonian operators in the formal calculus of variations, Preprint RIMS, Kyoto, 2000; math.DG/0002164

[126] R. Beig and N.Ó. Murchadha, *Ann. Phys.* **174** (1987) 463-498.

[127] Л.П. Грищук, А.Н. Петров, *ЖЭТФ* **92** (1987) 9-19.

[128] R. Bartnik, *Commun. Pure Appl. Math.* **39** (1986) 661.

[129] P.T. Chruściel, Boundary conditions at spacelike infinity from a Hamiltonian point of view, in *Topological and global structure of spacetime*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys. **No. 138**, pp. 49-59, Plenum Press, New York, 1986;

P.T. Chruściel, *Class. Quant. Grav.* **3** (1986) L115.

[130] S. Carlip, *Phys.Rev.Lett.* **83** (1999) 5596.

[131] S. Carlip, *Class. Quant. Grav.* **16** (1999) 3327-3348.

[132] M. Hotta, K. Sasaki, T. Sasaki, *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) 1823;

O. Dreyer, A. Ghosh, J. Wisniewski, *Class. Quant. Grav.* **18** (2001) 1929;

H. Terashima, *Phys. Rev.* **D64** (2001) 064016;

M. Cvitan, S. Pallua, P. Prester, *Phys. Lett.* **B 546** (2002) 119; *Phys. Lett.* **B 555** (2003) 248;

A. Giacomini and N. Pinamonti, *JHEP* **0302** (2003) 014.