И Н С Т И Т У Т   Ф И З И К И   В Ы С О К И Х   Э Н Е Р Г И Й

И Ф В Э 81-179
ОТФ

В.О.Соловьев

ТЕОРЕМЫ НЕТЕР В КАНОНИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Локальный подход

Серпухов 1981

В.О.Соловьев

ТЕОРЕМЫ НЕТЕР В КАНОНИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Локальный подход

M - 24

<u>Аннотация</u>

Соловьев В.О.

Теоремы Нетер в каноническом формализме общей теории относительности. 1. Локальный подход. Серпухов, 1981.

15 стр. (ИФВЭ ОТФ 81-179).

Библиогр. 12.

Канонический формализм ОТО исследуется методом бесконечно малых смешений Э.Нетер и Ф.Клейна. Получен вид несобственного закона сохранения и проведено сравнение с ковариантным подходом.

<u>Abstract</u>

Soloviev V.O.

Noether Theorem in Canonical Formalism of General Relativity. 1. Local Approach. Serpukhov, 1981.

p. 15. (IHEP 81-179).

Refs. 12.

Canonical formalism of General Relativity is investigated by infinitesimal translation method by E. Noether and F.Klein. The non-proper conservation law is obtained and compared with covariant approach.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в работах [1] были подвергнуты критике широко распространенные [2] представления о роли энергии-импульса в общей теории относительности. Выяснилось, что решение этого вопроса с помощью псевдотензора, данное самим создателем ОТО [3] и воспринятое без существенных изменений большинством его последователей, не может служить твердой основой для современных исследований.

В начале шестидесятых годов проблема энергии-импульса получила новую интерпретацию в связи с приведением ОТО к каноническому виду [4]. Предложенные Арновиттом, Дезером и Мизнером (АДМ) величины P^{μ} получались без использования псевдотензора и трактовались как вектор энергии-импульса замкнутой системы (гравитационное поле плюс материя). Однако доказательство АДМ является некорректным, на что указывали, например, Редже и Тейтельбойм [5], и это ставит под сомнение конечные выводы. Настоящая работа имеет целью детальное исследование канонического формализма ОТО методом бесконечно-малых смещений, идущим от классических статей Э. Нетер и Ф. Клейна [6], и будет состоять из двух частей. В первой рассматривается исключительно локальный подход, во второй на его основе делается переход к глобальному.

2. ГАМИЛЬТОНИЗАЦИЯ ОТО

Создание гамильтонова формализма ОТО в первую очередь было вызвано желанием построить квантовую теорию гравитации. Однако первые шаги/7/ могли быть сделаны лишь после развития Дираком/8/ обобщенной /9/ гамильтоновой динамики (1950). Вскоре было понято/9/ , что значительные упрощения получаются при отказе от явной 4-мерной ковариантности. Важное значение имели также работы Лихнеровича и Фурес-Брюа /10/ по проблеме начальных условий в ОТО. Модифицировав свой метод (1958), Дирак/11/ смог продвинуться дальше, вводя калибровочные условия и исключая, таким /4/ образом, некоторые степени свободы. Наконец, Арновитт, Дезер и Мизнер/4/ (1960) нашли переменные, в которых полностью прояснился геометрический смысл канонического подхода, и сделали формализм готовым к употреблению, после чего настала очередь квантовых гравитационистов (Де Витт)

Следуя АДМ, исходим из гильбертовского действия для гравитационного поля:

$$I = \int \sqrt{-{}^{(4)}g}\,{}^{(4)}R\,d^4x, \tag{1}$$

где

$${}^{(4)}g = \mathrm{Det}\,\|{}^{(4)}g_{\mu\nu}\|, \qquad {}^{(4)}R = {}^{(4)}g^{\mu\nu}\,{}^{(4)}R_{\mu\nu},$$

$${}^{(4)}R_{\mu\nu} = {}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - {}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + {}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\,{}^{(4)}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - {}^{(4)}\Gamma^{\beta}_{\alpha\mu}\,{}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu},$$

$${}^{(4)}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\,{}^{(4)}g^{\beta\alpha}\left({}^{(4)}g_{\alpha\mu,\nu} + {}^{(4)}g_{\alpha\nu,\mu} - {}^{(4)}g_{\mu\nu,\alpha}\right),$$

${}^{(4)}g^{\alpha\beta}\,{}^{(4)}g_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$, δ^{α}_{γ} – символ Кронекера. Здесь и ниже греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3. Латинские индексы будут принимать значения 1, 2, 3. Используется сигнатура (–1,1,1,1). Индекс (4) указывает на принадлежность величины к 4-мерной геометрии, те же величины без индекса относятся к 3-геометрии.

Основным моментом гамильтонизации является разбиение 4-мерного пространства-времени на однопараметрическое семейство пространственно-подобных гиперповерхностей. Нарушение явной 4-мерной симметрии, о котором говорилось выше, возникает потому, что в качестве параметра, нумерующего гиперповерхность, выбирается координата $x^0 = t$, а внутренние координаты отождествляются с x^i. Тогда индуцированная 3-метрика есть ${}^{(4)}g_{ij} = g_{ij}$, она будет положительно определенной. На основе g_{ij} строится вся внутренняя риманова геометрия, с ее помощью поднимаются и опускаются латинские индексы.

Расстояние между точками, лежащими на близких гиперповерхностях t и $t + dt$ и имеющими близкие значения внутренних координат x^i и $x^i + dx^i$, дается формулой

$$ds^2 = g_{ij}\,(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dx) - (N dt)^2,$$

где $N = (-{}^{(4)}g^{oo})^{-1/2}$ – так называемая функция смещения, $N^i = -\dfrac{{}^{(4)}g^{oi}}{{}^{(4)}g^{oo}}$ – функция сдвига. Вектор единичной нормали к гиперповерхности имеет вид $n^\alpha = \left(\dfrac{1}{N}, -\dfrac{N^i}{N}\right)$. Производные по x^0 от 3-метрики связаны со второй квадратичной формой гиперповерхности K_{ij}:

$$g_{ij,o} = N_{i;j} + N_{j;i} - 2NK_{ij},$$

точка с запятой будет всюду обозначать ковариантную по отношению к 3-геометрии производную. Сопряженными к g_{ij} импульсами оказываются линейные комбинации K^{ij} :

$$\pi^{ij} = -\sqrt{g}\,(K^{ij} - g^{ij}K) \equiv \sqrt{-{}^{(4)}g}\,(g^{ik}g^{j\ell} - g^{ij}g^{k\ell})\,{}^{(4)}\Gamma^{o}_{k\ell}.$$

Действие (1), будучи выражено через новые переменные g_{ij}, N, N_i и π^{ij}, принимает вид

$$I = \int(\pi^{ij}g_{ij,o} - N\mathcal{H}^o - N_i\,\mathcal{H}^i)\,d^4x +$$

$$+ \int\{\partial_o[-\pi] + \partial_k[-2\sqrt{g}\,N^{,k} - 2N_i(\pi^{ik} - g^{ik}\frac{\pi}{2})]\}d^4x, \qquad (2)$$

где $\mathcal{H}^{\circ} = -\frac{1}{\sqrt{g}}(gR + \frac{\pi^2}{2} - Sp\,\pi^2)$, $\mathcal{H}^{i} = -2\pi^{ij}_{\;;j}$, $Sp\,\pi^2 = \pi_{ij}\,\pi^{ij}$. Поскольку N и N_i имеют равные нулю сопряженные импульсы, они не являются динамическими переменными, а служат лагранжевыми множителями при связях $\mathcal{H}^{\circ} = 0$ и $\mathcal{H}^{i} = 0$. Эти связи представляют собой 4 из 10 уравнений Эйнштейна, свернутых с вектором нормали:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathcal{H}^{\circ} \equiv n^{\alpha} n^{\beta}({}^{(4)}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\,{}^{(4)}g_{\alpha\beta}\,{}^{(4)}R),$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\mathcal{H}_{i} \equiv n^{\alpha}({}^{(4)}R_{\alpha i} - \frac{1}{2}\,{}^{(4)}g_{\alpha i}\,{}^{(4)}R).$$

Оставшиеся 6 уравнений Эйнштейна второго порядка эквивалентны 12 гамильтоновым уравнениям :

$$g_{ij,o} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}}\,, \qquad \pi^{ij}_{\;,o} = -\frac{\delta H}{\delta g_{ij}}\,,$$

где $H = \int N_{\mu}\mathcal{H}^{\mu} d^4x$ с точностью до поверхностных членов, рассмотрение которых оставляем до глобального анализа ($N_o = N$).

3. ВАРИАЦИЯ ДЕЙСТВИЯ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ БЕСКОНЕЧНО-МАЛОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ КООРДИНАТ

Из формулы (1) очевидна инвариантность действия при произвольном преобразовании координат:

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\circ}, x^1, x^2, x^3). \tag{3}$$

Однако то же самое действие, записанное в каноническом виде (2), явно инвариантно лишь относительно преобразований более узкого класса:

$$\begin{aligned} x^{\circ'} &= x^{\circ} + \xi^{\circ}(x^{\circ}), \\ x^{i'} &= x^{i} + \xi^{i}(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \tag{4}$$

и только если помнить, что π^{ij} - величины не независимые, а связанные с $g_{ij,o}$ соотношениями, которые в гамильтоновом формализме являются уравнениями движения

$$g_{ij,o} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} \equiv N_{i;j} + N_{j;i} + \frac{2N}{\sqrt{g}}(\pi_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \pi),$$

можно говорить об инвариантности при преобразованиях (3).

Рассмотрим вариацию действия при бесконечно малом преобразовании координат $x^{\mu'} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$, $\delta x^{\mu} = \xi^{\mu}(x)$. Вариации полей можно представить в виде

$$\delta f(x) \equiv f'(x') - f(x) = (f'(x') - f(x')) + (f(x') - f(x)) \approx \bar{\delta} f(x) + f_{,\mu}(x) \delta x^{\mu},$$

где $\bar{\delta}$ коммутирует с производными по координатам. Конкретный вид δf зависит от геометрической структуры f . Например, для метрики и символов Кристоффеля получаем

$$\bar{\delta}^{(4)} g_{\mu\nu} = - {}^{(4)}g_{\alpha\nu} \xi^{\alpha}_{,\mu} - {}^{(4)}g_{\mu\alpha} \xi^{\alpha}_{,\nu} - {}^{(4)}g_{\mu\nu,\alpha} \xi^{\alpha},$$

$$\bar{\delta}^{(4)} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = - {}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} \xi^{\delta}_{,\gamma} - {}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\delta\gamma} \xi^{\delta}_{,\beta} + {}^{(4)}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma} \xi^{\alpha}_{,\delta} - \xi^{\alpha}_{,\beta\gamma} .$$

Что касается δg_{ij} , δN , δN_i , $\delta \pi^{ij}$, то в этом случае ничего нельзя сказать, не используя явных выражений этих величин через 4-мерные ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ и ${}^{(4)}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$. Напротив, при (3+1)-преобразованиях (4) можно не оглядываться на 4-мерие, при этом

$$\begin{aligned}
\delta g_{ij} &= -g_{kj} \xi^{k}_{,i} - g_{ik} \xi^{k}_{,j} , \\
\delta N &= -N \xi^{o}_{,o} , \\
\delta N^{i} &= -N^{i} \xi^{o}_{,o} + N^{k} \xi^{i}_{,k} , \\
\delta \pi^{ij} &= -\pi^{ij} \xi^{k}_{,k} + \pi^{ik} \xi^{j}_{,k} + \pi^{kj} \xi^{i}_{,k} .
\end{aligned} \qquad (5)$$

Приведем общий вид коммутирующих вариаций $\bar{\delta}$ для преобразований (3):

$$\bar{\delta} g_{ij} = - g_{ij,o} \xi^{o} - \underline{N_i \xi^{o}_{,j}} - \underline{N_j \xi^{o}_{,i}} - \xi_{i;j} - \xi_{j;i} ,$$

$$\bar{\delta} g^{ij} = -g^{ij}_{\ \ ,o} \xi^{o} + \underline{N^{i} \xi^{o,j}} + \underline{N^{j} \xi^{o,i}} + \xi^{i;j} + \xi^{j;i} ,$$

$$\bar\delta N = -(N\xi^{o})_{,o} + \underline{N N^{k} \xi^{o}_{,k}} - N_{,k}\xi^{k},$$

$$\bar\delta N_{i} = -(N_{i}\xi^{o})_{,o} + \underline{(N^{2} - N_{k}N^{k})\xi^{o}_{,i}} - N_{i;k}\xi^{k} - N_{k}\xi^{k}_{;i} - \underline{g_{ik}\xi^{k}_{,o}}, \qquad (6)$$

$$\bar\delta\pi^{ij} = -\pi^{ij}_{,o}\xi^{o} + \underline{N\sqrt{g}\,(g^{ij}\xi^{o;k}_{;k} - \xi^{o;ij})} - \underline{\sqrt{g}\,(N^{,i}\xi^{o,j} + N^{j}\xi^{o,i}) +}$$

$$\underline{+(N^{i}\pi^{kj} + N^{j}\pi^{ik} - N^{k}\pi^{ij} + 2\sqrt{g}\,g^{ij}N^{,k})\xi^{o}_{,k}} - (\pi^{ij}\xi^{k})_{;k} + \pi^{ik}\xi^{j}_{;k} + \pi^{kj}\xi$$

Аналогичные выражения для $(3+1)$-преобразований получатся, если опустит подчеркнутые члены.

Вариация действия для двух вариантов отличается. В случае $(3+1)$-ва риации имеем

$$^{(3+1)}\delta I = \delta\int L\,dt = \delta\int \mathcal{L}\,d^{4}x = \int[\bar\delta\mathcal{L} + (\mathcal{L}\xi^{\mu})_{;\mu}]\,d^{4}x =$$

$$= \int\Big[\frac{\delta L}{\delta N}\bar\delta N + \frac{\delta L}{\delta N_{i}}\bar\delta N_{i} + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar\delta g_{ik} + \frac{\delta L}{\delta\pi^{ik}}\bar\delta\pi^{ik} + \partial_{a}\,{}^{(3+1)}J^{a}\Big]\,d^{4}x,$$

где

$$\frac{\delta L}{\delta N} = -\mathcal{H}^{o}, \qquad \frac{\delta L}{\delta N_{i}} = -\mathcal{H}^{i},$$

$$\frac{\delta L}{\delta\pi^{ik}} = g_{ik,o} - N_{i;k} - N_{k;i} - \frac{2N}{\sqrt{g}}\Big(\pi_{ik} - g_{ik}\frac{\pi}{2}\Big),$$

$$\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} = -\pi^{ik}_{,o} - N\sqrt{g}\,\Big(R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}R\Big) + \sqrt{g}\,(N^{;ik} - g^{ik}N^{;m}_{;m}) +$$

$$+ \frac{N}{\sqrt{g}}(\pi\pi^{ik} - 2\pi^{ij}\pi^{k}_{j}) - \frac{g^{ik}}{2}\frac{N}{\sqrt{g}}\Big(\frac{\pi^{2}}{2} - \mathrm{Sp}\,\pi^{2}\Big) + \qquad (6a)$$

$$+ (N^{m}\pi^{ik})_{;m} - (N^{i}\pi^{km} + N^{k}\pi^{im})_{;m},$$

$$^{(3+1)}J^{o} = -r^{o}_{o}\xi^{o} - r^{o}_{k}\xi^{k} + \mu^{oi}_{k}\xi^{k}_{;i},$$

$$^{(3+1)}J^{\ell} = -r^{\ell}_{o}\xi^{o} - r^{\ell}_{k}\xi^{k} + \mu^{\ell o}_{o}\xi^{o}_{,o} + \mu^{\ell k}_{i}\xi^{i}_{;k} + \sigma^{\ell ik}_{m}\xi^{m}_{;ik}.$$

В случае 4-преобразований (3) нельзя считать $\frac{\delta L}{\delta \pi^{ik}}$ отличным от нуля, поскольку ранее мы уже воспользовались уравнением

$$\frac{\delta L}{\delta \pi^{ik}} \equiv - g_{ik,o} + \frac{\delta H}{\delta \pi^{ik}} = 0$$

при выводе формулы для $\bar{\delta} \pi^{ik}$. Получаем

$${}^{(4)}\delta I = \int [\frac{\delta L}{\delta N} \bar{\delta} N + \frac{\delta L}{\delta N_i} \bar{\delta} N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}} \bar{\delta} g_{ik} + \partial_\alpha {}^{(4)}J^\alpha] d^4 x,$$

где

$${}^{(4)}J^o = - r^o_o \xi^o - r^o_k \xi^k + \mu^{ok}_o \xi^o_{,k} + \mu^{oi}_k \xi^k_{;i} + \sigma^{oik}_o \xi^o_{;ik},$$

$${}^{(4)}J^\ell = - r^\ell_o \xi^o - r^\ell_k \xi^k + \mu^{\ell o}_o \xi^o_{,o} + \mu^{\ell k}_o \xi^o_{,k} + \mu^{\ell k}_i \xi^i_{;k} +$$

$$+ \mu^{\ell o}_k \xi^k_{,o} + \sigma^{\ell ik}_o \xi^o_{;ik} + \sigma^{\ell ik}_m \xi^m_{;ik} + \sigma^{\ell os}_o \xi^o_{,os}.$$

Полезно также выразить ${}^{(4)}J^\alpha$ через обычные производные от $\xi^\mu(x)$:

$${}^{(4)}J^\alpha = - \tilde{r}^\alpha_\beta \xi^\beta + \tilde{\mu}^{\alpha\gamma}_\beta \xi^\beta_{,\gamma} + \tilde{\sigma}^{\alpha\gamma\delta}_\beta \xi^\beta_{,\gamma\delta}.$$

Связь между этими представлениями дается формулами

$$\tilde{r}^\alpha_o = r^\alpha_o, \quad \tilde{r}^o_k = r^o_k - \Gamma^p_{sk} \mu^{os}_p, \quad \tilde{\mu}^{ok}_o = \mu^{ok}_o - \Gamma^k_{sp} \sigma^{osp}_o,$$

$$\tilde{r}^\ell_k = r^\ell_k - \Gamma^i_{ks} \mu^{\ell s}_i - (\Gamma^m_{ik,s} + \Gamma^m_{sp} \Gamma^p_{ik} - \Gamma^p_{is} \Gamma^m_{kp}) \sigma^{\ell is}_m,$$

$$\tilde{\mu}^{ok}_i = \mu^{ok}_i, \quad \tilde{\mu}^{\ell o}_o = \mu^{\ell o}_o, \quad \tilde{\mu}^{\ell k}_o = \mu^{\ell k}_o - \Gamma^k_{is} \sigma^{\ell is}_o.,$$

$$\tilde{\mu}^{\ell p}_s = \mu^{\ell p}_s + (\Gamma^m_{is} \delta^p_k + \Gamma^m_{ks} \delta^p_i - \Gamma^p_{ik} \delta^m_s) \sigma^{\ell ik}_m, \quad \tilde{\mu}^{\ell o}_k = \mu^{\ell o}_k,$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha\beta\gamma}_\delta = \sigma^{\alpha\beta\gamma}_\delta.$$

"Если интеграл I инвариантен по отношению к некоторой группе G_ρ, то ρ линейно-независимых комбинаций лагранжевых выражений обращаются в дивергенции ..."/6/.

Поскольку I инвариантен при произвольной области интегрирования, то выполняется равенство

$$\bar{\delta}\mathfrak{L} + (\mathfrak{L}\,\xi^\beta)_{,\beta} = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при четырех различных постоянных величинах ξ^β, получим четыре соотношения:

$$g_{ik,\beta}\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} + \pi^{ik}_{,\beta}\frac{\delta L}{\delta \pi^{ik}} + N_{,\beta}\frac{\delta L}{\delta N} + N_{i,\beta}\frac{\delta L}{\delta N_i} \equiv -\tilde{\tau}^{\alpha}_{\beta,\alpha}.$$

Здесь 4- и (3+1)-подходы эквивалентны, поскольку при постоянных смещениях вариация $\delta f = 0$ независимо от геометрической структуры f и $\bar{\delta} f = -f_{,\mu}\,\delta x^\mu$.

Если изменить действие на поверхностный член, зависящий от g_{ik}, π^{ik}, N, N^i, но не зависящий явным образом от координат, то условия теоремы останутся в силе и мы получим новое тождество, в котором, однако, левая часть не изменится. Это означает, что и правые части будут равны:

$$\tilde{\tau}^{\alpha}_{\beta,\alpha} \equiv \tilde{\tilde{\tau}}^{\alpha}_{\beta,\alpha},$$

т.е. псевдотензоры могут отличаться только на выражение, дивергенция которого равна нулю тождественно. Для глобального подхода это будет означать эквивалентность всех псевдотензоров, и, соответственно, несущественность поверхностных членов в действии.

Приведем выражение для $\tilde{\tau}^{\alpha}_{\beta}$, полученное из ${}^{(4)}J^{\alpha}$:

$$\tilde{\tau}^{\circ}_{\circ} = \underline{N_\mu \mathcal{H}^\mu} + \underline{\underline{2[\sqrt{g}\,N^{,k} + N_i(\pi^{ik} - g^{ik}\frac{\pi}{2})]_{,k}}},$$

$$\tilde{\tau}^{\circ}_{k} = \underline{\mathcal{H}_k} + 2\pi^{i}_{k,i} - \underline{\underline{\pi_{,k}}},$$

$$\tilde{r}^{\ell}_{o} = G^{ikm\ell}(N g_{ik,o;m} - N_{,m} g_{ik,o}) + 2N_i \pi^{i\ell}_{,o} +$$

$$+ (N^m \pi^{k\ell} + N^k \pi^{m\ell} - N^\ell \pi^{km}) g_{km,o} - \underline{\underline{2[\sqrt{g}\, N'^\ell + N_i(\pi^{i\ell} - g^{i\ell}\frac{\pi}{2})]_{,o}}},$$

$$\tilde{r}^\ell_s = G^{ikm\ell}[N(g_{ik,sm} - \Gamma^p_{mi}\, g_{pk,s} - \Gamma^p_{mk}\, g_{ip,s}) -$$

$$- N_{,m}\, g_{ik,s}] + 2N_i \pi^{i\ell}_{,s} + (N^m\pi^{k\ell} + N^k\pi^{m\ell} - N^\ell\pi^{km})\, g_{km,s} -$$

$$- (\pi^{ij} g_{ij,o} - \underline{N_\mu \mathcal{H}^\mu})\delta^\ell_s +$$

$$+ \{\pi_{,o} + \underline{\underline{2[\sqrt{g}\, N'^m + N_i(\pi^{im} - g^{im}\frac{\pi}{2})]}}\}\delta^\ell_s -$$

$$\underline{\underline{- 2[\sqrt{g}\, N'^\ell + N_i(\pi^{i\ell} - g^{i\ell}\frac{\pi}{2})]_{,s}}},$$

где

$$G^{ikm\ell} = \frac{\sqrt{g}}{2}(g^{im} g^{k\ell} + g^{i\ell} g^{km} - 2g^{ik} g^{m\ell}),$$

одной чертой подчеркнуты линейные комбинации связей, двумя чертами – члены, образующие дивергенцию антисимметричной величины, и возникшие из поверхностного члена в $\mathfrak{L}$.

5. ВТОРАЯ ТЕОРЕМА НЕТЕР

"Если интеграл I инвариантен по отношению к группе $G_{\infty\rho}$, в которой встречаются производные до σ-производной, то имеют место ρ тождественных соотношений между лагранжевыми выражениями и их производными до σ-порядка"... /6/.

В равенстве

$$\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta}N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta}N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta}g_{ik} + \partial_\alpha {}^{(4)}J^\alpha = 0$$

подставим вместо $\bar{\delta}N$, $\bar{\delta}N_i$ и $\bar{\delta}g_{ik}$ их выражения (6) и перебросим производные с $\xi^\mu(x)$ на лагранжевы выражения, выделив возникающую при этом полную дивергенцию

$$\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta}N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta}N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta}g_{ik} = {}^{(4)}B_\mu \xi^\mu + \partial_\mu {}^{(4)}S^\mu .$$

Рассматривая теперь только те $\xi^\mu(x)$, которые обращаются на границе области интегрирования в нуль вместе с их первыми и вторыми производными, а внутри произвольны, мы видим, что должны выполняться четыре тождества ${}^{(4)}B_\mu = 0$.

$$N\left(\frac{\delta L}{\delta N}\right)_{,0} + N_i\left(\frac{\delta L}{\delta N_i}\right)_{,0} - g_{ik,0}\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} + \left[2N_i\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} - NN^k\frac{\delta L}{\delta N} - (N^2 - N_iN^i)\frac{\delta L}{\delta N_k}\right]_{,k} = 0,$$

$$-N_{,k}\frac{\delta L}{\delta N} - N_{i;k}\frac{\delta L}{\delta N_i} + \left(g_{ik}\frac{\delta L}{\delta N_i}\right)_{,0} + \left[N_k\frac{\delta L}{\delta N_i} + 2g_{k\ell}\frac{\delta L}{\delta g_{i\ell}}\right]_{;i} = 0.$$

Воспользовавшись формулами (5), получаем для (3 + 1)-подхода

$$\frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta}N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta}N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta}g_{ik} + \frac{\delta L}{\delta \pi^{ik}}\bar{\delta}\pi^{ik} = {}^{(3+1)}B_\mu \xi^\mu + \partial_\mu {}^{(3+1)}S^\mu,$$

где

$${}^{(3+1)}S^0 = -{}^{(3+1)}t^0_0\,\xi^0, \qquad {}^{(3+1)}t^0_0 = -N_\mu \mathcal{H}^\mu,$$

$${}^{(3+1)}S^i = -{}^{(3+1)}t^i_k\,\xi^k, \qquad {}^{(3+1)}t^i_k = -N_k\mathcal{H}^i + 2g_{k\ell}\frac{\delta L}{\delta g_{i\ell}} +$$

$$+ \left(-\pi^{\ell i}\delta^m_k + \delta^i_k\,\pi^{\ell m}\right)\frac{\delta L}{\delta \pi^{\ell m}}.$$

Заметим здесь, что нельзя обратить в нуль на границах 4-мерной области интегрирования $\xi^{o}(x^{o})$ и $\xi^{k}(x^{i})$ так, чтобы внутри они остались произвольными. Поэтому приходится рассматривать по отдельности:

1-инвариантность $\delta x^{o} = \xi^{o}(x^{o})$, $\delta x^{k} = 0$ и

3-инвариантность $\delta x^{o} = 0$, $\delta x^{k} = \xi^{k}(x^{i})$.

В первом случае получаем тождество

$$ {}^{(3+1)}B_{o} - r_{o,\ell}^{\ell} - \mu_{o,\ell o}^{\ell o} = 0 , $$

где r_{o}^{ℓ} и $\mu_{o}^{\ell o}$ взяты из ${}^{(3+1)}J^{\ell}$, во втором – 3 тождества

$$ {}^{(3+1)}B_{k} - r_{k,o}^{o} - \mu_{k,o;i}^{oi} + \mu_{\ell}^{oi}\Gamma_{ik,o}^{\ell} = 0, $$

где используются r_{k}^{o}, μ_{k}^{oi}, из ${}^{(3+1)}J^{o}$.

6. НЕСОБСТВЕННЫЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ

Пусть $\xi^{\mu}(x)$ и производные не равны нулю на границе области интегрирования. Тогда, поскольку ${}^{(4)}B_{\mu} \equiv 0$, будет $\partial_{\alpha}({}^{(4)}J^{\alpha} + {}^{(4)}S^{\alpha}) = 0$, где ${}^{(4)}S^{\alpha} = -t_{\beta}^{\alpha}\xi^{\beta}$, $t_{o}^{o} = -N_{\mu}\mathcal{H}^{\mu}$, $t_{k}^{o} = -\mathcal{H}_{k}$,

$$ t_{o}^{k} = 2N_{i}\frac{\delta L}{\delta g_{ik}} + NN^{k}\mathcal{H}^{o} + (N^{2} - N_{\ell}N^{\ell})\mathcal{H}^{k}, \quad t_{\ell}^{k} = -N_{\ell}\mathcal{H}^{k} + 2g_{i\ell}\frac{\delta L}{\delta g_{ik}}. $$

Ввиду линейной независимости $\xi^{\mu}(x)$ и их производных (7) распадается на такие тождества:

$$ \partial_{\alpha}\tilde{r}_{\beta}^{\alpha} = -\partial_{\alpha}t_{\beta}^{\alpha} , \tag{7а} $$

$$ \tilde{r}_{\beta}^{\alpha} + t_{\beta}^{\alpha} = \tilde{\mu}_{\beta,\gamma}^{\gamma\alpha} , \tag{7б} $$

$$ \tilde{\mu}_{\beta}^{\{\alpha\gamma\}} = -\tilde{\sigma}_{\beta,\delta}^{\delta\{\alpha\gamma\}} , \tag{7в} $$

$$ \tilde{\sigma}_{\beta}^{\{\alpha\gamma\delta\}} = 0. \tag{7г} $$

Здесь { } означает симметризацию, а [ ] ниже – антисимметризацию. Учитывая (7в), можно представить (7б) в виде

$$\tilde{\tau}^{\alpha}_{\beta} = -t^{\alpha}_{\beta} + \tilde{\mu}^{[\gamma\alpha]}_{\beta,\gamma} + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^{\alpha\{\gamma\delta\}}_{\beta,\gamma\delta},$$

откуда с учетом (7г) следует (7а). Псевдотензор, таким образом, тождественно равен линейным комбинациям лагранжевых выражений плюс выражение, дивергенция которого тождественно исчезает. Это его свойство и было названо в работах /6/ несобственным законом сохранения.

Отметим, что для глобального анализа важную роль будет играть тождество (7а), поскольку для перехода к интегральной форме нужно интегрировать $\partial_{\alpha}\tau^{\alpha}_{\beta}$ по 4-мерному объему, и (7а) означает, что можно вместо дивергенции псевдотензора интегрировать дивергенцию от определенной линейной комбинации лагранжевых производных. Заметим, что в общековариантном формализме аналогом (7а) будет тождество

$$\partial_{\mu}\tau^{\mu}_{\nu} = -\partial_{\mu}\left(2\,{}^{(4)}g_{\nu\alpha}\frac{\delta L}{\delta\,{}^{(4)}g_{\alpha\mu}}\right). \tag{8}$$

В сущности, псевдотензором можно называть любую величину τ^{μ}_{ν}, для которой справедливо (8), и различные псевдотензоры могут быть получены /1/ непосредственно из уравнений движения ОТО в общековариантном формализме. Для этого нужно только выделять выражения, имеющие тождественно равную нулю дивергенцию и являющиеся тензорными плотностями при линейных преобразованиях координат пространства-времени. В уравнениях электродинамики есть только одна аналогичная величина – $F^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu}$, в уравнениях Янга–Миллса – две: $\vec{F}^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu}$ и $\partial_{\nu}(\overrightarrow{\partial^{\mu}A^{\nu}} - \overrightarrow{\partial^{\nu}A^{\mu}})$, в ОТО, в силу неполиномиальности уравнений, число таких величин, а следовательно, и псевдотензоров, бесконечно.

В заключение заметим, что для (3+1)-подхода мы будем иметь меньше тождеств. Например, вместо ${}^{(4)}t^{\alpha}_{\beta}$ появляются только ${}^{(3+1)}t^{o}_{o}$ и ${}^{(3+1)}t^{i}_{k}$, и нет тождества, аналогичного

$$\partial_{\alpha}\,{}^{(4)}J^{\alpha} = \partial_{\alpha}\left({}^{(4)}t^{\alpha}_{\beta}\,\xi^{\beta}\right).$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше мы показали, что дает анализ бесконечно малых смещений в гамильтоновом формализме ОТО при локальном подходе. Как и следовало ожидать, качественно наши результаты не отличаются от полученных в работах/6/ для общековариантного формализма.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.А.Логунову и О.А.Хрусталеву за постановку задачи и постоянный интерес к работе, В.И.Денисову, М.А.Мествиришвили, А.В.Разумову за ценные обсуждения, а также А.Е.Пухову за выяснение некоторых вопросов, касающихся гамильтонова формализма ОТО.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Логунов,В.И.Денисов,А.А.Власов,М.А.Мествиришвили,В.Н.Фоломешкин. ТМФ.40.291(1979);А.А.Власов.В.И.Денисов,А.А.Логунов,М.А.Мествиришвили. ТМФ.43, 147 (1980); В.И.Денисов.А.А.Логунов. ТМФ, 43, 187 (1980).
2. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., "Наука", 1973.
3. A.Einstein. Sitz. press. Acad. Wiss.2,1111(1916);1, 448 (1918) (перевод см.: А.Эйнштейн. Собрание научных трудов, т. 1, М., "Наука", 1965).
4. R.Arnowitt, S.Deser, C.W.Misner. The Dynamics of General Relativity. In: Gravitation, an Introduction to Current Research. Louis Witten (Ed). New-York, London, 1963 (перевод см.: Эйнштейновский сборник, 1967. М., "Наука", 1967).
5. T.Reflge, C.Teitelboim. Ann. Phys. (N.Y.) 88, 286 (1974).
6. E.Norther. Nachr. Kon. Ges. Wiss. Gottingen. Math. Phys., Kl., 235 (1918). (перевод см.: Вариационные принципы механики. Под ред. Л.С.Полака. М., изд-во "Физматгиз", 1959);
F.Klein. Nachr.Ges. Wiss. Gottingen, Math. Phys. Kl., 171 (1918).
7. F.A.E.Pirani, A.Schild. Phys. Rev., 79, 986 (1950);
P.G.Bergmann, R.Penfield, R.Schiller, H.Zatzkis. Phys. Rev., 80, 81 (1950).
8. P.A.M.Dirac. Canad. J. Math. 2, 129 (1950).
9. F.A.E.Pirani, A.Schild, R.Skinner. Phys. Rev., 87, 452 (1952).
10. A.Lichnerowicz. Helv. Phys. Acta Suppl. IV, 176 (1956);
Y.Foures-Bruhat. Journ. Mech. Anal., 4, 951 (1956).
11. P.A.M.Dirac. Proc. Roy. Soc., A246, 333 (1958).
12. B.S.De Witt. Phys. Rev., 160, 1113 (1967).

Рукопись поступила в издательскую группу 3 ноября 1981 года.

Цена 8 коп.

Издательская группа И Ф В Э
Заказ 1056. Тираж 250. 0,7 уч.-изд.л.Т-29870.
Ноябрь 1981. Редактор В.В.Герштейн.