ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 82-18
ОТФ

В.О.Соловьев

ТЕОРЕМЫ НЕТЕР В КАНОНИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

2. Глобальный подход

Серпухов 1982

В.О.Соловьев

ТЕОРЕМЫ НЕТЕР В КАНОНИЧЕСКОМ ФОРМАЛИЗМЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

2. Глобальный подход

Аннотация
Соловьев В.О.
Теоремы Нетер в каноническом формализме общей теории относительности. 2. Глобальный подход. Серпухов, 1982.
12 стр. с рис. (ИФВЭ ОТФ 82-18).
Библиогр. 10.
Показано, что существует класс метрик, удовлетворяющих определенным нековариантным граничным условиям, для которого глобальное рассмотрение инвариантной вариационной задачи в каноническом формализме ОТО приводит к генераторам асимптотических трансляций, инвариантным лишь в пределах узкого класса координатных преобразований.

Abstract
Soloviev V.O.
Nöther Theorems for the Canonical Formalism of General Relativity. 2.Global Approach. Serpukhov, 1982.
p. 12. (IHEP 82-18).
Refs. 10.
The existence of the class of metrics, satisfying certain noncovariant boundary conditions, is shown, for which global approach to an invariant variational problem in the canonical formalism of GR gives generators of asymptotic translations. They are invariant only for a special class of coordinate transformations.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] канонический формализм общей теории относительности (ОТО) был проанализирован методом бесконечно малых смещений, подобно тому, как это делалось в [2] с ковариантным формализмом. На основе полученных в [1] результатов здесь будет дан глобальный вариант теоремы Нетер, когда рассматривается действие ОТО для всего пространства за конечный интервал времени. При этом необходимо привлечь граничные условия на пространственной бесконечности. Существенная особенность глобального подхода состоит в том, что поверхностный интеграл по части границы 4-мерной области Ω (рис. 1) по $\partial\Omega_3$, входящий в вариацию действия, не исчезает, а сводится при граничных условиях определенного вида к интегралу по границе самой $\partial\Omega_3$, то есть по $\partial\partial\Omega_3 = \partial\partial\Omega_1 \cup \partial\partial\Omega_2$.

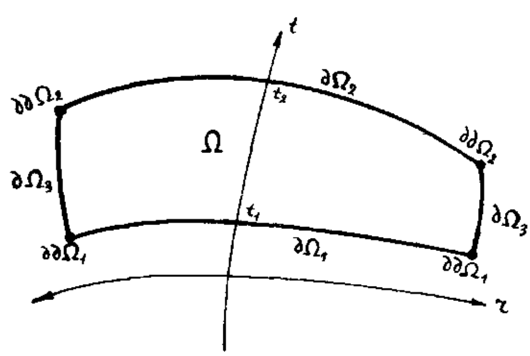

Рис.1

Вопрос о том, в какой форме должны выбираться граничные условия, нуждается в обсуждении. Каждый конкретный вид граничных условий выделяет какой-то класс метрик и группу преобразований координат, не выводящих за пределы этого класса. Отдельные решения уравнений ОТО могут принадлежать или не принадлежать данному классу метрик. Если граничные условия выбраны нековариантно, то одно и то же решение может в одной системе координат входить в заданный класс, а в другой – быть вне его. Поэтому предпочтительнее иметь дело с ковариантными граничными условиями, которым можно пытаться придать физическую интерпретацию. К сожалению, подходящей их формулировки пока нет.

Нас будут интересовать так называемые асимптотически плоские метрики, которые должны математически описывать интуитивную картину замкнутой системы, когда гравитационное поле, т.е. тензор кривизны, стремится к нулю на пространственной бесконечности. Типичным представителем таких метрик является решение Шварцшильда. Однако общепринятое математическое определение асимптотически плоского пространства до сих пор отсутствует, и в разных работах предлагаются новые и новые определения [3, 4] одновременно с критикой предшествующих.

Во многих работах [5–8] используется нековариантное определение, основанное на галилеевой системе координат, причем налагается также ограничение на скорость стремления метрики к асимптотическим значениям:

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad g_{\mu\nu,a} = O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

где r – аналог радиальной координаты плоского пространства, $\phi = O(r^{-n})$, если $|r^n \phi| \leqslant \mathrm{const}$ при $r \to \infty$. Галилеева система координат для плоского пространства безусловно выделена тем, что в ней ковариантные производные совпадают с обычными.

В этой работе мы исследуем классы метрик C_ε с граничными условиями

$$g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = O(r^{-\varepsilon}), \quad g_{\mu\nu,a} = O(r^{-1-\varepsilon}) \qquad \text{при } r \to \infty, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$. Будет показано, что глобальный подход приводит к инвариантным внутри данного класса генераторам асимптотических трансляций при $\frac{1}{2} < \varepsilon \leqslant 1$, если не требовать конечности вариации действия на метриках, не являющихся решениями уравнений ОТО. Требование конечности приводит к дополнительным ограничениям, которые также будут рассмотрены.

Основные обозначения данной работы разъясняются в работе [1].

2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЧЛЕНЫ В ВАРИАЦИИ ДЕЙСТВИЯ

Действие в ОТО, если перейти к каноническим переменным, имеет вид [1]

$$I = \int \sqrt{-{}^{(4)}g}\, {}^{(4)}R\, d^4x = \int (\pi^{ij} g_{ij,0} - N_\mu \mathcal{H}^\mu)\, d^4x +$$
$$+ \int \{ \partial_0 [-\pi] + \partial_k [-2\sqrt{g} N^{,k} - 2N_i (\pi^{ik} - g^{ik} \frac{\pi}{2})]\} d^4x. \qquad (2)$$

Граничные условия (1) дают

$$\begin{aligned}
&g_{ij} - \delta_{ij} = O(r^{-\varepsilon}), && \pi^{ij} = O(r^{-1-\varepsilon}),\\
&N - 1 = O(r^{-\varepsilon}), && g_{ij,\alpha} = O(r^{-1-\varepsilon}),\\
&N_i = O(r^{-\varepsilon}), && N_{,\alpha} = O(r^{-1-\varepsilon}), \qquad (3)\\
& && N_{i,\alpha} = O(r^{-1-\varepsilon}),
\end{aligned}$$

что касается вторых и высших производных, то будем считать, что они убывают, вообще говоря, не быстрее первых.

Действие для всего пространства выражается несобственным интегралом по координатам x^1, x^2, x^3 и легко видеть, что этот интеграл в силу граничных условий (3), вообще говоря, при малых ε расходится. Наиболее сильно расходится интеграл от $\partial_0 \pi$ как $r^{2-\varepsilon}$, затем от $N\mathcal{H}^0$ (расходящаяся часть сводится к поверхностному интегралу) и от $\partial_k (2\sqrt{g} N^{,k})$ – как $r^{1-\varepsilon}$, остальные расходятся как $r^{1-2\varepsilon}$ и т.д. Расходится и интеграл от членов, квадратичных по производным как $r^{1-2\varepsilon}$. Однако на решениях уравнений Эйнштейна действие (2) для чистой гравитации будет равно нулю, а в присутствии материи с тензором энергии-импульса $T^{\mu\nu}$ оно будет пропорциональным $\int \sqrt{-g}\, g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} d^4x$ и конечным, если этот интеграл сходится.

Все это служит для нас основанием работать с лагранжевой плотностью $\sqrt{-g}R$, не отбрасывая никаких поверхностных членов.

Бесконечно малые преобразования координат вызывают преобразования канонических переменных, выражения для которых даны в /1/. Для сохранения граничных условий (1) нужно наложить на вариации координат $\delta x^{\mu} = \xi^{\mu}(x^{a})$ соответствующие условия:

$$\xi^{a} = \Lambda^{a}_{\mu} x^{\mu} + O(r^{1-\varepsilon}),\ \xi^{a}_{,\mu} = \Lambda^{a}_{\mu} + O(r^{-\varepsilon}),\ \xi^{a}_{,\mu\nu} = O(r^{-1-\varepsilon}),$$

где Λ^{a}_{μ} – параметры бесконечно малого преобразования Лоренца. Среди этих преобразований нас будут интересовать только асимптотические трансляции. В общем случае они имеют вид

$$\xi^{a}(x) = \xi^{a}(\infty) + O(r^{-\delta}),$$

где $\delta > 0$.

С учетом условий (1), должно быть

$$\xi^{a} = \xi^{a}(\infty) + O(r^{-\varepsilon}),$$
$$\xi^{a}_{,\beta} = O(r^{-1-\varepsilon}), \qquad \xi^{a}_{,\beta\gamma} = O(r^{-1-\varepsilon}). \tag{4}$$

Вариация действия (2) при произвольном бесконечно малом преобразовании координат $x^{\mu'} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$ имеет вид /1/

$$\delta I = \int d^4x \left\{ \frac{\delta L}{\delta N}\bar{\delta} N + \frac{\delta L}{\delta N_i}\bar{\delta} N_i + \frac{\delta L}{\delta g_{ik}}\bar{\delta} g_{ik} + \partial_a J^{a} \right\},$$

где J^{a} можно представить либо в псевдотензорном виде:

$$J^{a(1)} = -\tau^{a}_{\beta}\xi^{\beta} + \mu^{a\gamma}_{\beta}\xi^{\beta}_{,\gamma} + \sigma^{a\gamma\delta}_{\beta}\xi^{\beta}_{,\gamma\delta},$$

либо в ковариантном:

$$J^{a(2)} = t^{a}_{\beta}\xi^{\beta},$$

где t^{a}_{β} – линейные комбинации лагранжевых производных /1/. Напомним здесь, что в (3 + 1)-подходе, где допускаются только преобразования координат вида $\xi^{0} = \xi^{0}(x^{0})$, $\xi^{k} = \xi^{k}(x^{1}, x^{2}, x^{3})$, поверхностные члены в действии (2) сами по себе инвариантны и действие остается инвариантным, если их опустить. В то же время в (3+1)-подходе нет тождества $\partial_\alpha J^\alpha = \partial_\alpha (t^\alpha_\beta \xi^\beta)$ и возможен только псевдотензорный способ записи J^α. Наконец, (3+1)-подход с учетом условий (4) допускает только преобразования

$$\xi^0 = \xi^0(\infty) = \mathrm{const}, \qquad \xi^k = \xi^k(x^1, x^2, x^3).$$

Интеграл от дивергенции $\partial_\alpha J^\alpha$ в вариации действия по области Ω можно представить в виде поверхностного интеграла по $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$:

$$\int_\Omega \partial_\alpha J^\alpha d^4x = \oint_{\partial\Omega} J^\alpha dS_\alpha = \int_{\partial\Omega_1} + \int_{\partial\Omega_2} + \int_{\partial\Omega_3}.$$

С учетом граничных условий (3), (4) рассмотрим интеграл по $\partial\Omega_3$. Линейные по $h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}$ члены, содержащие вторые производные от $h_{\mu\nu}$, имеют асимптотику $r^{-1-\varepsilon}$, квадратичные члены содержат производные и убывают как $r^{-1-2\varepsilon}$, высшие порядки убывают еще быстрее. Решающее значение имеет то, что линейные члены удается представить в виде полной производной по времени. Интегрируя по частям, мы сведем интеграл от линейных членов по $\partial\Omega_3$ к разности двух интегралов по 2-мерным пространственно-подобным поверхностям $\partial\partial\Omega_2(t = t_2 = \mathrm{const})$ и $\partial\partial\Omega_1(t = t_1)$:

$$\int_{\partial\Omega_3} J^\alpha dS_\alpha = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{r=r_0} J^k dS_k = \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{r=r_0} \{ (\text{линейные члены}) +$$

$$+ (\text{остальное}) \} dS = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial}{\partial t} \oint X^k_\alpha dS_k \xi^\alpha(\infty) + \int_{\partial\Omega_3} (\text{остальное})\, dS =$$

$$= \oint_{r=r_0} X^k_\alpha dS_k \xi^\alpha(\infty) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{\partial\Omega_3} (\text{остальное}).$$

В псевдотензорном подходе из интегралов по $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ также можно выделить члены типа $\oint Y^k_\alpha dS_k \xi^\alpha(\infty)$, оставшиеся члены при этом будут линейными комбинациями лагранжевых производных.

Для существования генераторов асимптотических трансляций или, иначе говоря, для замкнутости системы, необходимо, чтобы оставшийся интеграл по $\partial\Omega_3$ исчезал при предельном переходе $r_o \to \infty$. Это достигается, если $\varepsilon > \frac{1}{2}$. При $\varepsilon = 1$ все члены в вариации действия заведомо конечны, а при $\varepsilon > 1$ поверхностные члены перестают давать вклад. Итак, при $\frac{1}{2} < \varepsilon \leqslant 1$ поверхностные члены в вариации действия имеют вид

$$\int_\Omega \partial_a J^a d^4x = [- \int N_\mu \mathcal{H}^\mu \xi^o(x) d^3x - P^o \xi^o(\infty) - - \int \mathcal{H}_k \xi^k(x) d^3x + P^k \xi^k(\infty)]_{t=t_1}^{t=t_2} , \tag{5}$$

где

$$P^o = \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i}) dS_i , \quad P^k = - \oint 2\pi^{ik} dS_i ,$$

интегралы берутся по бесконечно удаленной поверхности.

Полный гамильтониан гравитационного поля при наших граничных условиях имеет вид

$$H = \int N_\mu \mathcal{H}^\mu d^3x + \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i}) dS_i . \tag{6}$$

Нетрудно заметить, что обычное преобразование Лежандра определяет гамильтониан (6) лишь с точностью до поверхностных членов. Ведь действие (2) при условиях (3) и $\frac{1}{2} < \varepsilon \leqslant 1$ будет содержать поверхностные члены

$$\int (-\pi_{,o} - 2N_{,kk}) d^4x ,$$

которые необходимы для инвариантности при преобразованиях (4). Вариация этих членов при произвольном преобразовании координат, удовлетворяющем (4), будет иметь вид

$$\int \pi N^k \xi^o_{,k} d^3x \Big|_{t_1}^{t_2} ,$$

т.е. при произвольных $\xi^o(x)$ отлична от нуля. Эта вариация обратится в нуль только для более узкого класса преобразований, когда $\xi^o = \mathrm{const}$. Член

$-\int \pi_{,0}\, d^4x$ можно интерпретировать[5] как производящую функцию канонического преобразования, меняющего местами координаты и импульсы:

$$g_{ij} \to \pi^{ij}, \quad \pi^{ij} \to -g_{ij} .$$

Этот член, если не учитывать уравнения движения, расходится даже при наиболее сильном условии $\epsilon = 1$. Преобразование Лежандра

$$H = \int -g_{ij}\, \pi^{ij}_{,0}\, d^3x - L = \int N_\mu \mathcal{H}^\mu d^3x + \oint 2N_{,k}\, dS_k ,$$

таким образом, не дает нам правильного гамильтониана, а определяет его лишь с точностью до поверхностных членов, причем

$$\oint 2N_{,k}\, dS_k \neq \oint (g_{ij,j} - g_{jj,i})\, dS_i \qquad \bullet$$

даже при учете уравнений движения. То же будет, если отбросить единственный расходящийся при $\epsilon = 1$ член $\int -\pi_{,0}\, d^4x$, сузив, соответственно, группу преобразований так, что $\xi^0 = \mathrm{const}$.

Другой заслуживающий упоминания результат состоит в том, что

$$P_\mu \neq \int \tau^0_\mu\, d^3x .$$

Он, однако, не должен никого удивлять, поскольку псевдотензор есть величина, не имеющая физического смысла[9]. В работе[1] мы уже пришли к выводу, что все псевдотензоры эквивалентны с точки зрения получения из них интегральных соотношений, поскольку

$$\partial_\alpha \tau^{\alpha(1)}_\beta \equiv \partial_\alpha \tau^{\alpha(2)}_\beta$$

вследствие первой теоремы Нетер. Концепция псевдотензора в глобальном подходе является излишней, важен лишь вид $\partial_\alpha J^\alpha$ в целом.

Для сравнения с известной картиной применим тот же глобальный вариант теоремы Нетер к электродинамике. Источником заряда пусть будет скалярное поле. Плотность лагранжиана

$$\mathfrak{L} = D_\mu \phi D^\mu \phi^* - m^2 \phi\phi^* - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} ,$$

где

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi, \quad D_\mu \phi^* = (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu .$$

Калибровочные преобразования

$$\phi \to \phi e^{i\alpha(x)} \simeq \phi + ie\alpha(x)\phi,$$

$$\phi^* \to \phi^* e^{-i\alpha(x)} \simeq \phi^* - ie\alpha(x)\phi^*,$$

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \alpha(x),$$

граничные условия

$$|\phi| = O(\frac{1}{r^2}), \quad A_\mu = O(\frac{1}{r}), \quad A_{\mu,\nu} = O(\frac{1}{r^2}), \tag{7}$$

для $\alpha(x)$, соответственно, примем условия

$$\alpha(x) - \alpha(\infty) = O(r^{-\delta}), \quad \alpha_{,\mu} = O(r^{-1-\delta}), \quad \alpha_{,\mu\nu} = O(r^{-1-\delta}), \tag{8}$$

$$\delta > 0 .$$

Тогда поверхностные члены в вариации действия, вызванной калибровочным преобразованием $\alpha(x)$

$$\delta I = \int(\frac{\delta L}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta L}{\delta\phi^*}\delta\phi^* + \frac{\delta L}{\delta A_\mu}\delta A_\mu + \partial_\mu J^\mu)d^4x ,$$

могут быть приведены с учетом (7) и (8) к виду

$$\int\partial_\mu J^\mu d^4x = [\int(j^0 - F^{ok}_{,k})\alpha(x)d^3x + Q\alpha(\infty)]_{t=t_1}^{t=t_2} , \tag{9}$$

где

$$j^0 = ie\phi \overleftrightarrow{\partial^0} \phi^*, \quad Q = \oint F^{ok}\, dS_k ,$$

причем интеграл берется по бесконечно удаленной поверхности.

Видно, что (5) и (9) имеют сходное строение. Генераторами преобразований, стремящихся на бесконечности к нулю, являются связи, а генераторами асимптотически постоянных преобразований – связи плюс поверхностный интеграл.

Однако в электродинамике нет самодействия, что соответствует калибровочной инвариантности плотности заряда. Поверхностные члены вариации действия в электродинамике можно представить в виде (9) не только для всего пространства, но и для конечного объема, если отсутствует ток через его границу. Иными словами, в электродинамике имеется локальный закон сохранения заряда, который приводит к глобальному, ничего подобного нет в ОТО. Определенная аналогия между (5) и (9) имеет место, поскольку граничные условия (3) обеспечивают, разумеется, нековариантно, как бы "выключение" самодействия гравитационного поля на пространственной бесконечности.

Полученные выражения для P^{μ} не инвариантны даже при заменах чисто пространственных координат, нарушающих условия (3), например, при $\xi^{k} \sim \sqrt{r}$. Как показано в работе /10/, эти преобразования позволяют произвольно изменять, например, величину P^{o}, которая обычно /5–8/ интерпретируется как полная энергия гравитационного поля и, возможно, материи. По сути дела эта интерпретация основывается на неявном постулировании ковариантности P^{μ} при произвольных преобразованиях координат.

Величина считается ковариантной, если существует способ ее вычисления в любой системе координат и значения ее в различных системах связаны законом преобразования тензоров. Нам представляется, что, пока не дано аналогичного ковариантного определения величинам P^{μ}, нет оснований говорить об их физическом смысле. Формальное обобщение P^{o} на криволинейные координаты, сделанное в работе /7/:

$$\oint (g_{ij,j} - g_{jj,i}) dS_i \rightarrow \oint \sqrt{h} (\Phi^{ij}_{;j} - \Phi^{;i}) dS_i ,$$

где $g_{ij} = h_{ij} + \Phi_{ij}$; h_{ij} – плоская метрика, приводит к неоднозначности из-за разных возможностей выбора h_{ij} по g_{ij} .

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы исследовали канонический формализм ОТО глобальным методом бесконечно малых смещений. Основной результат состоит в том, что существует узкий класс метрик среди всех стремящихся к галилеевскому виду на пространственной бесконечности, в котором имеются инвариантные внутри класса генераторы асимптотических трансляций P^{μ}. Это те самые величины, которые интерпретируются в работах /5–8/ как вектор энергии-импульса гравитационного поля. Однако при такой интерпретации, по сути дела, неявно постулируется ковариантность P^{μ} при всех преобразованиях координат. Ни данная работа, ни другие, известные автору, не позволяют получить ковариантных генераторов асимптотических трансляций. Поэтому нам представляется, что для придания физического смысла величинам P^{μ} оснований пока нет.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.А.Логунову и О.А.Хрусталеву за постановку задачи и постоянный интерес к работе, В.И.Денисову, М.А.Мествиришвили, А.В.Разумову за ценные обсуждения, А.Е.Пухову за разъяснение некоторых вопросов гамильтонова формализма ОТО.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.О.Соловьев. Препринт ИФВЭ 81-179, Серпухов, 1981.
2. E.Neter. Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl.,235 (1918) (см. Вариационные принципы механики. Под ред. Л.С. Полака. М., Физматгиз, 1959). F.Klein. Nachr. Kön. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl., 171 (1918).
3. A.Ashtekar. Asymptotic Structure of the Gravitational Field at Spatial Infinity. General Relativity and Gravitation. Ed. A.Held. Plenum Press, New York, 1980, Vol. 2.
4. S.Persides. J.Math. Phys., 21, 142 (1980).
5. R.Arnowitt, S.Deser, C.W.Misner. The Dynamics of General Relativity. Gravitation, an Introduction to Current Research Ed. L.Witten. New York-London, 1963. (перевод см. Эйнштейновский сборник. М., Наука, 1967).
6. T.Regge, C.Teitelboim. Ann. Phys., (N.Y.), 88, 286 (1974).
7. N.O.Murchadna, J.W.York,Jr. Phys. Rev., D10, 2345 (1974).
8. Y.Choquet-Bruhat, A.E.Fisher, J.E.Marsden. Isolated Gravitating System in General Relativity. Ed. J.Ehlers. Academic Press, New York-London, 1978.
9. А.А.Логунов, В.И.Денисов, А.А.Власов, М.А.Мествиришвили, В.Н.Фоломешкин. ТМФ, 40, 291 (1979); А.А.Власов, В.И.Денисов, А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили. ТМФ, 43, 147 (1980); В.И.Денисов, А.А.Логунов. ТМФ, 43, 187 (1980).
10. В.И.Денисов, А.А.Логунов. Препринт ИЯИ П-0214, 1981.

Рукопись поступила в издательскую группу
4 января 1982 года.

Цена 8 коп.

Издательская группа И Ф В Э

Заказ 1319. Тираж 250. 0,5 уч.-изд.л. Т-00279.

Январь 1982. Редактор В.В.Герштейн.