В.О.Соловьев

ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ГРУППА ПУАНКАРЕ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Направлено в ТМФ

M-24

Аннотация

Соловьев В.О.

Пространство Минковского и асимптотическая группа Пуанкаре в общей теории относительности. Серпухов, 1983.

13 стр. (ИФВЭ ОТФ 83-193).

Библиогр. 26.

Получены коммутационные соотношения для связей в гамильтоновом формализме ОТО с учетом поверхностных членов общего вида. Показано, что, хотя в общем случае нельзя переопределить генераторы так, чтобы они удовлетворяли соотношению замкнутости, для пространства Минковского имеется группа преобразований, для которых условие замкнутости выполняется. Эта асимптотическая группа Пуанкаре содержит бесконечную инвариантную подгруппу.

Abstract

Soloviev V.O.

Minkowski Space and Asymptotic Poincare Group in General Relativity. Serpukhov, 1983.

p. 13. (IHEP 83-193).

Refs. 26.

The commutation relations have been obtained for constraints in the GR Hamiltonian formalism with account for the surface terms of the general type. It is shown that though in the general case it is impossible to redefine the generators so that they satisfy the closure relation, nevertheless for the Minkowski space there is a group of transformations for which the closure condition is valid. This asymptotic Poincare group contains an infinite invariant subgroup.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что канонический формализм общей теории относительности (ОТО) для топологически открытых пространств обладает качественным своеобразием по сравнению со случаем замкнутого пространства. Как было показано в работах Арновитта, Дезера, Мизнера (АДМ)[1-6] и Дирака[7, 8], отличие состоит в необходимости добавления к гамильтониану поверхностных интегралов, в результате чего он может принимать ненулевые численные значения. Эвристическая аргументация работ[1-8] впоследствии получила более строгое математическое обоснование в статье Редже, Тейтельбойма[9]. Некоторые уточнения в постановку задачи, общую всем этим публикациям, вносит недавняя работа А.Е.Пухова[10].

В то же время подход, основанный на явном выделении одной из систем координат, встречает справедливые возражения[11] как противоречащий основному физическому принципу ковариантности. В связи с этим важным представляется вопрос о возможности построения гамильтонова формализма ОТО при ковариантных асимптотических условиях на пространственной бесконечности.

Прежде чем говорить об асимптотически плоском пространстве-времени, естественно рассмотреть случай плоского пространства Минковского. Его определяющим свойством является наличие группы Пуанкаре, преобразования которой сохраняют метрику. С точки зрения канонического формализма ОТО, непрерывные преобразования группы Пуанкаре должны порождаться соответствующими генераторами. Мы покажем, что генераторами инфинитезимальных преобразований группы в данном случае являются связи (без добавления каких-либо поверхностных интегралов). Будет также показано, что группа Пуанкаре в пространстве Минковского в ОТО естественным образом расширяется до асимптотической группы Пуанкаре, включающей бесконечную инвариантную подгруппу.

КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ОТО

Гамильтонов формализм ОТО разрабатывался Дираком[7, 8] на основе обобщенной гамильтоновой динамики для систем со связями, Арновиттом, Дезером и Мизнером[1-6] на основе вариационного принципа и аналогии с параметризованной формой механики и теории поля, а также рядом других авторов[12-15].

Если, следуя работам[1-8], выбрать в качестве канонической переменной метрику g_{ij}, индуцированную на гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$, то сопряженные импульсы π^{ij} линейно связаны со второй квадратичной формой этой гиперповерхности K_{ij}

$$\pi^{ij} = -\sqrt{g}(K^{ij} - g^{ij} K),$$

где $g = \mathrm{Det}/g_{ij}/$, $g_{ik} g^{k\ell} = \delta_i^\ell$, $K = g^{ij} K_{ij}$, индексы поднимаются и опускаются с помощью g_{ij}, g^{ij}.

Переменные g_{ij}, π^{ij} не являются независимыми, а подчинены четырем уравнениям связи

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} \equiv -\frac{1}{\sqrt{g}}\left(gR + \frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\,\pi^2\right) = 0, \\ &\mathcal{H}_i \equiv -2\pi^j_{i/j} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где R – скалярная кривизна гиперповерхности, $\mathrm{Sp}\,\pi^2 = \pi_{ij}\pi^{ij}$, вертикальная черта обозначает ковариантную производную, определяемую метрикой g_{ij}. Связи представляют собой 4 уравнения ОТО из 10, не содержащие вторых производных по времени. Остальные 6 уравнений второго порядка по времени представляются в виде 12 уравнений первого порядка:

$$g_{ij,0} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}} \equiv N_{i/j} + N_{j/i} + \frac{2N}{\sqrt{g}}\left(\pi_{ij} - g_{ij}\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} \pi^{ij}_{,0} = -\frac{\delta H}{\delta g_{ij}} \equiv &-N\sqrt{g}\left(R^{ij} - \frac{1}{2}g^{ij}R\right) + \sqrt{g}\left(N^{/ij} - g^{ij} N^{/m}_{/m}\right) + \frac{2N}{\sqrt{g}}\left(\pi^{ij}\frac{\pi}{2} - \pi^{im}\pi^j_m\right) - \\ &- \frac{Ng^{ij}}{2\sqrt{g}}\left(\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\,\pi^2\right) + (N^m\pi^{ij})_{/m} - N^i_{/m}\pi^{jm} - N^j_{/m}\pi^{im}, \end{aligned} \tag{2}$$

где $H = H_0 \equiv \int (N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i) d^3x$ – гамильтониан, R_{ij} – тензор Риччи гиперповерхности, N и N^i играют роль лагранжевых множителей при связях.

При построении канонического формализма ОТО предполагалось, как обычно, что изменение действия на поверхностный член ничего не меняет в физической постановке задачи. Стандартный вид действия ОТО в гамильтоновой форме

$$S = \int (\pi^{ij} g_{ij,0} - N\mathcal{H} - N^i\mathcal{H}_i) d^3x dt$$

отличается как от действия

$$S' = \int \sqrt{-{}^{(4)}g}\; {}^{(4)}R d^4x,$$

так и от его модификации

$$S'' = -\int \sqrt{-{}^{(4)}g}\,(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu})\,g^{\mu\nu}\,d^4x$$

на поверхностные интегралы.

Аналогично параметризованной форме механики, гамильтониан H_0 обращается в нуль на решениях уравнений движения, т.е. "в слабом смысле" по терминологии Дирака. Было, однако, сразу замечено[1-8], что обращение гамильтониана ОТО в нуль не согласуется с линеаризованной теорией симметричного тензорного поля в пространстве Минковского, когда гамильтониан является ненулевой квадратичной формой импульсов и первых производных поля по пространственным координатам.

Выход из положения, предложенный АДМ[1-6], опирался на аналогию с параметризованной механикой. Предполагалось, что истинные время и гамильтониан (с обратным знаком) как сопряженные переменные содержатся среди 12 канонических переменных g_{ij}, π^{ij} и, выделив их оттуда, т.е. задав время как функционал от g_{ij}, π^{ij}, можно найти гамильтониан. Подобным образом, задавая координаты, предлагалось находить импульс.

Некорректность этого метода для асимптотически плоского пространства-времени была отмечена Редже и Тейтельбоймом[9]. Дело в том, что на пространственной бесконечности в асимптотически плоском пространстве-времени могут быть независимо введены четыре координаты, не связанные с каноническими переменными g_{ij}, π^{ij}. Выразить время и координаты только через полевые переменные, в принципе, можно лишь в случае пространственно замкнутых геометрий, куда и должна быть перенесена идеология АДМ[16].

Подход Дирака[7, 8] также не решил проблемы (см. работы[2, 9]). Более точная аргументация была найдена Хиггсом[7]. Оказалось, что в случае асимптотически плоского пространства-времени связи в ОТО уже не являются генераторами трансляций, и было предложено находить правильные генераторы путем добавления к связям поверхностных интегралов. Работа Хиггса оставалась в тени в течение 15 лет до появления статьи Редже и Тейтельбойма[9].

Вариационный принцип, развитый в работе[9], учитывает бесконечную область интегрирования (по всему пространству) и медленное убывание варьируемых функций (как $1/r$ или $1/r^2$). Вследствие этого вклад некоторых дивергенционных членов в действие оказывается отличным от нуля. Граничные условия для бесконечной области допускают медленное убывание пробных функций, так что при варьировании величины поверхностных интегралов могут изменяться. Вариация функционала действия может быть схематически представлена в виде

$$\delta I[\phi^A] = \int \frac{\delta I}{\delta\phi^A}\,\delta\phi^A d^3x\,dt + \oint A^i[\phi^B]\,\delta\phi^A dS_i\,dt + \oint B^{i\nu}[\phi^B]\partial_\nu(\delta\phi^A)dS_i\,dt,$$

где абстрактный индекс A нумерует независимые компоненты произвольных полей ϕ^A.

Если рассматривать лишь быстро убывающие пробные функции $\delta\phi^A$, то поверхностные интегралы пропадают. Таким образом, возможно два вариационных принципа, сохраняющих асимптотические условия: обычный – для быстро убывающих пробных функций и новый – для всех. Приняв второй из них, как это сделали Редже и Тейтельбойм, уже нельзя утверждать, что добавление поверхностных членов к действию (или гамильтониану) не влияет на получение уравнений движения. Такой принцип позволяет находить поверхностные интегралы в действии, в то время как в обычном подходе они остаются неопределенными.

Идеология находит поддержку после редукции, т.е. наложения калибровок и принятия связей равными нулю и "в сильном смысле" по Дираку. После редукции "дивергенции перестают быть дивергенциями", по выражению АДМ. Исключив все зависимые переменные, мы получаем нелокальную зависимость от новых независимых переменных. Следовательно, варьирование этих новых переменных в конечной области может приводить к изменению g_{ij}, π^{ij} в асимптотике на пространственной бесконечности.

Изменение членов порядка r^{-1} и r^{-2} приводит к изменению поверхностных интегралов, а следовательно, действия. Фиксируя же члены порядка r^{-1} и r^{-2} в g_{ij}, π^{ij}, мы налагаем дополнительные связи на независимые переменные, уменьшая тем самым число степеней свободы. Поэтому, если считать, что действие должно быть одним и тем же до и после редукции, следует пользоваться подходом Редже и Тейтельбойма. Тогда "мы видим, что поверхностный интеграл должен быть включен в гамильтониан с самого начала по фундаментальным причинам, а не по каким-либо апологетическим соображениям"/19/.

Кроме новой формулировки вариационного принципа, в работе/9/ содержится рассмотрение коммутационных соотношений генераторов группы Пуанкаре. Используя терминологию последующих статей/18, 19/, можно назвать эти преобразования "несобственными". "Собственными" называют преобразования, соответствующие функциям $N(x)$ и $N^i(x)$, принадлежащим к пространству, дуальному тому, к которому принадлежат связи $\mathcal{H}(x)$ и $\mathcal{H}_i(x)$. Для "собственных" преобразований поверхностные интегралы исчезают. Согласно/18/, "инвариантность теории относительно собственных калибровочных преобразований связана с сохранением во времени выполнения уравнений связи теории, тогда как инвариантность при несобственных преобразованиях ведет к нетривиальным законам сохранения. Соответствующие сохраняющиеся величины даются поверхностными интегралами".

АЛГЕБРА СВЯЗЕЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Между каноническими переменными в ОТО принимаются стандартные скобки Пуассона

$$\{g_{ij}(x), g_{k\ell}(y)\} = 0 = \{\pi^{ij}(x), \pi^{k\ell}(y)\},$$

$$\{g_{ij}(x), \pi^{k\ell}(y)\} = \frac{1}{2}(\delta_i^k\delta_j^\ell + \delta_i^\ell\delta_j^k)\,\delta(x, y),$$

где $x = (x^1, x^2, x^3)$, $y = (y^1, y^2, y^3)$ – координаты на гиперповерхности; δ_i^k – символ Кронекера; $\delta(x, y)$ – дельта-функция, являющаяся скаляром по первому аргументу и скалярной плотностью веса -1 по второму. Скобка Пуассона двух функционалов от канонических переменных определяется формулой

$$\{F, G\} = \int d^3x\left(\frac{\delta F}{\delta g_{ij}}\frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} - \frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}}\frac{\delta G}{\delta g_{ij}}\right). \tag{3}$$

Для конечной области интегрирования, принимая параметры λ, β, λ^i, β^k равными нулю на границе, получаем коммутационные соотношения между функционалами связей

$$\{\int \lambda \mathcal{H} d^3x, \int \beta \mathcal{H} d^3y\} = \int \alpha^i \mathcal{H}_i d^3z, \tag{4А}$$

где $\alpha^i = g^{ik}(\lambda\beta_{,k} - \beta\lambda_{,k})$,

$$\{\int \lambda^i \mathcal{H}_i d^3x, \int \beta^k \mathcal{H}_k d^3y\} = \int \alpha^j \mathcal{H}_j d^3z, \tag{4Б}$$

где $\alpha^j = \lambda^m \beta^j_{,m} - \beta^m \lambda^j_{,m} \equiv \lambda^m \beta^j_{/m} - \beta^m \lambda^j_{/m}$,

$$\{\int \lambda^i \mathcal{H}_i d^3x, \int \beta \mathcal{H} d^3y\} = \int \alpha \mathcal{H} d^3z, \tag{4В}$$

где $\alpha = \lambda^m \beta_{,m}$.

Связи в ОТО являются генераторами бесконечно малых преобразований, например,

$$\{g_{ij}(x), \int \lambda^k \mathcal{H}_k d^3y\} = \lambda_{i/j} + \lambda_{j/i},$$

$$\{\pi^{ij}(x), \int \lambda^k \mathcal{H}_k d^3y\} = (\pi^{ij}\lambda^k)_{/k} - \pi^{ik}\lambda^j_{/k} - \pi^{jk}\lambda^i_{/k},$$

т.е. $\mathcal{H}_k$ генерирует преобразования координат на гиперповерхности. В то же время $\mathcal{H}$ служит генератором перехода на новую гиперповерхность.

Пользуясь аппаратом обобщенных функций (при основных функциях, сосредоточенных внутри области интегрирования и равных нулю на ее границе), можно представить алгебру связей (4) в виде

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= (g^{ik}(x)\mathcal{H}_k(x) + g^{ik}(y)\mathcal{H}_k(y))\delta_{,i}(x, y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_k(y)\} &= \mathcal{H}_i(y)\delta_{,k}(x, y) + \mathcal{H}_k(x)\delta_{,i}(x, y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} &= \mathcal{H}(x)\delta_{,i}(x, y), \end{aligned} \tag{5}$$

который обычно и используется. Эти соотношения были впервые получены Дираком в 1951 г. /20/ для параметризованных теорий поля в пространстве Минковского. Позднее в работах /21, 23/ было показано, что эта алгебра обеспечивает возможность вложения семейства гиперповерхностей в (псевдо)-риманово пространство-время.

Для полноты изложения отметим, что поскольку в одно из соотношений (5) входят кроме самих связей еще и канонические переменные $g^{ik}(x)$, то в строгом математическом смысле связи хотя находятся в инволюции, но не образуют алгебры. Обсуждение этого вопроса можно найти в работах /21, 24/.

До сих пор нами рассматривались генераторы преобразований, не затрагивающих границу области, и их коммутаторы. При этом очевидно, что добавление к связям каких-либо дивергенциальных членов никак не сказывается, т.е. генераторы определены пока лишь с точностью до поверхностных членов.

Перейдем теперь к случаю отличных от нуля на границе функций. В статье[9] приводится формула для вариации гамильтониана $H = H_o \equiv \int (N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i) d^3x$ при произвольных функциях $N(x)$, $N^i(x)$ и вариациях $\delta g_{ij}(x)$, $\delta\pi^{ij}(x)$ на границе области интегрирования

$$\delta H_o = \int d^3x \left[\frac{\delta H}{\delta g_{ij}(x)} \delta g_{ij}(x) + \frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}(x)} \delta\pi^{ij}(x) \right] - \oint \sqrt{g} \, (g^{ik} g^{j\ell} - g^{ij} g^{k\ell}) \times$$

$$\times (N \delta g_{ij/k} - N_{,k} \delta g_{ij}) dS_\ell - \oint [\, 2N_k \delta\pi^{k\ell} + (2N^k \pi^{j\ell} - N^\ell \pi^{jk}) \delta g_{jk}] dS_\ell . \quad (6)$$

Мы получим ниже аналогичную формулу для вычисления скобок Пуассона генераторов друг с другом. Заметим, что наш подход отличается от принятого в работе[9]. Редже и Тейтельбойм находят поверхностные члены, которые нужно добавлять к связям для построения генераторов, исходя из принятых в работе[9] нековариантных асимптотических условий и формулы (6), в соответствии с предложенным вариационным принципом. После этого показывается, что построенные генераторы группы Пуанкаре образуют алгебру при тех же асимптотических условиях

$$\{ H(\lambda, \lambda^i), \; H(\beta, \beta^k) \} = H(\alpha, \alpha^j), \quad (7)$$

где $H = H_o + H_\infty$.

С другой стороны, определение скобок Пуассона (3) позволяет формально вычислить их вместе со всеми поверхностными интегралами, используя еще не переопределенные генераторы, т.е. H_o. Поскольку добавление дивергенций не должно приводить к изменению гамильтоновых уравнений, вариационные производные $\frac{\delta H}{\delta g_{ij}(x)}$, $\frac{\delta H}{\delta \pi^{ij}(x)}$ известны нам заранее (2) и требуется лишь вычислить интеграл

$$\int d^3x \left[\frac{\delta H(\lambda, \lambda^i)}{\delta g_{ij}(x)} \frac{\delta H(\beta, \beta^k)}{\delta \pi^{ij}(x)} - \frac{\delta H(\lambda, \lambda^i)}{\delta \pi^{ij}(x)} \frac{\delta H(\beta, \beta^k)}{\delta g_{ij}(x)} \right],$$

разумеется, сохраняя все поверхностные члены. В результате получаем

$$\{ \int \lambda \mathcal{H} d^3x \, , \int \beta \mathcal{H} d^3y \}_f = \int \alpha^i \mathcal{H}_i d^3z + \oint 2\pi^k_i \alpha^i dS_k \, ,$$

$$\alpha^i = g^{ij} (\lambda \beta_{,j} - \beta \lambda_{,j}),$$

$$\{ \int \lambda^i \mathcal{H}_i d^3x \, , \int \beta^k \mathcal{H}_k d^3y \}_f = \int \alpha^j \mathcal{H}_j d^3z + \oint 2\pi^k_i \alpha^i dS_k -$$

$$- \oint \pi^{im} (\beta_{i/m} + \beta_{m/i}) \lambda^j dS_j + \oint \pi^{im} (\lambda_{i/m} + \lambda_{m/i}) \beta^j dS_j ,$$

$$\alpha^j = \lambda^m \beta^j_{,m} - \beta^m \lambda^j_{,m} \, ,$$

$$\{\int \lambda^i \mathcal{H}_i d^3x,\ \int \beta \mathcal{H} d^3y\}_f = \int \alpha \mathcal{H} d^3z \ - \oint \mathcal{H} \beta \lambda^j dS_j - \oint 2\sqrt{g}\, R^j_i \beta \lambda^i dS_j +$$

$$+ \oint 2\sqrt{g}(g^{im} g^{jn} - g^{ij} g^{mn}) \beta_{/mn} \lambda_i dS_j ,$$

$$\alpha = \lambda^m \beta_{,m} ,$$

или для гамильтониана

$$\{H_o(\lambda, \lambda^i), H_o(\beta, \beta^k)\}_f = H_o(\alpha, \alpha^j) + \oint \mathcal{H}(\lambda\beta^j - \beta\lambda^j) dS_j + \oint 2\pi^j_k \alpha^k dS_j -$$

$$- \oint \pi^{km} [(\beta_{k/m} + \beta_{m/k}) \lambda^j - (\lambda_{k/m} + \lambda_{m/k}) \beta^j] dS_j + \oint 2\sqrt{g} R^j_i (\lambda\beta^i - \beta\lambda^i) dS_j +$$

$$+ \oint 2\sqrt{g}(g^{im} g^{jn} - g^{ij} g^{mn})(\lambda_i \beta_{/mn} - \beta_i \lambda_{/mn}) dS_j , \qquad (8)$$

причем

$$\alpha = \lambda^m \beta_{,m} - \beta^m \lambda_{,m} ,$$

$$\alpha^j = g^{jk}(\lambda\beta_{,k} - \beta\lambda_{,k}) + \lambda^m \beta^j_{,m} - \beta^m \lambda^j_{,m} . \qquad (9)$$

Мы пишем всюду у скобок Пуассона букву f – напоминание о формальности их вычисления, поскольку левые части коммутационных соотношений не определены в смысле вариационного принципа Редже и Тейтельбойма. Поверхностные члены, необходимые для переопределения генераторов, будем далее искать в правой части (8) с тем, чтобы подставив новые генераторы в левую часть получить соотношение замкнутости (7). Очевидно, что в общем случае произвольных параметров и канонических переменных на границе требование замкнутости не выполняется. Приведем пример, когда ему удается удовлетворить для конечной области интегрирования.

Пусть имеется пространственноподобная гиперплоскость x^o = const в пространстве Минковского, так что $g_{ij} = \delta_{ij}$, $\pi^{ij} = 0$. Тогда единственный отличный от нуля поверхностный интеграл в (8) имеет вид

$$\oint 2(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{ij}\delta_{mn})(\lambda_i \beta_{,mn} - \beta_i \lambda_{,mn}) dS_j . \qquad (10)$$

Он обращается в нуль при условии

$$\begin{aligned} \lambda_i &= A_{ik} x^k + a_i, & A_{ik} &= - A_{ki}, \\ \beta_i &= B_{ik} x^k + b_i, & B_{ik} &= - B_{ki}, \\ \lambda &= A_k x^k + a, & \beta &= B_k x^k + b . \end{aligned} \qquad (11)$$

Выполнение сразу всех соотношений (11) не является необходимостью для одного интеграла, но требуется для существования алгебры преобразований. Эта алгебра соответствует группе движений гиперплоскости, сохраняющих условия $g_{ij} = \delta_{ij}$ и $\pi^{ij} = 0$, т.е. группе Пуанкаре. Генераторами в данном случае являются связи без поверхностных членов и $H = H_o$.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ГРУППА ПУАНКАРЕ

Рассмотрим пространство Минковского как частное решение уравнений ОТО. Выбрав в качестве пространственноподобной гиперповерхности гиперплоскость $x^0 = \mathrm{const}$, получаем начальные данные $g_{ij} = h_{ij}$, $\pi^{ij} = 0$, где h_{ij} – плоская метрика в произвольной системе координат. Параметры бесконечно малых преобразований группы Пуанкаре удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_{/ij} = 0, \qquad \lambda_{i/j} + \lambda_{j/i} = 0, \qquad \lambda_{i/kj} = 0.$$

Поскольку все поверхностные интегралы в (8) инвариантны относительно преобразований координат на гиперповерхности, в рассмотрении можно ограничиться любой выбранной системой координат, в частности, мы примем декартову систему, где $g_{ij} = \delta_{ij}$

$$\lambda = A_k x^k + a, \qquad \lambda^i = A^i_k x^k + a^i, \qquad A^i_k = -A^k_i. \tag{12}$$

При рассмотрении всего пространства в целом поверхностные интегралы в (8) становятся несобственными интегралами по бесконечно удаленной двумерной поверхности, и их сходимость зависит от асимптотического поведения подынтегральных выражений. Ясно, что кроме преобразований Пуанкаре должны существовать и другие преобразования, не дающие вклада в поверхностные интегралы, ввиду убывания их на бесконечности. Будем искать группу таких преобразований при дополнительном условии ее инвариантности относительно преобразований группы Пуанкаре G_P. Это значит, что в группе G, построенной объединением G_o и G_P, G_o должна быть инвариантной подгруппой т.е. $G_P = G/G_o$. В декартовых координатах асимптотические свойства могут быть заданы в виде порядка убывания всех компонент на бесконечности, например запись

$$\xi^\alpha_{,\beta} = O(r^{-\epsilon}) \tag{13}$$

означает, что $|r^\epsilon \xi^\alpha_{,\beta}| < C$, где $\epsilon > 0$, $r = \sqrt{x^i x^i}$. Условие (13) характеризует преобразования координат

$$x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha(x),$$

сохраняющие асимптотические ограничения

$$g_{ij} - \delta_{ij} \to 0, \qquad \pi^{ij} \to 0.$$

Более строгие математические определения и теоремы, касающиеся функциональных пространств, можно найти, например, в работе /25/. Коммутируя с помощью алгебры (9) преобразования типа (13) с преобразованиями Пуанкаре, убеждаемся, что сохранение асимптотики будет иметь место лишь, если каждое дифференцирование понижает порядок убывания на r^{-1}. Поэтому в алгебре векторных полей, соответствующих инвариантной подгруппе G_o, не могут содержаться "координатные волны", т.е. функции, осциллирующие по r. Требование инвариантности относительно преобразований Пуанкаре приводит к аналогичным условиям для производных по времени, в результате должно быть

$$\xi^{\alpha} = O(r^{1-\varepsilon}), \qquad \xi^{\alpha}_{,\beta} = O(r^{-\varepsilon}), \qquad \xi^{\alpha}_{,\beta\gamma} = O(r^{-1-\varepsilon}) \quad \text{и т.д.}$$

В рассматриваемом поверхностном интеграле (10) ненулевые члены могут возникнуть только при коммутации двух преобразований, не соответствующих G_o. Подынтегральное выражение имеет при этом асимптотику $O(r^{-2\varepsilon})$, и для обращения интеграла (10) в нуль кажется необходимым принять $\varepsilon > 1$. Однако, учитывая угловую зависимость функций, можно принять разные асимптотики для четной и нечетной по отношению к пространственной инверсии частей

$$\xi^{\alpha} = O^{-}(r^{1-\varepsilon}) + O^{+}(r^{1-\delta}), \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 1, \tag{14}$$

тогда $\xi^{\alpha}_{,\beta} = O^{+}(r^{-\varepsilon}) + O^{-}(r^{-\delta})$ и т.д.

Нетрудно убедиться, что эти условия сохраняются при коммутации с инфинитезимальными преобразованиями Пуанкаре, если $|\varepsilon - \delta| \leqslant 1$. Впервые угловая зависимость была принята во внимание в работе [9].

Приняв (14), мы получаем в подынтегральном выражении (10) члены с асимптотиками $O^{+}(r^{-2\varepsilon})$, $O^{+}(r^{-2\delta})$, $O^{-}(r^{-\varepsilon-\delta})$. Вклад в интеграл может давать только нечетная часть, поэтому получаем ограничение $\varepsilon + \delta > 2$.

Анализ коммутаторов инфинитезимальных преобразований показывает, что группа G_o должна строиться на основе условий (14), причем $|\varepsilon - \delta| \leqslant 1$, $\varepsilon + \delta > 2$. Это подтверждается рассмотрением действия конечных преобразований на переменные g_{ij}, π^{ij}, принимающие при этом вид

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + \xi_{i,j} + \xi_{j,i} + \xi_{m,i}\,\xi_{m,j} - \xi_{o,i}\,\xi_{o,j}, \\ \pi^{ij} &= \xi^{o}_{,ij} - \delta_{ij}\,\Delta\xi^{o} + O^{-}(r^{-1-2\varepsilon}) + O^{-}(r^{-1-2\delta}) + O^{+}(r^{-1-\varepsilon-\delta}). \end{aligned} \tag{15}$$

Гиперповерхность $x^{o} = \mathrm{const}$ не является больше гиперплоскостью, причем в силу уравнений Гаусса-Петерсона-Кодацци [26] тензор Римана ее внутренней кривизны пропорционален квадратичной форме, построенной из π^{ij}. Мерой отклонения от гиперплоскости могут служить как характеристики внутренней кривизны R_{ij} (тензор Римана для трех измерений, как известно, выражается через тензор Риччи), так и внешней $K_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g}}(\pi_{ij} - g_{ij}\frac{\pi}{2})$.

Для координатно-независимых оценок следует выбирать скалярные величины, например, $K^2 = \frac{\pi^2}{4g}$ или $\mathrm{Sp}\,K^2 = \frac{1}{g}(\mathrm{Sp}\,\pi^2 - \frac{\pi^2}{4})$. Асимптотически главные члены, возникающие в них при преобразованиях времени и координат (14), имеют вид

$$K^2 \sim (\Delta\xi^{o})^2, \qquad \mathrm{Sp}\,K^2 \sim \xi^{o}_{,ij}\,\xi^{o}_{,ij}$$

и являются заведомо неотрицательными, причем обращение в нуль достигается только для линейной зависимости $\xi^{o} = A_k x^k + a$.

Преобразованные переменные (15) при подстановке в поверхностные интегралы (8) не изменяют равенства последних нулю при условиях $|\varepsilon - \delta| \leqslant 1$, $\varepsilon + \delta > 2$ в (14). Для внешней кривизны гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$ это приводит к ограничениям

$$\mathrm{Sp}\, K^2 = O^+(r^{-3-\mu}) + O^-(r^{-4-\mu}), \quad \mu > 0.$$

Группу G, соответствующую рассмотренной выше алгебре бесконечно малых преобразований, будем называть асимптотической группой Пуанкаре.

Проведенный в декартовой системе координат анализ, ввиду инвариантности поверхностных интегралов в (8), тривиально распространяется на случай произвольных координат. Таким образом, существование группы G, инфинитезимальные преобразования которой генерируются в каноническом формализме ОТО гамильтонианом, не зависит от выбора пространственных координат. Зная преобразование координат, связывающее выбранную систему с декартовой, мы всегда получим конкретный вид асимптотических условий, заменяющих (12) и (14).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как было показано выше, поверхностные члены в коммутаторах связей могут быть получены в общем случае и не зависят от добавления к связям поверхностных интегралов. При этом, вообще говоря, не возникает замкнутой алгебраической структуры, требуемой для самосогласованности гамильтонова формализма. Это означает, что лишь тогда, когда как начальные данные, так и преобразования координат определяются специальным образом, можно построить гамильтонов формализм для открытых пространств.

В этой работе мы рассмотрели простейший возможный случай – пространство Минковского и соответствующие непрерывные преобразования группы Пуанкаре. Оказалось, что группа естественно расширяется с тем, чтобы включить бесконечную инвариантную подгруппу. Эту расширенную группу мы называем асимптотической группой Пуанкаре. Она сохраняет асимптотические условия и реализуется в гамильтоновом формализме ОТО. Разумеется, эта группа преобразований инвариантна относительно замен координат на гиперповерхности одновременности.

Автор глубоко признателен А.А.Логунову за постановку задачи и интерес к работе, Н.Е.Тюрину, О.А.Хрусталеву и А.В.Разумову за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. - Phys. Rev., 1960, 117, No. 6, p. 1595-1602.
2. Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. - J. Math. Phys., 1960, J[, No. 5, p. 434-439.
3. Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. - Phys. Rev., 196$, 118, No. 4, p. 1100-1104.
4. Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. - Phys. Rev., 1960, 120. No. 1, p. 313-320.
5. Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. - Phys. Rev., 1961, 121. No. 5, p. 1556-1566.
6. Arnowitt R., Deser S., Misner C.W. - Phys. Rev., 1961, 122, No. 3, p. 997-1006.
7. Dirac P.A.M. - Proc. Roy. Soc., 1958, A246, p. 333-343.
8. Dirac P.A.M. - Phys. Rev., 1959, 114, No. 3, p. 924-930.
9. Regge T., Teitelboim C. - Ann. Phys. (N.Y.), 1974, 88, No. 1, p. 286-318.
10. Пухов А.Е. - Вестн. Моск. ун-та, Сер."Физ., Астрон.", 1983, 24, №3, с.41-47.
11. Денисов В.И., Логунов А.А. - Итоги науки и техники. Сер."Современные проблемы матем." - М.: ВИНИТИ, 1982, т. 21.
12. Schwinger J. - Phys. Rev., 1963, 130, No. 3, p. 1253-1258.
13. Pirani F.A.E., Schild A. - Phys. Rev., 1950, 79, No. 6, p. 986-991.
14. Bergmann P.G., Penfield R., Schiller R., Zatzkis H. - Phys. Rev., 1950, 80, No. 1, p. 81-88.
15. Pirani F.A.E., Schild A., Skinner R. - Phys. Rev., 1952, 87, No. 3, p. 452-454.
16. Hanson A.J., Regge T., Teitelboim C. - Constrained Hamiltonian systems. - Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
17. Higgs P.W. - Phys. Rev. Lett., 1959, 3, No. 1, p. 66-67.
18. Benguria R., Cordero P., Teitelboim C. - Nucl. Phys., 1977, B122, No. 1, p. 61-99.
19. Teitelboim C. - Phys. Lett., 1977, 69B, No. 2, p. 240-244.
20. Dirac P.A.M. - Canad. J. Math., 1951, 3, No. 1, p. 1-23.
21. Teitelboim C. - Ann. Phys., (N.Y.), 1973, 79, No. 2, p.542-557.
22. Hojman S., Kuchar K., Teitelboim C. - Ann. Phys. (N.Y.), 1976, 96, No. 1, p. 88-135.
23. Kuchar K. - J. Math. Phys., 1976, 17, No. 5, p. 777-791.
24. Bergmann P.G., Komar A. - Int. J. Theor. Phys., 1972, 5, No. 1, p. 15-28.
25. Christodoulou D., Murchadha N.O. - Comm. Math. Phys., 1981, 80, No. 2, p. 271-300.
26. Схоутен И.А., Стройк Д.Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. - М.: ГИИЛ, 1948, т. 2.

Рукопись поступила 21 ноября 1983 года.

Цена 15 коп. Индекс 3624

В.О.Соловьев.

Пространство Минковского и асимптотическая группа Пуанкаре
в общей теории относительности.

Редактор Н.В.Ежела. Технический редактор Л.П.Тимкина.
Корректор М.И.Онегина.

Подписано к печати 30.11.83. Т-22732. Формат 70x100/16.
Офсетная печать. Индекс 3624. Цена 15 коп.
Заказ 3358.1,03 уч.-изд.л. Тираж 260.

Институт физики высоких энергий, 142284, Серпухов
Московской обл.