ЛЕКЦИЯ 1

1.1 ПОЛЕВОЙ ПОДХОД К ГРАВИТАЦИИ

В этом курсе лекций мы обсудим гравитацию во всех ее аспектах. Ньютоном был открыт фундаментальный закон гравитации: гравитационные силы пропорциональны массам и подчиняются закону обратных квадратов. Этот закон позже был модифицирован Эйнштейном, чтобы сделать его релятивистским. Изменения, необходимые чтобы сделать теорию релятивистской, очень основательны, мы знаем, что в теории относительности массы частиц не постоянны, поэтому фундаментальный вопрос заключается в том, как изменение масс в теории относительности изменяет закон гравитации.

Итак, Эйнштейн сформулировал свой закон в 1911 году, так что предмет не является новым, и физические результаты, которые мы должны объяснить, были прекрасно объяснены самим Эйнштейном. Обычный курс гравитации, поэтому, начинается с формулирования законов в том виде, как они были получены Эйнштейном. Эта процедура, однако, не является необходимой, и по педагогическим причинам мы здесь примем другой подход к предмету. Сегодня студенты-физики знают квантовую теорию, мезоны и фундаментальные частицы, которые не были известны во времена Эйнштейна, тогда физика состояла только из гравитации и электродинамики, а электродинамика привела к построению теории относительности, так что проблема заключалась в том, чтобы привести теорию гравитации в соответствие с открытиями, которые были сделаны при изучении электродинамики.

Теория гравитации Эйнштейна, о которой говорят, что она является величайшим из достижений теоретической физики, привела к прекрасному соответствию гравитационных явлений и геометрии пространства, это была блестящая идея. Очевидное сходство гравитационных сил с электрическими силами, например, состоит в том, что и те, и другие следуют закону обратных квадратов, который может понять каждый ребенок, это заставляет каждого из этих "детей" мечтать, что когда он вырастет, он откроет закон геометризации электродинамики, так целое поколение физиков работало, стараясь построить так называемую единую теорию поля, которая объединила бы гравитацию и электродинамику в одно целое. Ни одна из этих единых теорий поля не имела успеха, и мы не будем обсуждать их в этих лекциях. Большинство из них является математическими играми, изобретенными математически мыслящими людьми, имевшими очень слабое знание физики, и большинство из них нельзя понять. Сам Эйнштейн работал над этим, и его работы по этому предмету, по крайней мере, имеют некоторый смысл, но тем не менее, не существует успешной единой теории поля, которая объединила бы гравитацию и электродинамику.

Такой успех оказался бы, однако, кратковременным, потому что сейчас физика содержит много больше, не только электродинамику и гравитацию, нам пришлось бы беспокоиться об объединении и мезонов, и каонов, и нейтрино, и всех остальных тридцати или около того частиц, которые нам известны. Так что объединение электродинамики и гравитации не было бы великим достижением, кроме электричества и гравитации в мире еще слишком много всего.

Наш педагогический подход больше подходит для мезонных теоретиков, которые привыкли к полевой идее, так что им нетрудно убедиться, что Вселенная сделана из двадцати девяти или тридцати одного полей, входящих в одно великое уравнение; явления гравитации добавляют еще одно такое поле в общую кучу, это новое поле, которое было упущено в предыдущих рассмотрениях, оно только одно из тридцати или около того; объяснение гравитации, таким образом, соответствует объяснению трех процентов из всего числа известных нам полей.

Мы даже можем описать наш подход с помощью фантастики, вообразив, что в некоторой малой области Вселенной, скажем, на планете, такой как Венера, живут ученые, которые знают все об остальных тридцати полях Вселенной, знают то, что и мы знаем о нуклонах, мезонах и т.д., но не знают о гравитации. И вдруг делается чудесный новый эксперимент, который показывает, что две большие нейтральные массы притягивают друг друга с очень-очень слабой силой. Итак, что будут делать жители Венеры, чтобы объяснить такой замечательный экспериментальный факт? Они, вероятно, попытаются объяснить его с помощью полевых теорий, которые им уже знакомы.

1.2 ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Прежде чем продолжать, давайте обсудим некоторые экспериментальные факты, с которыми должен иметь дело венерианский теоретик, конструируя теорию этого замечательного нового эффекта.

Прежде всего, имеется факт, что притяжение следует закону обратных квадратов. Нам это известно очень и очень точно из изучения орбит планет. Затем имеется факт, что сила пропорциональна массам объектов. Это было известно Галилею, который открыл, что все объекты падают с одним ускорением. Насколько хорошо мы знаем это? Ну, в принципе, совершенно ясно, что надо делать, сначала мы определяем массу как инерцию объекта, которую мы измеряем, прилагая известные силы и измеряя ускорение. Затем мы измеряем притяжение, вызванное гравитацией, например, взвешивая и сравнивая результаты. Эти эксперименты, измеряющие силы и ускорения, было бы очень трудно провести с достаточной точностью, но есть другие пути для проверки этого с точностью до 10^{-8}, что было впервые сделано Этвешем. Это можно сделать путем сравнения гравитационной силы Земли с центробежной силой, вызванной земным вращением, которая является чисто инерционным эффектом. В принципе, свинцовый грузик, находящийся на некоторой широте, отличной от нуля градусов и девяноста градусов, не указывает на центр Земли. В действительности, он не указывает на центр также и из-за неоднородностей Земли, но все это можно принять во внимание при помощи сравнения. В любом случае, при некотором промежуточном угле, таком как на Рис. 1.1, свинцовый груз указывает в направлении, которое образует результирующая гравитационной силы и центробежной силы.

Если мы теперь сделаем груз из какого-нибудь другого материала, который имеет другое отношение инертной и гравитационной масс, он будет висеть под слегка отличным углом. Мы можем, таким образом, сравнивать разные вещества, например, если мы сделаем первый груз из меди, а второй из водорода, соображайте, было бы трудно сделать его из чистого водорода (может быть, подошел бы полиэтилен), мы можем проверить постоянство отношения инертной массы к гравитационной массе.

В действительности, экспериментально измеряются не разности таких крошечных углов, а моменты вращения, очень маленькие моменты вращения мерить удобнее, из-за специальных свойств кварцевых волокон, которые могут быть сделаны очень тонкими и все же способны выдерживать большие нагрузки. Два одинаковых веса из двух материалов подвешиваются на концах линейки, а линейка подвешивается, в направлении с востока на запад, за середину, если составляющие сил, перпендикулярные к гравитационным силам, не равны, то имеется общий момент вращения линейки, который можно измерить. Опубликованные результаты недавних экспериментов Дикке, которые я видел, не дают никакого эффекта, и делается вывод, что отношение инертных масс к гравитационным массам является постоянным с точностью до 10^{-8} для многих веществ, от водорода до свинца.

Подобный эксперимент можно выполнить, сравнивая гравитационную силу Солнца с силами инерции, соответствующими нашему орбитальному движению вокруг Солнца. В конце концов, все мы здесь на Земле вращаемся в пространстве с фантастической скоростью по орбите Земли, и единственная причина, почему мы не замечаем этого движения, в том, что все объекты вокруг нас также находятся на орбите; если бы гравитационные притяжения не были совершенно одинаковыми для различных объектов, объекты имели бы различные орбиты и существовали бы эффекты, связанные с этим различием. Суммарный эффект был бы подобен небольшой силе в направлении Солнца. Такой эффект исследовался в поисках дневной осцилляции, сравнивалось поведение пары грузов на крутильных весах на восходе и на закате. Естественно, были обнаружены различия: некоторые благодаря факту, что разные стороны здания имеют разные температуры — трудность многих этих экспериментов с очень слабыми эффектами в том, что надо быть уверенным, что измеряется именно то, что надо, а не что-нибудь еще. Тем не менее, общий вывод из результатов опытов состоит в том, что все объекты хорошо сбалансированы на своих орбитах с орбитой Земли, по крайней мере с точностью до 10^{-8}, эта точность уже говорит нам много важных вещей, например, энергия связи ядер имеет типичный порядок 6 Мэв на нуклон, а масса нуклона примерно 940 Мэв, короче, энергия связи имеет порядок одного процента от полной энергии. Тогда, точность 10^{-8} говорит нам, что отношение инертной и гравитационной масс *энергии связи* постоянно с точностью 10^{-6}. Мы проверяем даже отношение электронных энергий связи для электронов, находящихся на нижних оболочках, так как 10^{-8} от массы нуклона это примерно 9 эв. Если удастся продвинуть эксперимент до точности 10^{-10}, как это может быть сделано в ближайшем будущем, мы будем иметь пятипроцентную проверку отношения даже для химических энергий связи, которые имеют порядок 2 эв.

С этой точностью мы также проверяем гравитационное поведение антиматерии. Разительное подобие электрических и гравитационных сил, закон обратных квадратов, заставило некоторых людей придти к выводу, что было бы хорошо, если бы антиматерия отталкивалась от материи; они говорят: в электричестве одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются, хорошо бы, если бы в гравитации все было наоборот — одноименные притягивались бы, а разноименные отталкивались. Единственным кандидатом для гравитационных “разноименных” является антиматерия. Но с точностью до 10^{-8} мы можем проверить гравитационное поведение поправок к электронным энергиям связи K-электронов в свинце из-за поляризации вакуума, которая включает виртуальные пары и, таким образом, антиматерию. Здесь можно сказать, что нет абсолютно никаких указаний на то, что материя и антиматерия отличаются своим гравитационным поведением. Все данные, экспериментальные и даже отчасти теоретические, по-видимому, указывают, что в гравитации главную роль играет содержание энергии, и, таким образом, так как материя и антиматерия обе представляют собой положительные энергии, гравитация не делает между ними различия.

Другие данные происходят из факта, что свет "падает" в гравитационном поле на величину, которая дается нашей теорией, он отклоняется, проходя, например, мимо Солнца на измеряемую величину, которую мы позже вычислим. Но фотон является своей собственной античастицей, так что мы должны заключить, что и частица и античастица в этом случае обнаруживают одинаковое гравитационное поведение. В качестве упражнения должно быть забавным построить теорию, в которой фотоны, приходящие от электрона, отличались бы от фотонов, приходящих от позитрона, но так как нет абсолютно никаких данных, что это необходимо для объяснения явлений, очень мало оснований для построения такой теории, она объясняла бы все известные вещи так же как и современная теория, наиболее вероятно, что она могла бы быть опровергнута каким-нибудь другим эффектом, возможно, предсказывая некоторые новые электродинамические эффекты, существование которых легко опровергнуть экспериментально.

Наиболее прямое подтверждение того, что материя и антиматерия ведут себя одинаково по отношению к гравитации, следует из экспериментов по распаду K_0 и $\bar{K}_0$ выполненных в МТИ[1]. Сам по себе эксперимент не без греха, но возможно, мы можем использовать его результаты, чтобы закрыть теорию различного поведения. Аргументы для этого были даны М.Гудом [Good 61].

Предположим, что K_0 и $\bar{K}_0$ подчиняются гравитации, иначе аргумент не работает. Они являются античастицами по отношению друг к другу, так что мы увидим, что произойдет, если одна притягивается, а другая отталкивается гравитацией. Эти частицы имеют две моды распада,

[1]Массачусетский технологический институт. *Примечание переводчика*

которые описываются следующим образом

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(K_0 + \bar{K}_0\right), \quad K_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(K_0 - \bar{K}_0\right).$$

Амплитуды распада для этих двух мод интерферируют, эксперимент регистрирует эту интерференцию и дает значение Δm для разности масс, так что $\Delta m < \hbar/10^{-10} sec$. Это значение несовместимо с идеей, что материя притягивается, а антиматерия отталкивается, поскольку эксперимент проводился в гравитационном поле Земли; если гравитационный потенциал равнялся ϕ, то имелось бы возрастание или убывание массы, на $m\phi$ для одного и $-m\phi$ для другого, ожидаемая разность масс превышает экспериментальные ограничения МТИ. Если мы рассмотрим гравитационный потенциал не Земли, а Солнца, который больше, или даже Галактики, то мы будем получать все лучшее и лучшее ограничение на степень, с которой соблюдается равенство гравитационного взаимодействия. Вся эта аргументация может быть отброшена теми, кто придерживается теории отталкивания антиматерии, все, что для этого необходимо — это предположить, что K_0 и $\bar{K}_0$ не являются гравитирующими частицами, но это требует нового специального предположения. Очевидно, что любой отдельный экспериментальный факт может быть отвергнут, если мы захотим придумать специальную причину того, почему эксперимент дает тот результат, который он дает.

Также известно, что одиночные свободные нейтроны, как можно было ожидать, падают в гравитационном поле. Этот факт известен с хорошей точностью, поскольку требуется учитывать его при построении нейтронных интерферометров, медленные нейтроны от реактора могут собираться в узкие пучки и регистрироваться на некотором расстоянии, порядка сотен футов, обнаружено, что они падают в гравитационном поле Земли подобно всем остальным частицам, которые мы можем исследовать. Подведем итоги: первый замечательный факт, касающийся гравитации, состоит в том, что отношение инертной и гравитационной масс является постоянным, где бы мы не проверяли это.

Вторая замечательная вещь, касающаяся гравитации, это ее слабость. Иными словами, гравитация в действительности так слаба, что если венерианцы уже назвали взаимодействия с β-распадом “слабыми”, то открытие гравитации привело бы их в сильное замешательство. Ясно, что гравитация играет важную роль в нашей жизни, то есть, гравитационные силы не слабы по сравнению с силой мускулов наших ног, мы имеем в виду, что гравитационные силы очень слабы по сравнению с другими силами, действующими между частицами. Это сравнение имеет преимущество большей универсальности перед сравнением с чем-то вроде силы человека. Давайте, например, вычислим отношение гравитационной силы к электрической для двух электронов, в результате получаем

$$F_{\text{электрическая}}/F_{\text{гравитационная}} = 4,17 \times 10^{42}.$$

Другими словами, гравитация действительно слаба. Это сравнение в терминах сил является более важным, чем обычные утверждения в терминах констант взаимодействия, например, часто говорят, что электромагнитные силы "слабые", поскольку число $e^2/\hbar c$ мало, а именно, $1/137$. Но ссылка на $1/137$ является не очень убедительной, так как мы можем с таким же успехом вообразить, что определяющую роль играет число, которое выражается рационализированным безразмерным зарядом электрона, равным $\sqrt{(4\pi e^2/\hbar c)} = 0,31$, что кажется очень отличающимся от $1/137$, но имеет то же самое физическое содержание. Таким образом, когда слабое взаимодействие (β-распад) называют слабым, из-за его "малой" силы взаимодействия $GM_p^2 = 10^{-5}$, мы можем спросить, причем здесь масса протона ? Если слабые взаимодействия получаются при помощи некоторого мезона, называемого сейчас B-мезоном, может быть более естественно включить квадрат массы B-мезона, которая может быть намного больше, чем масса нуклона, достаточно большой, чтобы сделать константу взаимодействия существенно отличающейся от "малого" числа 10^{-5}.

Все остальные известные нам поля настолько сильнее гравитации, что мы чувствуем, что гравитация, вероятно, никогда не может быть объяснена как некоторая поправка, как член, которым до сих пор пренебрегали, в некоторой теории, объединяющей все остальные известные нам поля. Число 10^{42} является настолько вызывающе большим, что очень хочется поискать другие большие числа, которые могли бы быть связаны с ним, эта идея исходит от Эддингтона [Eddi 31,36,46]. Одно такое большое число уже достаточно загадочно, два больших числа были бы еще хуже, нам было бы легче знать, что они связаны, что величина одного задает величину другого, так что остается объяснить одну большую штуковину, а не две. Эддингтон предположил, что $10^{42} = 2^{137}$, но некоторые места его книги так темны, что можно сказать, что у него совсем нет полезной теории, все это просто слишком непонятно. Мы будем искать объяснение 10^{42} в другом направлении. Мы знаем другие такие большие числа, например, число атомов или частиц в нас, но опять же, нам хотелось бы избавиться от нашей человеческой натуры при таких сравнениях. Интересно, что гравитационные силы важны для движения больших объектов, таких как галактики, так что можно поискать связь между величиной гравитационных сил и размером Вселенной.

Хотя Вселенная очень велика, и ее границы не очень хорошо известны, но все же можно определить что-то вроде ее радиуса. Из опыта известно, что свет от далеких звезд и галактик сдвинут в сторону нижних частот, как если бы они разбегались со скоростью, пропорциональной их расстоянию от нас. Это можно объяснить при помощи так называемой теории взрыва Вселенной. Как мы увидим, теория гравитации очень важна при рассмотрении космологических моделей, и дальше мы обсудим их в нашем курсе. Но пока предположим, что галактики сделаны из вещества, которое начало расширяться в пространстве в результате большого взрыва, тогда пропорциональность между скоростью удаления от центра и расстоянием получается очень естественно, так как вещество, которое дальше от нас, находится дальше постольку, поскольку оно движется быстрее. Пропорциональность такова, что $R/V = T$ есть время, отсчитанное от гипотетического старта. Это время (его обратная величина известна как постоянная Хаббла) примерно равняется 13×10^{10} лет. Ошибка в этой величине не слишком мала, несколько лет назад величина считалась равной 2×10^{10} лет. Ошибки происходят из-за измерений расстояний, допплеровские смещения измерить гораздо легче, чем расстояния до удаленных галактик.

Эта константа представляет собой время жизни Вселенной, нам необязательно верить, что Вселенная началась T лет тому назад, но это дает фундаментальный размер Вселенной, совсем как величина e^2/mc^2 дает "радиус электрона". Подобным образом, величина $T \times c$ представляет собой длину, которая может быть названа "радиусом Вселенной". Давайте посмотрим, можем ли мы получить множитель порядка 10^{42} откуда-нибудь из постоянной Хаббла. Мы можем, например, рассмотреть отношение времени, которое нужно свету, чтобы пройти комптоновскую длину волны электрона $\hbar/mc^2$, или протона $\hbar/M_pc^2$ к постоянной Хаббла, опять-таки, мы надеемся, что это отношение дает нечто более важное, чем число секунд, которое является человеческим масштабом. Эти времена есть $\hbar/mc^2 = 10^{-21}$ сек. или $\hbar/M_pc^2 = 10^{-24}$ сек., а время T есть $T = 10^{17}$ сек., отношение получается равным примерно 10^{41} для протонов, что, согласно нумерологическим аргументам, не слишком далеко от отношения электрической к гравитационной силе для протонов, примерно 10^{36}, если мы воспользуемся электронами, отношение будет 10^{38}, не слишком близко к 10^{42}, но надо понимать, что именно мы делаем, — просто выдвигаем некоторые безумные спекуляции, чтобы посмотреть, получатся ли какие-то разумные вещи. В действительности, Дирак [Dira 37,38] пытался разработать теорию гравитации, в которой гравитационная постоянная в точности является этим числом. Одна из трудностей состоит в том, что ему пришлось допустить зависимость силы гравитации от времени, так как Вселенная стареет в единицах времени комптоновской волны. Но очень трудно определить, что имеется в виду, когда говорят, что сила гравитации зависит от времени, а все остальное “остается тем же самым”; так как смысл имеют безразмерные отношения величин, он мог бы с таким же успехом описать ситуацию, говоря, что электрический заряд зависит от времени, поэтому его теория в действительности не очень хорошо определена. Давайте на время забудем эти трудности и посмотрим, можем ли мы интуитивно вывести какие-нибудь следствия зависимости гравитационной постоянной от времени. Некоторые считают, что этим объясняются землетрясения, Земля слегка растягивается, когда гравитационные силы ослабевают, так что мы ожидаем появления разломов и всего прочего. Однако альтернативная теория, говорящая что магматическая внутренность Земли содержит потоки, лучше объясняет, почему землетрясения происходят в очень локализованных районах земной коры. Так что, теория землетрясений не очень нас успокаивает.

Можно попытаться опровергнуть идею изменения G с помощью выводов теории звезд, мы не будем детально изучать звезды, но идея о том, как они работают, состоит в том, что материя звезды падает в центр, она приобретает гравитационную энергию и нагревается до точки, когда могут начаться ядерные реакции, затем давление поддерживает звезду в состоянии равновесия, потерянная на излучение энергия теперь возобновляется ядерными реакциями, которые не позволяют звезде коллапсировать дальше. Если мы теперь предположим, что гравитационная константа зависит от времени и была в прошлом больше, то мы должны предположить, что и скорость генерации энергии в прошлом была больше, чтобы удержать больший вес, детальное рассмотрение показывает, что светимость звезды ведет себя примерно как шестая степень величины гравитационной константы, количественно, если константа становится больше, требуется более высокая температура в центре, чтобы удержать больший вес, поэтому ядерные реакции происходят с большей скоростью. Мы можем спросить, какой действие это оказало бы на наше Солнце, и, следовательно, на температуру поверхности Земли, мы думаем, что нам известно кое-что о температуре поверхности Земли из того факта, что на нашей планете около 10^9 лет существовал некоторый вид жизни. Если бы гравитационная постоянная раньше была большей, то и светимость Солнца была бы большей, согласно закону G^6, и Земля находилась бы на орбите ближе к Солнцу, чем сейчас. Интенсивность света на Земле была бы пропорциональной G^8. Теперь мы можем сделать некоторую оценку температуры Земли. Реальное вычисление является трудным, потому что Земля светится, имеет облака, есть и другие сложности, но мы можем сделать оценку, принимая Землю за черное тело. Черное тело излучает энергию как T^4 со всей поверхности, так как оно вращается, и оно приходит к некоторой равновесной температуре с приходящей энергией Солнца. Если мы сравним ответ с измеренными температурами для поверхностей планет, результат оказывается удивительно хорошим (он согласуется со всем, что известно о поверхностных температурах), так что мы можем использовать эту оценку для расчета температуры поверхности Земли несколько миллиардов лет назад, при гравитационной постоянной большей примерно на 8 процентов. Энергия падающего излучения вдет себя как T^4, а E ведет себя как G^8, так что температура Земли пропорциональна G^2, что получается примерно на 16 % или на 48 градусов Цельсия больше миллиард лет тому назад.

Теперь мы можем спросить биофизиков и биохимиков, какой была бы поверхность Земли при температуре около 75 градусов Цельсия. Это недостаточно горячо для кипения морей, так что мы не можем полностью отбросить нашу теорию. Можно допустить, что жизнь началась и при таких температурах воды. У нас на Земле есть места, например, горячие источники в Йеллоустоуне, где некоторые бактерии живут в воде при подобных температурах. Это была бы странная жизнь, и древнейшие ископаемые, найденные на Земле, не подтверждают никаких особенностей, которые соответствовали бы таким высоким температурам, но тем не менее, насколько мне известно, мы не можем утверждать, что имеются однозначные свидетельства против высокой температуры Земли в древние времена.

Очень большая светимость звезд, если бы гравитационная постоянная была в прошлом больше, изменила бы масштаб временно́й эволюции некоторых звезд. Я знаю, что некоторые астрономы пытаются понять, противоречит ли это наблюдениям, но я не знаю, пришли ли они к определенному выводу.

Другое удивительное совпадение, связывающее гравитационную постоянную с размером Вселенной, обнаруживается при рассмотрении полной энергии. Полная гравитационная энергия всех частиц Вселенной это что-то вроде GMM/R, где $R = Tc$ и T есть время Хаббла. В действительности, если бы Вселенная была сферой постоянной плотности, появился бы множитель $3/5$, но давайте пренебрежем этим, так как наша космологическая модель не слишком строгая. Если мы теперь сравним это число с полной энергией покоя Вселенной Mc^2, мы получим вдруг замечательный результат, что $GM^2/R = Mc^2$, так что полная энергия Вселенной есть *ноль*. В действительности, мы не знаем ни плотность, ни радиус достаточно хорошо, чтобы доказать это равенство, но тот факт, что эти два числа должны быть одинаковой величины, есть воистину удивительное совпадение. Здорово думать, что *ничего* не стоит породить новую частицу, так как мы рождаем ее в центре Вселенной, где она будет иметь отрицательную гравитационную энергию, равную Mc^2.

В этих оценках труднее всего определить плотность Вселенной. Мы видим звезды и галактики достаточно уверенно, но мы не знаем, как много черных звезд, звезд, которые выгорели. Мы также не знаем плотности межгалактического газа. Мы кое-что знаем о плотности натрия в пространстве между галактиками из измерений поглощение D-линий, когда они приходят от далеких звезд. Но натрий, вероятно, составляет очень маленькую часть целого, и нам надо бы знать плотность водорода. Из изучения движения спиральных рукавов галактик и глобулярных кластеров оказывается, что галактики содержат в центре сгусток темной материи. Все эти фрагментарные данные не позволяют нам получить никакой надежной оценки средней плотности Вселенной. Эддингтон в своих оценках двадцатых годов использовал значение один атом водорода на кубический сантиметр для галактик. Радиоастрономы, которые недавно изучали галактику в “водородном свете”, получили значение только чуть меньшее, примерно $0,7$ атома водорода на кубический сантиметр.

Нет никаких данных о плотности межгалактической материи, космологи предполагают значение примерно в 10^5 раз меньшее, десять атомов водорода на кубический метр. С этой оценкой мы получаем поразительный результат, что полная энергия Вселенной равна нулю. Почему это должно быть так — одна из великих загадок, и следовательно, один из главных вопросов физики. В конце концов, какой смысл был бы в изучении физики, если бы не загадки, являющиеся наиболее важными предметами для исследования?

Все эти спекуляции о возможных связях между размером Вселенной, числом частиц и гравитацией не оригинальны, они делались в прошлом многими людьми. Эти фантазеры, в общем, были двух типов: или очень серьезные математические игроки, которые конструировали математические космологические модели, или шутники, которые находили забавные численные курьезы с тоскливой надеждой, что когда-нибудь это может пригодиться.

1.3 КВАНТОВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ГРАВИТАЦИИ

В следующих нескольких нескольких лекциях мы начнем строить квантовую теорию гравитации. Нам полезно задуматься, будут ли у такой теории какие-нибудь наблюдаемые эффекты. Сначала давайте рассмотрим гравитацию как возмущение для атомов водорода. Очевидно, что дополнительное притяжение между электроном и протоном приводит к небольшому изменению энергии связи водорода, мы можем вычислить это изменение энергии по теории возмущений и получить значение ϵ. Далее, зависящая от времени волновая функция атома водорода ведет себя как $\psi = \exp(-iEt)$, где E имеет такую величину, что частота оказывается примерно 10^{16} циклов за секунду. Итак, чтобы наблюдать какие-нибудь эффекты, вызванные ϵ, мы должны выждать время пока истинная волновая функция будет отличаться от невозмущенной волновой функции на что-нибудь вроде 2π по фазе. Но величина ϵ так мала, что разность фаз составит только 43 секунды (угловых) за время, равное возрасту Вселенной T, умноженному на 100. Таким образом, гравитационные эффекты в атомах ненаблюдаемы.

Давайте рассмотрим другую возможность, атом удерживаемый одной гравитацией. Например, мы можем взять связанное состояние из двух нейтронов. Вычислив боровский радиус такого атома мы обнаружим, что он будет равен 10^8 световых лет и что энергия связи его будет 10^{-70} ридбергов. Таким образом, очень мало надежды наблюдать гравитационные эффекты для систем, которые достаточно просты, чтобы быть вычислимыми в квантовой механике.

Другое предсказание квантовой теории гравитации заключается в том, что сила будет порождаться виртуальным обменом некоторой частицей, которую обычно называют гравитоном. Таким образом, можно ожидать, что при определенных условиях мы могли бы наблюдать гравитоны, так, как мы можем наблюдать фотоны. Однако, позвольте напомнить, что хотя свет и был обнаружен в истории человечества очень рано (Адам сделал это), электромагнитные волны были созданы только в 1898 году, при достаточном понимании их полевой природы, и что квантовые аспекты этих волн не были обнаружены еще долгое время. Мы наблюдаем гравитацию, в том смысле, что мы знаем, как мы притягиваемся к Земле, но классические гравитационные волны до сих пор не были обнаружены; это не противоречит нашим ожиданиям — гравитация так слаба, что ни один эксперимент, который мы можем сегодня совершить, не будет достаточно чувствителен для измерения гравитационных волн, по крайней мере, тех, которые, как предполагается, происходят от самых сильных источников, которые мы можем рассмотреть, таких как быстро вращающиеся двойные звезды. А квантовые аспекты гравитационных волн еще в миллион раз дальше от детектируемости, очевидно, что нет никакой надежды когда-нибудь наблюдать гравитон.

1.4 О ФИЛОСОФСКИХ ПРОБЛЕМАХ ПРИ КВАНТОВАНИИ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Чрезвычайная слабость эффектов квантовой гравитации ставит теперь перед нами некоторые философские проблемы: может быть, природа пытается сказать нам здесь что-нибудь новое, может быть, мы не должны пытаться квантовать гравитацию. Не может ли так случиться, что мы не должны настаивать на единстве природы, которое требовало бы квантовать все на свете? Возможно ли, что гравитация не квантуется, а весь остальной мир квантуется? Есть некоторые предложенные ранее аргументы в пользу того, что мир не может быть наполовину квантовым, а наполовину классическим. Итак, постулат, который определяет квантово-механическое поведение, состоит в том, что для различных процессов существует амплитуда. Тогда не может быть, что частица, которая описывается амплитудой, такая как электрон, обладает взаимодействием, которое описывается не амплитудой, а вероятностью. Рассмотрим эксперимент по дифракции на двух щелях и поставим гравитационный детектор, который может считаться классическим и который может, в принципе, сказать нам, через какую щель прошел электрон, как показано на Рис. 1.2. Давайте вообразим, что детектор еще не получил сигнала, говорящего ему, через какую щель прошел электрон, тогда положение электрона описывается амплитудой, половина которой проходит через верхнюю щель, а половина проходит через нижнюю щель. Если гравитация взаимодействует полевым образом, получается, что гравитационное поле также должно иметь амплитуду, половина которой соответствует гравитационному полю электрона, который прошел через одну из щелей. Но именно это и является характеристикой квантового поля, то что оно должно описываться амплитудой, а не вероятностью! Таким образом, кажется невозможным разрушить квантовую природу полей.

Несмотря на эти доводы, мы должны держать ухо востро. Все же еще возможно, что квантовая теория не дает абсолютной гарантии, что гравитация *должна* быть квантована. Я не хочу здесь быть неправильно понят, я не имел в виду, что мы должны позволить себе глупости, я имел в виду, что если мы рассмотрим альтернативные теории, которые не кажутся оправданными a priori, и вычислим, что получится, если такие теории будут справедливы, внезапно может оказаться, что это действительно правильный путь! Мы никогда не сделаем такого открытия, если будем рассуждать, что “конечно, надо всегда оставлять возможность сомнения”, но действовать и вычислять с одним и тем же предубеждением. В таком духе, я хотел бы предположить, что, возможно, квантовая механика неверна на больших расстояниях и для больших объектов. Но не подумайте, я еще не говорю, что я думаю, что квантовая механика действительно неверна на больших расстояниях, я только говорю, что это не противоречит нашим знаниям. Если такая неудача квантовой механики связана с гравитацией, мы можем спекулятивно ожидать, что это случается для таких масс, как $GM^2/\hbar c = 1$, где M близко к 10^{-5} грамм, что соответствует примерно 10^{18} частиц. Итак, квантовая механика дает глупые ответы для объектов такого размера, если мы вычислим вероятность того, что песчинка перепрыгивает через стену, то получим ответ типа $10^{-260000}$, что ужасно. Таким образом, мы не должны пренебрегать тем, что квантовая механика может быть неверна для больших масштабов, неверна для объектов обычных размеров. В связи с этим, мы должны обсудить проблемы, которые возникают в теории наблюдений и измерений. Давайте, например, поговорим о парадоксе шредингеровского кота. Это не настоящий парадокс, в том смысле, что имеется два возможных ответа, к которым можно прийти логически, это способ указать на философские трудности в квантовой механике, и каждый физик должен решить, какую сторону он поддерживает.

Представим, что в закрытом ящике, в который мы можем заглянуть, помещены живой кот и заряженный пистолет, кот закреплен таким образом, что если пистолет стреляет, он умирает. Далее, пистолет соединен со счетчиком Гейгера, который считает частицы от радиоактивного источника, предположим, что источник таков, что мы ожидаем одного срабатывания в час. Вопрос в том, какова вероятность того, что кот жив час спустя после того, как мы закрыли коробку?

Ответ квантовой механики получить очень легко, имеется два возможных конечных состояния, которые мы рассматриваем, амплитуда равна

$$\text{амплитуда} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\text{кот жив}) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi(\text{кот мертв}).$$

Размышляя об этом ответе, мы чувствуем, что кот не смотрит на вещи таким же образом, не чувствует, что *он* на $\frac{1}{\sqrt{2}}$ жив и на $\frac{1}{\sqrt{2}}$ мертв, тут или одно, или другое. Так что, то, что может быть описано амплитудой для внешнего наблюдателя, не обязательно описывается подобной амплитудой, когда наблюдатель является частью амплитуды. Таким образом, внешний наблюдатель в обычной квантовой механике занимает особую позицию. Чтобы проверить, жив ли кот или мертв, он проделывает маленькую дырочку в коробке и смотрит; только после того, как он сделал свое измерение, система находится в хорошо определенном конечном состоянии, однако ясно, с точки зрения внутреннего наблюдателя, что результаты этого измерения внешним наблюдателем определяются вероятностью, а не амплитудой. Итак, мы видим, что при традиционном описании квантовой механики имеется внутреннее различие между описанием, включающем внешнего наблюдателя и описанием без наблюдения.

Этот вид парадокса появляется всякий раз, когда мы рассматриваем усиление атомного события, такое, что понятно как оно влияет на всю Вселенную. Традиционное описание тотальной квантовой механики мира полной Чудовищной Волновой Функцией (которая включает всех наблюдателей), подчиняющейся уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \mathbf{H}\Psi$$

подразумевает неисчислимо сложную бесконечность амплитуд. Когда я играю в Лас-Вегасе и собираюсь поставить деньги на номер 22 в рулетке, а ближайшая ко мне девушка проливает свой бокал, потому что она увидела кого-то знакомого, я останавливаюсь, не успев сделать ставку, а 22 выпадает, я вижу, что вся история Вселенной для меня связана с фактом, что какой-то небольшой фотон задел нервное окончание ее сетчатки; таким образом, вся Вселенная раздваивается в каждом атомном событии. Люди, которые настаивают на принятии всей квантовой механики буквально, удовлетворены такой картиной, так как нет никакого внешнего наблюдателя для волновой функции, описывающей всю Вселенную. Они принимают, что истинное описание мира включает все амплитуды, которые вот так раздваиваются от каждого атомного события. Но тем не менее, мы, являющиеся частью такой Вселенной, знаем каким путем Вселенная сделала выбор для нас, так что мы можем проследить наше прошлое. Итак, вот философский вопрос, встающий перед нами, когда мы прослеживаем наш прошлый путь: становится ли результат нашего наблюдения реальным в том же смысле, что конечное состояние было бы определенным, если бы наблюдение делал внешний наблюдатель? Это очень запутано, особенно когда мы рассматриваем, что даже если мы можем последовательно рассматривать себя как всегда являющихся внешними наблюдателями, когда мы смотрим на остальной мир, остальной мир в то же время наблюдает нас и часто мы соглашаемся в том, что мы видим друг друга. Означает ли это тогда, что мои наблюдения становятся реальными только когда я наблюдаю наблюдателя, наблюдающего что-то как оно происходит? Эта точка зрения ужасна. Наслаждаетесь ли вы всерьез мыслью, что без наблюдателя нет реальности? Какого наблюдателя? Любого наблюдателя? Является ли насекомое наблюдателем? Является ли звезда наблюдателем? Была ли Вселенная реальной 10^9 лет до Р.Х., когда началась жизнь? Или, являетесь ли Вы наблюдателем? Тогда мир не будет реальным после того как Вы умрете? Я знаю много в других отношениях респектабельных физиков, которые страхуют свою жизнь. Какая философия может понять Вселенную без человека?

Чтобы прийти здесь к чему-то разумному, мы должны допустить возможность, что для достаточно сложных процессов амплитуды становятся вероятностями. Тот факт, что амплитуды складываются, может быть зарегистрирован только в процессах, которые детектируют разность фаз и интерференцию. Далее, фазовые соотношения для очень сложных объектов могут быть бесконечно сложны, так что интерференцию можно будет наблюдать, только если фазы всех частей сложного объекта развиваются очень и очень точным образом. Если же имеется некоторый механизм, с помощью которого эволюция фазы слегка смешивается, так что она не является абсолютно точной, то наши амплитуды становятся вероятностями для очень сложных объектов. Но, разумеется, если фазы имеют это встроенное смешивание, то могут быть и некоторые следствия, соответствующие этому смешиванию. Если бы одним из таких следствий являлось само существование гравитации, то не было бы и квантовой теории гравитации, что было бы ужасно для остальных наших лекций.

Это очень грубая спекуляция, но в ее обсуждении есть некоторый смысл, мы всегда должны иметь в виду возможность, что квантовая механика может оказаться неверной, так как она встречается с определенными затруднениями в свете тех философских взглядов, которые мы имеем об измерении и наблюдении.

1.5 ГРАВИТАЦИЯ КАК СЛЕДСТВИЕ ДРУГИХ ПОЛЕЙ

Давайте возвратимся к построению теории гравитации с точки зрения наших венерианских друзей. В общем, мы ожидаем, что возникло бы две школы мысли относительно того, что же делать с этим новым явлением, а именно:

1. что гравитация является новым полем, номер 31;
2. что гравитация является следствием чего-то такого, что мы уже знаем, но не умеем правильно вычислить.

На время мы примем вторую точку зрения, чтобы посмотреть, есть ли такие возможности. Факт универсального притяжения мог бы напомнить нам ситуацию в молекулярной физике, мы знаем, что все молекулы притягиваются одна к другой с силой, которая ведет себя как $1/r^6$ на больших расстояниях. Мы понимаем это в терминах дипольных моментов, которые индуцируются флуктуациями зарядовых плотностей молекул. То, что это универсально, хорошо известно из факта, что все вещества могут быть сделаны твердыми при достаточном охлаждении. Итак, одна из возможностей состоит в том, что гравитация может быть притяжением, вызванным подобными флуктуациями чего-нибудь, не знаем чего, возможно, чего-то, относящегося к заряду.

Если нас беспокоит факт, что квантовая механика теряет свою силу, так как при суммировании по всем состояниям часто возникают бесконечности, мы могли бы поискать связь между гравитацией, размером Вселенной и этим затруднением квантовой механики. Бесконечности всегда возникают, когда мы суммируем по знаменателям $\sum_n 1/(E - E_n)$. Итак, вполне возможно, что когда мы рассматриваем всю Вселенную, мы не должны суммировать по всем виртуальным состояниям обычным образом, а суммировать только те виртуальные состояния, для которых мы можем занять достаточно энергии у остальной Вселенной. Теория, которая не допускает виртуальных состояний, если нарушение закона сохранения энергии больше, чем полная энергия Вселенной, немного отличалось бы от обычной, предполагающей эту полную энергию бесконечной. Появятся отличия от обычной теории, но я подозреваю, что из такой теории в результате не возникнет ничего подобного гравитации.

Мы должны подумать, не могут ли гравитационные силы возникнуть из виртуального обмена уже известной частицей, такой как нейтрино. В конце концов, с виду оно имеет правильные характеристики, так как является нейтральной частицей с нулевой массой, так что его взаимодействие вело бы себя как $1/r$ и было бы очень слабым.

В следующей лекции мы разовьем эту нейтринную теорию гравитации и увидим, почему она неверна. Затем мы начнем строить теорию гравитации как 31-го поля, которое надо открыть.

ЛЕКЦИЯ 2

2.1 ПОСТУЛАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

При конструировании наших теорий гравитации нам надо быть настороже и не слишком буквально принимать многие предубеждения современной научной мысли. В прошлой лекции мы видели как выявилось нечто неудовлетворительное в том пути, которым вероятности входят в нашу картину Вселенной. Если мы действительно думаем, что Вселенная описывается великой волновой функцией без внешнего наблюдателя, то нечему быть вероятностью, так как не делается никаких измерений! Так думают многие физики, несмотря на экспериментальные данные о субрегионах Вселенной, которые очень аккуратно описываются волновыми функциями, представляющими амплитуды вероятностей результатов измерений.

Подобным образом, имеются трудности и с обычным описанием статистической механики, данным в учебниках, хотя и не непосредственно связанные с теорией гравитации; они относятся к космологическим вопросам, которые мы будем обсуждать позже. Часто постулируется, что *a priori* все состояния равновероятны. Это неверно для того мира каким мы его видим. Этот мир неправильно описывается физикой, принимающей этот постулат. В мире есть люди, не физики, а например, геологи, астрономы, историки, биологи, готовые поспорить, что если мы заглянем в не наблюдавшийся ранее район Вселенной, мы обнаружим там определенный порядок, не предсказываемый той физикой, в которую мы верим. Наш опыт говорит, что если мы заглянем в книгу, у которой на обложке написано "Наполеон", то, действительно, много шансов, что в ней будет что-нибудь о Наполеоне. И конечно, открывая страницы мы не ожидаем увидеть там систему в термодинамическом равновесии. Но физики не нашли способа учета таких шансов для ненаблюдаемых областей Вселенной. Современная физика никогда не предскажет так же хорошо, как геолог, шансы того, что если мы заглянем внутрь некоторых скал, то найдем там полезное ископаемое.

Таким же образом, астрономы обнаружили, что во всех наблюдаемых частях Вселенной мы видим звезды, которые горячее внутри и холоднее снаружи, то есть, системы, которые на самом деле очень далеки от термодинамического равновесия.

Мы можем понять, насколько невероятна эта ситуация с точки зрения обычных представлений термодинамики, рассматривая простые упорядочения. Рассмотрим в качестве Вселенной ящик, в котором имеется два вида частиц, белые и черные. Предположим, что в некоторой области Вселенной, такой как небольшой угол ящика, мы видим, что все белые частицы отделены от черных частиц вдоль диагонали (Рис. 2.1). Априорная вероятность того, что это случится, очень и очень мала, так что мы должны с нашими современными представлениями, отнести ее к статистической флуктуации, которая весьма невероятна. Что предскажем мы для остальной Вселенной? Предсказание состоит в том, что если мы посмотрим на другую область, наиболее вероятно, что мы найдем для следующей области намного менее упорядоченное распределение белых и черных частиц. Но в действительности, мы видим не это, каждая новая область, которую мы видим, имеет тот же порядок, что и предыдущая. Когда я сажусь в свою машину и еду в горы, которых я никогда раньше не видел, я обнаруживаю там деревья, выглядящие точно также, как и деревья, уже мне известные. Для экстремально больших чисел частиц вероятности таких наблюдений, даваемые обычной статистической механикой, фантастически малы.

Наилучшим объяснением флуктуации является то, что флуктуация имеет место только здесь, а все остальное случайно. Если все состояния a priori равновероятны и если мы обнаруживаем, что часть мира несимметрична, то остальной мир должен быть равномерно перемешан, потому что это — только флуктуация. Можно возразить, что события и структуры в мире взаимосвязаны, все они имели общее прошлое! Но это будет уже другая теория, а не описание Вселенной при помощи статистической механики. Это — противоположная теория, что в прошлом мир был более организован, чем теперь и что наиболее вероятное состояние — не состояние равновесия, а некоторое специальное состояние, которое изменяется динамически. Это предположение здравого смысла, принимаемое всеми историками, палеонтологами и прочими.

Вероятностные аргументы должны использоваться как проверка теории и могут быть привлечены следующим образом. Предположим, что *a priori* мы хотим приписать очень-очень малые шансы гипотезе, что Вселенная не должна быть описана специальной флуктуацией, возникшей из полного хаоса, характеризующего термодинамическое равновесие, например, давайте предположим, что *априорная* вероятность того, что все состояния равновероятны есть $1-10^{-100}$. Тогда давайте описывать набор упорядоченных состояний по некоторой схеме, например, предположим, что мы переписали все состояния, упорядочение которых может быть описано менее, чем миллионом слов. Теперь мы припишем остающуюся априорную вероятность 10^{-100} гипотезе, что Вселенная развивается из одного из этих специально упорядоченных условий в прошлом. Другими словами, мы принимаем предположение, что все состояния равновероятны, но хотим допустить возможность, что наблюдательные испытания могут нарушить гипотезу о равновесии.

Теперь мы начинаем делать наблюдения над окружающим нас миром и видим состояния с описанным упорядочением. Каждый из нас этим утром видел, что земля была снизу, а небо — сверху, но одного такого наблюдения уже достаточно, чтобы сильно увеличить шансы для упорядоченных состояний при суждении *a posteriori* о вероятности начальной ситуации. Делая все больше и больше наблюдений, мы получаем, что это увеличение в конце концов преодолевает даже фактор 10^{-100}, так как оно может быть рассчитано согласно теореме: если *априорная* вероятность случая A есть P_a, а *априорная* вероятность случая B есть P_b, и если делается наблюдение, которое более вероятно при выполнении A и менее вероятно при выполнении B, то *апостериорная* вероятность A вырастает в той пропорции, в какой результат измерения более вероятен, если выполняется A.

Делая какое-нибудь макроскопическое наблюдение в одном углу Вселенной мы обнаруживаем, что он далек от равновесия. Шансы того, что это — флуктуация, чрезвычайно малы, требуется только одно наблюдение макроскопического порядка чтобы свести вероятность к 10^{-2000}. Для этого достаточно упорядочения только пяти тысяч молекул. Таким образом, совершенно очевидно, что только специальные состояния могли бы привести к той огромной степени упорядоченности, которую мы наблюдаем в этом мире.

Как же тогда работает термодинамика, если ее постулаты неверны? Трюк заключается в том, что мы всегда устраиваем все таким образом, что не делаем экспериментов над вещами в том виде, в каком мы их находим, а только после того, как отбросили как раз все те ситуации, которые вели бы к нежелательным упорядочениям. Если надо проделать измерения над газами, которые первоначально заключены в металлический сосуд, мы стараемся "подождать, пока установится термодинамическое равновесие" (сколько раз мы слышали *эту* фразу!). И мы отбрасываем все такие ситуации, в которых что-нибудь происходит с аппаратурой, как например, электричество гаснет из-за сгоревшего предохранителя или кто-то бьет по сосуду молотком. Мы никогда не делаем экспериментов над Вселенной как она есть, а держим все под контролем, чтобы очень тщательно приготовить системы, над которыми мы экспериментируем.

Более удовлетворительный способ представления постулатов статистической механики мог бы быть таким. Предположим, мы знаем все детали (классической) системы, такие как масса газа, с бесконечной точностью, то есть, мы знаем положения и скорости всех частиц в некоторый момент времени $t = 0$. Тогда мы можем (отбрасывая действительные и практические трудности) рассчитать все точно, если точно знаем законы природы, и найти поведение и состояние всех других частиц в любой момент времени в будущем. Но теперь предположим, что есть некоторая небольшая неопределенность в наших измерениях, или в нашем знании какого-нибудь одного факта, который входит в расчет, положения или скорости какой-нибудь одной частицы, или что имеется небольшая неопределенность в точности, с которой мы знаем взаимодействие частиц. Совсем не важно (исключая контрпримеры, изобретенные математиками), в чем именно заключается эта неопределенность. Если такая неопределенность существует, мы должны описывать конечное состояние с помощью усреднения по этой неопределенности, и если проходит достаточно много времени, тем меньше, чем больше неопределенность и чем больше система, то предсказания будут очень близки к тем, которые дает каноническая теория термодинамического равновесия.

Если, например, мы нарисуем скорость молекулы номер 6 за время $t = 30$ минут как функцию от любой другой исходной переменной системы, такой как начальное положение или скорость частицы номер 133, мы получим чрезвычайно сложную кривую с очень и очень тонкими деталями, которые должны усредниться до “равновесных” результатов, как только мы усредним соответствующие переменные по начальной неопределенности. Другими словами, распределение конечных значений в рассматриваемой области должно быть очень похожим на “равновесное” распределение (Рис. 2.2).

Физически удовлетворительное описание термодинамики и статистической механики может быть достигнуто только когда поймешь, что проблема заключается в определении тех условий для системы, при которых различные вещи происходят с очень различными скоростями. Только при достаточно различных скоростях термодинамика полезна. Таким образом, термодинамика должна проводить различие между медленными и быстрыми процессами. Говоря о наступлении термодинамического равновесия для нашей массы газа, мы не должны ждать бесконечное время, а только время достаточно долгое для определенного класса взаимодействий (например, для соударений молекул), который приводит к тому типу равновесия, который мы рассматриваем. Изучая кислород в металлическом сосуде, мы не должны ждать столь долго, что стенки сосуда окислятся или металл испарится в пространство, как, в конце концов, произойдет, так как он обладает конечным давлением пара, мы также не должны рассматривать всех ядерных реакций, которые однажды в конце концов могут произойти (согласно нашей теории) для соударяющихся молекул.

Нам необходимо быть осторожными при интерпретации результатов наших теорий, когда они рассматриваются с полной математической строгостью. У нас нет достаточно хорошего определения физической строгости. Если в нашем теоретическом определении имеются небольшие неточности, то полная математическая строгость может превратить эти ошибки в кошмарные выводы.

Вопрос в том, как в квантовой механике сформулировать идею, что состояние Вселенной в прошлом было в каком-то отношении специальным. Очевидно, следует сказать, что волновая функция мира (если такая существует) имела определенный вид ψ_0 при $t = -$(возраст Вселенной). Но это будет означать, что волновая функция ψ в настоящее время говорит нам не только о нашем мире, но, равным образом, и о всех других возможных вселенных, которые могли развиться из того же самого начала.

Это парадокс кота в больших масштабах. В равной мере представленными являются "наш мир" плюс все другие мертвые коты, смерть которых была случайностью, контролируемой квантовым образом. Отсюда "наш мир" может быть получен путем "редукции волнового пакета". Каков механизм такой редукции? Необходимо предположить, или что наблюдающие существа делают что-то не описываемое квантовой механикой (то есть, уравнением Шредингера), или что все возможные миры, которые могли бы развиться из прошлого, одинаково "реальны". Я не хочу сказать, что каждый выбор "плох", а только указываю, что, насколько я понимаю, современная квантовая механика ведет или к одной или к другой идее.

2.2 ТРУДНОСТИ СПЕКУЛЯТИВНЫХ ТЕОРИЙ

При построении новых теорий надо требовать, чтобы эти теории были точными, давая описание, из которого могут быть выведены определенные заключения. Мы не хотели бы, чтобы нам позволялось изменять детали теории всякий раз, как мы обнаружим, что она не согласуется с экспериментом или с нашими исходными постулатами. Любая общая теория, которая не является полностью абсурдной, может быть подправлена еще более общим подходом в каждом пункте, где она встречается с противоречием, и если мы начнем верить в наши конструкции больше, чем в наблюдения, то окажемся в печальной ситуации. Нечто в таком роде случилось с Едиными Теориями Поля. Например, пусть одна такая теория утверждает, что имеется тензор $J_{\mu\nu}$, который "ассоциируется" с электромагнитным тензором. Но что это "ассоциируется" означает? Если мы примем, что они равны, теория предсказывает неправильные эффекты. Но пока мы не определим слово "ассоциируется", мы не будем знать, о чем говорится. И говорить, что эта "ассоциация" означает предположение некоторого нового соотношения означает ничего не говорить. Неправильные предсказания приписываются всякий раз "неправильным предположениям", а не неправильной теории, и люди продолжают думать о добавлении нового куска некоторого асимметричного тензора, который как-нибудь приведет вещи в порядок. Такой спекулятивный разговор не является ничем большим, чем разговором нумерологов, которые находят случайные соотношения между определенными величинами, требующие постоянной модификации, когда эти величины измеряются с большей точностью, сначала связываются единицы, затем — все меньшие и меньшие дроби этих единиц, чтобы уладить все меньшие и меньшие неточности измеряемых величин.

В связи с этим я хотел бы привести в пример один случай, из разговора после коктейля в Париже несколько лет назад. Наступил момент, когда все девушки чудесным образом исчезли, и я был оставлен лицом к лицу с известным профессором, одиноко сидящим в кресле и окруженным своими студентами. Он спросил: "Скажите мне, профессор Фейнман, насколько вы уверены в том, что у фотона нет массы покоя?". Я отвечал: "Ну, это зависит от массы, очевидно, если масса бесконечно мала, так что она не дает никакого эффекта, я не могу опровергнуть ее существование, но я был бы рад обсудить возможность, что эта масса меньше определенного значения. Давайте условимся, что после того, как я приведу свои аргументы против массы, изменять эту массу будет уже против правил". Тогда профессор выбрал эту массу равной 10^{-6} массы электрона.

Мой ответ был таким, что если мы согласны, что масса фотона связана с частотой формулой $\omega = \sqrt{k^2 + m^2}$, то фотоны разных длин волн будут перемещаться с разными скоростями. Тогда, при наблюдении затмения достаточно удаленной от нас двойной звезды, мы наблюдали бы в разное время это затмение то в синем, то в красном свете. Так как ничего подобного не замечено, мы можем установить верхний предел массы, который, если вы посчитаете, оказывается порядка 10^{-9} массы электрона. Ответ перевели профессору. Тогда он захотел узнать, что я бы сказал, если бы он предложил мне 10^{-12} массы электрона. Студент-переводчик был смущен этим вопросом, и я запротестовал, что это нарушение правил, но все же согласился попробовать еще раз.

Если фотоны обладают малой массой, одинаковой для всех фотонов, то большее отличие от безмассового поведения ожидается тогда, когда длина волны станет больше. Таким образом, исходя из узости известного отражения импульсов радара мы можем взять верхний предел массы фотона несколько лучшим, чем из аргумента с затмением двойной звезды. Оказывается, что эта масса должна быть меньше, чем 10^{-15} массы электрона.

После этого профессор снова захотел изменить массу и сделал ее равной 10^{-18} массы электрона. Всем студентам стало очень неловко после этого вопроса, и я протестовал, что если мы будем продолжать нарушать правила и делать массу все меньше и меньше, очевидно, я не смогу когда-нибудь дать ответ. Тем не менее, я попробовал еще раз. Я спросил, согласен ли он, что если фотон имеет малую массу, то из аргументов теории поля потенциал должен вести себя как $\exp(-mr)/r$. Он согласился. Тогда, Земля обладает статическим магнитным полем, которое, как известно, простирается в пространстве на некоторое расстояние; из поведения космических лучей ясно, что это расстояние имеет порядок, по крайней мере, несколько земных радиусов. Но это значит, что масса фотона должна быть меньше, чем соответствующая радиусу действия порядка 8000 миль, или примерно $10^{-20}m_e$. В этом месте разговор, к моему великому облегчению, закончился.

Мы не хотим следовать этому примеру при построении теории гравитации на основе *известных* полей и менять силу взаимодействия или вводить новые постулаты при каждой новой встрече с затруднениями; мы должны предложить определенные теории, используя *известное* поведение наших полей, и быть готовыми отвергнуть их, если они окажутся непригодными.

2.3 ОБМЕН ОДНИМ НЕЙТРИНО

Давайте посмотрим, можем ли мы получить силу, похожую на гравитацию, при помощи обмена одним нейтрино. Эти пробные теории, которые мы здесь обсуждаем, формулируются небрежно и исследуются неполностью, поскольку они не кажутся обещающими при первых оценках. Может и удалось бы залатать трудности, которые вынуждают нас отвергнуть их, но я чувствую, что лучше придерживаться правил, о которых мы выше согласились, надо пытаться объяснить все в терминах *известных* свойств частиц без новых постулатов. В этом я не преуспел.

Обмен нейтрино может дать потенциал, который ведет себя как $1/r$, потому что его масса равна нулю. Но так как нейтрино имеет полуцелый спин, однократный обмен не ведет к статической силе, поскольку после такого обмена источник нейтрино больше не находится в том состоянии, в котором он был первоначально. Чтобы получить из обмена силу, а не только рассеяние, необходимо, чтобы диаграмма включающая обмен, могла интерферировать с диагональными членами в амплитуде рассеяния, то есть, складываться с амплитудой того, что ничего не происходит (Рис. 2.3). Поэтому возможность однонейтринного обмена исключается тем фактом, что половинное значение углового момента не может быть излучено объектом, остающимся в том же внутреннем состоянии, в каком он был сначала.

Бесспиновый мезон нулевой массы привел бы к потенциалу, пропорциональному $1/r$. Легче вычислить энергию взаимодействия в координатном пространстве, чем в импульсном. Импульсный пропагатор для такой частицы был бы $1/k^2$. Нейтринный пропагатор $1/\not{k}$ или $\not{k}/k^2$, так что он содержит высшие степени $\vec{k}$ в числителе, было бы еще труднее связать такой пропагатор с силой, похожей на гравитацию. Для мезона со спином 0 мы вычисляем диаграмму, интегрируя по всем возможным временам излучения и по всем возможным временам поглощения, пропагатор есть $\delta_+ = 1/(t^2 - r^2 + i\epsilon)$ (Рис. 2.4). Дополнительная энергия, если не думать о множителях, будет

$$E \propto \int \frac{idt}{(t^2 - r^2 + i\epsilon)} \propto \frac{1}{r}. \tag{2.3.1}$$

Здесь имеется единственное интегрирование, только по времени излучения (или по времени поглощения), второе интегрирование вводит временной фактор, который представляет просто нормальное опережение фазы, так что он не дает энергии взаимодействия.

Мы не сказали явным образом, какой зависимости от массы мы ожидаем в множителях, но в этом мало смысла, так как мы не знаем ни одного бесспинового нейтрино. Эта теория закрыта тем, что уносится полуцелая величина углового момента.

2.4 ОБМЕН ДВУМЯ НЕЙТРИНО

Возможно, нам все-таки удастся построить теорию гравитации из нейтрино, если мы предположим обмен двумя нейтрино сразу, так чтобы они могли иметь диагональные математические ожидания. Нет простого способа понять, почему энергия взаимодействия двух больших объектов строго пропорциональна их массам, хотя очевидно, что она будет, по крайней мере грубо, пропорциональна числу частиц в каждом из них. Оставляя это пока в стороне (чтобы вернуться, если все остальное будет в порядке, хотя этого и не случится) мы скажем, что взаимодействие двух объектов пропорционально $m_1 \cdot m_2$ умноженному на силу взаимодействия одной пары составляющих частиц. Мы будем действовать, в основном, как раньше, но выполним это немного тщательнее, так как результаты будут более интересными. Амплитуда излучения пары нейтрино за время dt есть $G'dt$. Амплитуда того, что одно нейтрино распространяется от точки к другой точке есть $1/(t^2 - r^2 + i\epsilon)$. Мы вводим массы взаимодействующих частиц m_1, m_2, говоря, что эти массы должны представлять полное число частиц, так что, энергия для двух масс равна

$$E = m_1 m_2 G'^2 \int \frac{idt}{(t^2 - r^2 + i\epsilon)^2}. \tag{2.4.1}$$

Этот интеграл легко можно взять, или с помощью полюсов или простым дифференцированием однонейтринного интеграла (2.3.1), так что энергия есть

$$E = m_1 m_2 \frac{G'^2 \pi}{2} \frac{1}{r^3},$$

где r есть расстояние между частицами. Таким образом, мы находим, что двухнейтринный обмен дает для энергии неправильную радиальную зависимость. Теория кажется безнадежной. Но надежда появляется снова, если мы будем анализировать дальше. Оказывается, что мы можем получить член, который ведет себя как $1/r$, рассматривая обмен между тремя массами. Три частицы могут обмениваться двумя нейтрино между любыми тремя парами и новым способом (Рис. 2.5). Пусть первое излучение происходит при $t = 0$, а другие вершины имеются при временах t и s. Тогда энергия будет включать

$$G'^3 m_1 m_2 m_3 i^2 \int \frac{dsdt}{(s^2 - r_{12})(t^2 - r_{23})[(s-t)^2 - r_{31}]}. \tag{2.4.3}$$

Этот интеграл может быть взят последовательными интегрированиями, каждое выполняется с помощью полюсов, ответ будет

$$E = -G^{'3} m_1 m_2 m_3 \pi^2 \frac{1}{(r_{12}+r_{23}+r_{32}) r_{12} r_{23} r_{13}}. \qquad (2.4.4)$$

Если одна из этих масс, например масса 3, находится далеко, так что r_{13} намного больше, чем r_{12}, мы получим взаимодействие между массами 1 и 2 обратно пропорциональным r_{12}.

Что такое масса m_3? Очевидно, она будет неким эффективным средним по всем остальным массам во Вселенной. Эффект удаленных масс, сферически распределенных вокруг масс 1 и 2, появится как интеграл по средней плотности, мы будем иметь

$$E = -\frac{G^{'3} m_1 m_2 \pi^2}{r_{12}} \int \frac{4\pi\rho(R) R^2 dR}{2R^3}, \qquad (2.4.5)$$

где R есть большой радиус $R \approx r_{13} \approx r_{23}$. Для простой оценки мы можем считать плотность внутри сферы постоянной, мы выполняем интегрирование от внутреннего радиуса, достаточно большого, чтобы r_{12} было мало по сравнению с ним. Вклад всех масс снаружи от этого минимального радиуса будет чем-то вроде

$$E = -\frac{m_1 m_2}{r_{12}} 2\pi^3 G^{'3} \ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right) \rho. \qquad (2.4.6)$$

Этот логарифм является некоторым числом, которое не может быть намного больше, чем 50 или 100, так как типичный внешний радиус может быть равен $Tc = 10^{10}$св. лет $= 10^{28}$см. Такая энергия ведет себя очень похоже на гравитацию, можем ли мы забраковать ее? Да, и даже двумя способами. Во-первых, размер этого логарифмического члена становится сравнимым с непосредственной силой (2.4.2), пропорциональной $1/r^3$ для расстояний больших, чем те, для которых когда-либо проверялся закон Ньютона. Более того, если мы рассмотрим влияние Солнца на гравитационное притяжение между Землей и Луной, мы найдем, что оно будет давать наблюдаемые отклонения орбитального движения Луны, так как расстояние от Земли до Солнца изменяется при движении по орбите. Оценим это следующим образом. Мы хотим сравнить вклад Солнца в притяжение между Землей и Луной с вкладом от всех остальных звезд. Эффекты ведут себя пропорционально массе и обратно пропорционально кубу расстояния. Для логарифма меньшего тысячи вклад Солнца в 10^{12} превышает вклад звезд при любой разумной оценке плотности звезд! Таким образом, мы можем пренебречь вкладом звезд. Но никаких возмущений в системе Земля–Луна, сравнимых с изменением эффективной гравитационной постоянной, которое возникало бы от двухпроцентного изменения расстояния между Землей и Солнцем, никогда не наблюдалось.

Можно ли все-таки спасти эту теорию? Предположим, что процессы высших порядков помогут устранить эти трудности, например, процесс включающий четыре, или даже больше, нейтринных линии. Ясно, что член подобный изображенному на Рис. 2.6 даст вклад порядка m_3^2, квадрата числа частиц в массах, и таким образом, влияние отдаленных туманностей далеко превысит влияние Солнца. Это еще более справедливо для высших порядков. Мы должны, таким образом, просуммировать диаграммы различных порядков, типа Рис. 2.7. Однако, насколько я могу видеть из статистики Ферми, члены разных порядков отличаются знаком и никакого удовлетворительного результата не получится.

Чтобы объяснить эту идею более формально, мы предполагаем, что в теории (скажем, скаляра ϕ) с квадратичным взаимодействием, подобным $\bar{\psi}\phi^2\psi$, математическое ожидание произведения двух полевых переменных $\phi(1)\phi(2)$ в состоянии с многими туманностями может быть равно

$$\langle\phi(1)\phi(2)\rangle = \delta_+(S_{12}^2) + C,$$

где первый член является обычным вакуумным членом, а C происходит из взаимодействия с отдаленными туманностями. Это C практически независимо от 1 и 2, если они близки по сравнению с радиусом Вселенной.

Однако, я думаю, что C не может появиться для спина 1/2. Для фотонов такой член, даже если он появится, насколько я могу понять, не даст желаемого эффекта, поскольку фотоны не имеют квадратичного взаимодействия.

Итак, теория пар нейтрино не привела к хорошему результату, однако, поработав с ней, мы кое-что узнали, причем это очень привлекательная идея. Если мы построим теорию гравитации, основанную на взаимодействии трех тел, в которой одно тело отдалено от двух других, у нас получится закон $1/r$ для полей целого спина, и величина потенциала будет пропорциональна количеству материи в отдаленном теле. Туманности, которые до сих пор не влияли на наши законы физики, могут сыграть важную роль в гравитационном взаимодействии!

Однако, чтобы построить такую теорию, мы должны предположить существование бозона нулевой массы, который квадратично взаимодействует со всей материей во Вселенной, и мы должны будем вернутся к вопросу, почему сила строго пропорциональна массе. Но по-видимому, мало оснований идти таким мучительным путем, так как мы не добились успеха, работая с известными частицами. Если мы позволим себе ввести новую частицу, то сможем построить абсолютно хорошую теорию, предположив существование частицы спина 2 с нулевой массой, которая линейно взаимодействует с материей.

ЛЕКЦИЯ 3

3.1 СПИН ГРАВИТОНА

Мы обсудили, с точки зрения мнимых венерианских ученых, возможные интерпретации гравитации в терминах известных полей. Мы предполагаем, что эти ученые знают общие свойства полевых теорий, теперь они ищут поле, имеющее свойства гравитации. Чтобы сравнить различные возможности, мы должны вспомнить свойства гравитации, что большие массы притягиваются с силой, пропорциональной инерции и обратно пропорциональной квадрату расстояния, а также, что масса и инерция представляют собой формы энергии, так что энергии связи атомов и ядер имеют гравитационное поведение идентичное энергиям покоя.

Мы можем вообразить, что одна группа теоретиков попыталась интерпретировать гравитацию в терминах известных частиц, как мы это делали на прошлой лекции, и потерпела неудачу. Другая группа начала выводить некоторые из свойств нового поля, которое могло бы вести себя как гравитация.

Во-первых, тот факт, что гравитация, как было найдено, должна быть дальнодействующей, автоматически означает, что энергия взаимодействия зависит от расстояния как $1/r$. В полевой теории нет никакой другой возможности. Поле переносится путем обмена частицей, которую впредь мы будем называть гравитоном. Она должна иметь массу $m = 0$, чтобы сила была пропорциональной $1/r^2$. Следующая догадка, которую мы должны сделать, прежде чем сможем записать полевую теорию, это — чему равен спин гравитона? Если бы спин был равен $1/2$, или половине любого целого числа, мы столкнулись бы с трудностями, обсужденными в прошлой лекции (2.3), и состоящими в том, что не было бы никакой интерференции между амплитудой одночастичного обмена и амплитудой без обмена. Таким образом, спин гравитона должен быть целым, то есть, некоторым числом из последовательности 0, 1, 2, 3, 4, ... Любой из этих спинов дал бы взаимодействие, пропорциональное $1/r$, так как любая радиальная зависимость определяется исключительно массой. Чтобы увидеть разницу между спинами, мы должны посмотреть на тонкие различия в эффектах, вызванных гравитонами разных спинов. Мы можем вообразить, что наша группа теоретиков разделит свою работу, так чтобы одни вывели детали спин-ноль теории, другие работали со спином 1, а остальные — со спинами 2, 3, или даже 4. Труда на разработку деталей для более высоких спинов требуется значительно больше, чем для более низких, так что мы пойдем от низших к высшим.

Теория спина 1 была бы, по существу, подобна электродинамике. Ничто не запрещает существование двух полей спина 1, но гравитация не может быть одним из них, потому что одно из следствий спина 1 — это то, что одинаковые заряды отталкиваются, а противоположные притягиваются. Это в действительности является свойством всех теорий с нечетным спином, и наоборот, было найдено, что четные спины приводят к притяжению, так что мы должны рассмотреть только теории спинов 0 и 2, может быть, 4, если 2 не подойдет; нет никакой потребности разрабатывать более сложные теории, пока более простые не оказались неадекватными.

Отклонение теорий тяготения со спином ноль сделано на основе гравитационного поведения энергий связи. Мы не должны разрабатывать здесь все в деталях, мы дадим аргумент по аналогии, а затем перейдем непосредственно к построению теории спина 2. Мы спрашиваем, каким является притяжение между движущимися объектами, является ли оно бо́льшим или меньшим чем для статических объектов? Можно например вычислить взаимное притяжение двух масс газа, гравитационный эксперимент свидетельствует, что сила больше, когда газы горячее (Рис. 3.1).

Мы знаем, что происходит в электродинамике. Электрические силы не зависят от случайных движений частиц. Далее, энергия взаимодействия пропорциональна среднему значению оператора γ_t, который равен $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Так как потенциал, следующий из этого оператора, не зависит от скорости, фактор пропорциональности должен быть $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Это означает, что энергия взаимодействия, следующая из оператора 1, соответствующего спину 0, была бы пропорциональна $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Другими словами, теория поля спина 0 предсказала бы, что притяжение масс горячего газа будет *меньше*, чем прохладного газа. Подобным образом можно показать, что теория спина 2 ведет к энергии взаимодействия которая содержит $\sqrt{1-v^2/c^2}$ в знаменателе, в согласии с экспериментальными результатами по гравитационному эффекту энергий связи. Таким образом, теории со спином 0 не проходят, и мы нуждается в спине 2, чтобы иметь теорию, в которой притяжение будет пропорционально содержанию энергии.

3.2 АМПЛИТУДЫ И ПОЛЯРИЗАЦИИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ КАК ТИПИЧНОЙ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ

Наша программа теперь состоит в том, чтобы построить теорию спина 2 по аналогии с другими имеющимися полевыми теориями. Мы могли бы в этом месте перейти к точке зрения Эйнштейна на гравитацию, так как он получил правильную теорию, но будет поучительнее и возможно проще для педагогических целей сохранить нашу выдумку о венерианских ученых, чтобы угадывать свойства правильной теории. Допуская, что многие ученые *сегодня* могли бы прийти к правильной теории гравитации, мы не преуменьшаем достижений Эйнштейна. Сегодня у нас есть интуиция и развитый формализм, которых не было пятьдесят лет назад, также у нас есть указанное Эйнштейном направление. Очень трудно вообразить, что бы мы делали, если бы не знали того, что мы знаем, теперь, когда мы уже знаем это, но позвольте нам перейти к гипотезам о правильной теории по аналогии с электродинамикой.

В теориях скалярного, векторного, и тензорного полей (это другие названия спинов 0, 1 и 2) поля описываются скалярными, векторными, или тензорными потенциальными функциями:

$$\text{спин } 0 \quad X \quad \text{скалярный потенциал},$$

$$\text{спин } 1 \quad A_\mu \quad \text{вектор} - \text{потенциал},$$

$$\text{спин } 2 \quad h_{\mu\nu} \quad \text{симметричный тензорный потенциал}.$$

Другая теория последовала бы из принятия предположения, что тензор является антисимметричным, она привела бы не к чему-то, напоминающему гравитацию, а скорее имела бы сходство с электромагнетизмом, шесть независимых компонент антисимметричного тензора появились бы как два пространственных вектора.

Источник электромагнетизма — ток вектора j_μ, который связан с вектор-потенциалом уравнением

$$A_\mu = -\frac{1}{k^2} j_\mu. \tag{3.2.1}$$

Здесь мы предприняли преобразование Фурье и используем представление пространства импульсов. Оператор Даламбера в импульсном пространстве есть просто k^2. Вычисление амплитуд в электромагнетизме делается с помощью пропагаторов, соединяющих токи способом, отображаемом в символической форме в соответствии с графиками типа приведенного на Рис. 3.2. Мы вычисляем амплитуды для такого процесса как функции от релятивистских инвариантов и ограничиваем наш ответ так, как это требуется правилами сохранения энергии и импульса.

Достоинства электромагнетизма содержатся в описании взаимодействия между током и полем в виде $j^\mu A_\mu$, в терминах источников это становится взаимодействием между двумя токами:

$$-j'_\mu \frac{1}{k^2} j^\mu. \tag{3.2.2}$$

Для частного выбора осей координат вектор k_μ может быть выражен как

$$k^\mu = (\omega, \kappa, 0, 0). \qquad (3.2.3).$$

Заметьте, что мы используем упорядочение индексов 4, 3, 2, 1, так что

$$x^\mu = (t, z, y, x),$$
$$A_\mu = (A_4, A_3, A_2, A_1). \tag{3.2.4}$$

Тогда ток-токовое взаимодействие, когда обменная частица имеет 4-импульс k^μ, дается формулой

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{k^2}\right) j^\mu = -\frac{1}{\omega^2 - \kappa^2}(j'_4 j_4 - j'_3 j_3 - j'_2 j_2 - j'_1 j_1). \tag{3.2.5}$$

Сохранение заряда, которое обозначает, что 4-дивергенция тока нулевая, в пространстве импульсов становится просто ограничением

$$k_\mu j^\mu = 0. \tag{3.2.6}$$

В частной системе координат, которую мы выбрали, это ограничение связывает третью и четвертую компоненту токов

$$\omega j^4 - \kappa j^3 = 0, \quad \text{или} \quad j^3 = \frac{\omega}{\kappa} j^4. \tag{3.2.7}$$

Если мы подставим это выражение для j_3 в амплитуду (3.2.5), мы найдем, что

$$-j'_\mu \left(\frac{1}{k^2}\right) j^\mu = \frac{j'_4 j_4}{\kappa^2} + \frac{1}{\omega^2 - \kappa^2}(j'_2 j_2 + j'_1 j_1). \tag{3.2.8}$$

Теперь мы можем дать интерпретацию двум членам этого уравнения. Четвертая компонента тока — это просто плотность заряда, в ситуации, когда заряды неподвижны, это единственная ненулевая компонента. Первый член не зависит от частоты, когда мы делаем обратное преобразование Фурье, чтобы преобразовать его к пространственному взаимодействию, мы находим, что он представляет собой мгновенно действующий кулоновский потенциал

$$(\text{преобразование Фурье})^{-1} \left[\frac{j'_4 j_4}{\kappa^2}\right] = \frac{e^2}{4\pi r} \delta(t - t') \tag{3.2.9}$$

Это всегда ведущий член в пределе малых скоростей. Член кажется мгновенным, но это только потому, что разделение на два члена, которое мы сделали, явно нековариантно. Полное взаимодействие является действительно ковариантной величиной, второй член представляет собой поправки к мгновенному кулоновскому взаимодействию.

Взаимодействие между двумя токами всегда подразумевает виртуальные фотоны. Мы можем узнать кое-что о свойствах реальных фотонов, глядя на полюса амплитуды взаимодействия, которые появляются при $\omega = \pm\kappa$. Конечно, любой фотон, который оказывает физическое действие, тоже может рассматриваться как виртуальный фотон, так как он не наблюдается, пока не взаимодействует, так что наблюдаемые фотоны никогда в действительности не имеют $\omega = \pm\kappa$. Нет, однако, никаких трудностей в переходе к пределу, физически, мы знаем о фотонах, которые прибывают от Луны или Солнца, для которых разность между ω и κ является очень и очень малой. Если мы полагаем, что наблюдаем также фотоны от отдаленных галактик, которые находятся в миллионах световых лет от нас, очевидно, все это должно заставить нас думать, что мы находимся так близко к полюсу, что для таких фотонов не может быть другого физического эффекта, кроме подобного эффекту члену с полюсом. Вычет полюса в $\omega = \kappa$ является суммой двух членов, каждый из которых является произведением двух множителей. Кажется, что имеется один вид фотонов, который взаимодействует с j_1 и j_1', и другой вид фотонов, который взаимодействует с j_2 и j_2'. На обычном языке мы описываем это, говоря, что для фотонов имеются две независимых поляризации.

Круговые поляризации — это только линейные комбинации плоскополяризованных фотонов, соответствующих разделению суммы произведений $(j_1'j_1 + j_2'j_2)$ в различных базисах, мы имеем

$$\begin{aligned}(j_1'j_1 + j_2'j_2) = {} & \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 + ij_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(j_1' + ij_2')^* \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}}(j_1 - ij_2)\frac{1}{\sqrt{2}}(j_1' - ij_2')^*. \qquad (3.2.10)\end{aligned}$$

Мы по-прежнему видим, что имеется два вида фотонов. Преимущество этого разделения становится очевидным, когда мы рассматриваем вращение системы координат относительно направления распространения 3. Циркулярно поляризованные фотоны переходят сами в себя, если можно так выразиться, потому что они изменяются только по фазе, когда оси координат поворачиваются на угол θ, эти фазы равны $\exp(i\theta)$ и $\exp(-i\theta)$.

Квантово-механические правила, описывающие поведение систем под действием вращений, сообщают нам, что системы, имеющие это свойство, находятся в состоянии единичного углового момента, фотоны, которые изменяются по фазе как $\exp(i\theta)$, имеют угловую проекцию момента 1, а другие — проекцию -1.

Мы могли бы ожидать, что если фотоны — объекты спина 1, то имелся бы и третий вид фотона, имеющий нулевую проекцию спина. Однако, можно показать, что для релятивистской теории частиц с нулевой массой покоя допустимы только две состояния, имеющие максимальное и минимальное значения проекции спина на направление распространения. Это — общий результат, справедливый для частиц с любым спином, который был доказан Вигнером. Мы не будем выполнять доказательство здесь, но просто в интересных нам случаях, для фотона теперь, и гравитона потом, мы покажем существование этих двух состояний путем явного разделения взаимодействия.

Могут возразить, что мы доказали существование этих двух состояний для *токов*, которые являются операторами источников, а не непосредственно для фотонов. Но одно подразумевает другое, так как амплитуда испускания фотона круговой поляризации -1 дается токовым оператором $(j_1 + ij_2)/\sqrt{2}$, и т.д. Когда мы вращаем систему координат, амплитуда эмиссии не должна измениться, таким образом мы получаем условия соответствующих изменений фазы для самих фотонов непосредственно. Фактическая поляризация фотона, возможно, лучше всего определена в терминах проекций вектор-потенциала в специальных направлениях, таких как e_μ (e_μ — единичный вектор). Взаимодействие такого фотона с током j^μ, то есть, амплитуда поглощения или излучения такого фотона, дается формулой

$$-e_\mu j^\mu = (\text{проекция } j^\mu \text{ на } e_\mu). \tag{3.2.11}$$

3.3 АМПЛИТУДЫ ДЛЯ ОБМЕНА ГРАВИТОНОМ

Запишем амплитуды для обмена гравитоном просто по аналогии с электродинамикой. Мы должны уделить специальное внимание мгновенным, нерелятивистским членам, так как только они проявляются в современных экспериментальных наблюдениях гравитации. Полная теория дает нам и мгновенные члены (аналогичные кулоновскому взаимодействию) и поправки, которые появляются как запаздывающие волны, для вычисления наблюдаемых эффектов мы должны отделить эти эффекты запаздывания.

Мы предполагаем, что оператор Даламбера в пространстве импульсов равен k^2, по простой аналогии с уравнением (3.2.1) мы ожидаем, что полевой тензор будет связан с тензором источника следующим образом

$$h_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} T_{\mu\nu}. \tag{3.3.1}$$

Каким может быть взаимодействие? Так как электродинамика связывает токи, позвольте нам предположить, что тензоры источника появляются в энергии взаимодействия как

$$T'_{\mu\nu} \left(\frac{1}{k^2} \right) T^{\mu\nu}. \tag{3.3.2}$$

Теперь наша задача в том, чтобы приписать тензору $\mathbf{T}$ специальные свойства, так чтобы воспроизвести свойства гравитации. Возможно *a priori*, что тензор $\mathbf{T}$ включает градиенты, то есть вектор $\vec{k}$. Если имеются только градиенты, то результирующая теория не содержит никаких монополей, самыми простыми объектами будут диполи. Мы хотим чтобы тензор $\mathbf{T}$ был таким, что в нерелятивистском пределе плотность энергии появлялась бы аналогично плотности заряда j_4. Как известно, мы имеем в электромагнетизме тензор напряжений, компонента T_{44} которого точно является плотностью энергии электромагнитного поля. Поэтому весьма правдоподобно, что есть некоторый тензор, компонента T_{44} которого будет плотностью полной энергии, это даст закон гравитации Ньютона в пределе малых скоростей, энергию взаимодействия

$$-\frac{T'_{44}T_{44}}{\kappa^2}. \tag{3.3.3}$$

Тогда, чтобы иметь правильную релятивистскую теорию, отсюда должно следовать, что амплитуда включает полный тензор $\mathbf{T}$, как мы угадали в (3.3.2).

Относительно этого тензора имеется один пункт, который мы не упомянули. След симметричного тензора является инвариантной величиной, которая не обязательно обращается в ноль. Таким образом, работая с симметричным тензором, след которого отличен от нуля, мы могли бы получить теорию, которая является смесью спина 0 и спина 2. Если мы запишем теорию, используя такой тензор, то увидим, когда перейдем к разделению взаимодействия на его поляризации, что имеется, очевидно, три поляризации вместо двух, дозволенных безмассовой частице спина 2. Говоря яснее, мы можем иметь помимо взаимодействия (3.3.2) и другие возможные инвариантные формы, пропорциональные $T^{\mu}_{\ \mu}(1/k^2)T^{\nu}_{\ \nu}$. Попробуем отрегулировать пропорции этих двух спинов так, чтобы не было никакого обмена реальными гравитонами с нулевым угловым моментом.

Запишем в явном виде все различные члены следующим образом:

$$\begin{aligned} T'_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu\nu} = \frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\,[T'_{44}T_{44} - 2T'_{43}T_{43} - 2T'_{42}T_{42} - 2T'_{41}T_{41} \\ +2T'_{23}T_{23} + 2T'_{31}T_{31} + 2T'_{21}T_{21} + T'_{33}T_{33} + T'_{22}T_{22} + T'_{11}T_{11}\,] \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

В электродинамике мы получили упрощение, используя закон сохранения заряда. Здесь мы получаем упрощение, используя закон сохранения энергии, который выражается в пространстве импульсов как

$$k^\mu T_{\mu\nu} = 0. \tag{3.3.5}$$

В нашей обычной системе координат, такой, что k^1 и k^2 являются нулевыми, это связывает индекс 4 с индексом 3 нашего тензора

$$\omega T_{4\nu} = -\kappa T_{3\nu}. \tag{3.3.6}$$

Когда мы используем это соотношение, чтобы устранить индекс 3, мы находим, что амплитуда разделяется на мгновенную часть, имеющую типичный знаменатель κ^2, и запаздывающая часть, со знаменателем $(\omega^2 - \kappa^2)$. Для мгновенного члена мы получаем

$$-\frac{1}{\kappa^2}\left[T'_{44}T_{44}\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right) - 2T'_{41}T_{41} - 2T'_{42}T_{42}\right], \tag{3.3.7}$$

а для запаздывающего члена

$$\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}[T'_{11}T_{11} + T'_{22}T_{22} + 2T'_{21}T_{21}]. \tag{3.3.8}$$

Поперечные компоненты тензора $\mathbf{T}$ предположительно независимы, так что это выражение представляет собой сумму трех независимых произведений или три различные поляризации. Мы видим, что теория содержит смесь спина 0 и спина 2. Чтобы устранить часть с нулевым спином, мы должны прибавить к нашей амплитуде член вида

$$\alpha T'^{\nu}{}_{\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}{}_{\mu}. \tag{3.3.9}$$

В запаздывающем члене, это добавляет части тензора следующего вида

$$\alpha\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}(T'_{11}+T'_{22})(T_{11}+T_{22}).$$

Мы можем подобрать параметр α так, чтобы запаздывающий член содержал только сумму двух независимых произведений. Подходящее значение α, чтобы сделать запаздывающий член равным

$$\frac{1}{\omega^2-\kappa^2}\left[\frac{1}{2}(T'_{11}-T'_{22})(T_{11}-T_{22}) + 2T'_{12}T_{12}\right], \tag{3.3.10}$$

есть $-1/2$. Тогда имеются два направления поляризации, которые порождены этими комбинациями тензорных элементов

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{11}-T_{22}) \quad \text{and} \quad \sqrt{2}(T_{12}). \tag{3.3.11}$$

Другая нормировка является результатом симметрии нашего тензора, мы можем восстановить часть этой симметрии, записав

$$\sqrt{2}T_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}(T_{12}+T_{21}). \tag{3.3.11a}$$

Представляющее наш гравитон возможное решение в виде плоской волны, поэтому, будет следующим:

$$h_{\mu\nu}=e_{\mu\nu}\exp(ik_\sigma x^\sigma), \tag{3.3.12}$$

где тензор поляризации $e_{\mu\nu}$ имеет следующие отличные от нуля компоненты :

$$e_{11}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ e_{22}=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{и } e_{12}=e_{21}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{3.3.13}$$

Наше взаимодействие, в общем случае

$$T'_{\mu\nu}\frac{1}{k^2}T^{\mu\nu}-\frac{1}{2}T'^{\mu}{}_{\mu}\frac{1}{k^2}T^{\nu}{}_{\nu},$$

может быть записано как

$$T'^{\sigma\tau}P_{\sigma\tau,\mu\nu}T^{\mu\nu},$$

где пропагатор гравитона, $P_{\sigma\tau,\mu\nu}$, имеет вид

$$\frac{1}{2}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\tau}+\eta_{\mu\tau}\eta_{\nu\sigma}-\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\tau})\frac{1}{k^2}.$$

Мы будем обычно, для простоты, записывать пропагатор как множитель $1/k^2$ и представлять взаимодействие виртуальными гравитонами, испускаемыми из источника с амплитудой

$$h_{\mu\nu}=\frac{1}{k^2}\left(T_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T^{\sigma}{}_{\sigma}\right)$$

и с взаимодействием $h_{\mu\nu}T'^{\mu\nu}$ при поглощении.

Амплитуда для эмиссии реального гравитона поляризации $e_{\sigma\tau}$, если $e^{\sigma}{}_{\sigma}=0$, как в (3.3.13), дается скалярным произведением $e_{\sigma\tau}T^{\sigma\tau}$.

3.4 ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЧЛЕНОВ В АМПЛИТУДАХ

Поляризация гравитона является тензорной величиной. Мы можем сделать это наглядным, благодаря изображениям, подобным тем, которые мы используем при описании напряжений; мы рисуем стрелки, указывающие направление, связанное с поверхностями, нормальными к осям. В плоскости перпендикулярной к направлению распространения на рисунке 3.3 мы имеем два напряжения. Это единственные два возможных квадрупольных напряжения, напряжения, представляемые всеми стрелками, указывающими к началу (или от начала) подобны чему-то вроде давления жидкости, которое имеет нулевой спин. “Напряжения” (фактически, вращения), представляемые всеми стрелками, указывающими направление по часовой стрелке (или против часовой стрелки) соответствуют спину 1.

Напряжения, представленные Рис. 3.3 (b) могут быть отнесены к осям, повернутым на 45° от направления первоначальных осей, в этом случае изображение — Рис. 3.4, который является не чем иным, как тем же самым напряжением Рис. 3.3 (a), повернутым на 45°. Отсюда мы находим, что эти две поляризации переходят друг в друга при повороте осей на 45°. Когда мы поворачиваемся на 90°, каждая поляризация переходит сама в себя, стрелки обращены, но мы должны помнить об осциллирующей зависимости от времени, связанной с поляризацией. Таким образом, мы видим что полное вращение на 360°, соответствует двум полным циклам фазы — спин равен 2. Имеются две ортогональных линейных комбинации из этих двух поляризаций, для которых вращательное изменение фазы ведет себя как $\exp(2i\theta)$ и $\exp(-2i\theta)$. Это просто другое разделение запаздывающего члена, действуя методом проб и ошибок мы можем просто выделить две части

$$\frac{1}{4}(T'_{11} - T'_{22} + 2iT'_{12})(T_{11} - T_{22} - 2iT_{12})$$

$$+\frac{1}{4}(T'_{11} - T'_{22} - 2iT'_{12})(T_{11} - T_{22} + 2iT_{12}). \tag{3.4.1}$$

То, что они имеют характер спина 2, проекции тензоров ± 2, очевидно, когда мы сравниваем форму этих произведений с произведением гармонических многочленов, мы знаем, что $(x \pm iy)(x \pm iy)$ имеют, очевидно, спин 2 и проекцию ± 2, эти произведения — $(xx - yy \pm 2ixy)$ имеют ту же самую структуру как наши члены (3.4.1). Таким образом мы заключаем, что с выбором $\alpha = -1/2$, наши гравитоны имеют только две возможных поляризации. Это, возможно, правильная теория, эквивалентная теории поля спина 2, которую наши полевые теоретики Паули и Фирц [FiPa 39] уже разработали и выразили в терминах полевых функций Лагранжа.

Мы подходим к теории спина 2 путем аналогий с теорией спина 1; таким образом, мы без объяснений предположили существование плоских волн для гравитона, так как плоские волны для фотона представлены полюсами пропагатора, а пропагатор гравитона также имеет полюса при $\omega = \pm\kappa$. Но экспериментальное доказательство отсутствует, мы не наблюдали ни гравитонов, ни даже классических гравитационных волн.

Имеются некоторые задачи, в настоящее время полностью игнорируемые, к которым мы будем позже возвращать наше внимание. Источники электромагнетизма сохраняются, и энергия, которая является источником гравитации также сохраняется. Но это сохранение имеет другой характер, так как фотон не заряжен, и следовательно не является источником для самого себя, тогда как гравитон обладает энергией равной $\hbar\omega$, и поэтому он сам является источником гравитонов. Мы называем это нелинейностью гравитационного поля.

В электромагнетизме мы могли вывести полевые уравнения (уравнения Максвелла), которые окажутся несовместными, если заряд не будет сохраняться. Мы пока избежали обсуждения полевого уравнения для гравитации, заботясь только об амплитудах, а не о самом поле. Также мы должны все же обсудить, будет ли теория, которую мы можем записать, зависеть от калибровки, и можем ли мы вообще написать полевое уравнение, соответствующее максвелловскому $\partial F^{\mu\nu}/\partial x^\nu = j^\mu$.

Имеются некоторые физические следствия нашей теории, которые могут быть обсуждены без полевых уравнений, просто исходя из формы взаимодействия. Мы пишем полное выражение, соответствующее $\alpha = -1/2$:

$$
\begin{aligned}
&2\left[T'_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T'^{\nu}{}_{\nu}\left(\frac{1}{k^2}\right)T^{\mu}{}_{\mu}\right] \\
&= -\frac{1}{\kappa^2}\Big[T'_{44}T_{44}\left(1-\frac{\omega^2}{\kappa^2}\right) + T_{44}(T'_{11}+T'_{22}) \\
&\quad + T'_{44}(T_{11}+T_{22}) - 4T'_{41}T_{41} - 4T'_{41}T_{42})\Big] \\
&\quad - \frac{1}{\kappa^2-\omega^2}[(T'_{11}-T'_{22})(T_{11}-T_{22}) + 4T'_{12}T_{12}].
\end{aligned}
$$

(При желании, член $(\omega^2/\kappa^2)T'_{44}T_{44}$ может быть заменен $T'_{43}T_{43}$ или $(T_{44}T'_{33} + T_{33}T'_{44})$.) Мы уже обсудили запаздывающий член и поляризации. Позвольте нам теперь посмотреть на первый член. Тензор $\mathbf{T}$ —

плотность напряжений, для медленных частиц, пространственные компоненты имеют порядок v/c, так что закон Ньютона представлен только одним из произведений, $T'_{44}T_{44}$. Другие произведения в чем-то аналогичны магнетизму. Заметьте, что в этом разделении они появляются как мгновенные члены. Эффекты запаздывания, бегущие волны, появляются только в четных степенях v/c.

Мы могли бы думать, что мгновенные магнитоподобные члены будут давать наблюдаемые эффекты, например, могло бы быть небольшое изменение в гравитационном притяжении между двумя колесами, когда мы вращаем их все быстрее и быстрее. Теория действительно предсказывает это, но практически эти силы были бы не только очень и очень малы, но они также были бы замаскированы множеством других эффектов. Магнитные силы, типа притяжения между двумя несущими ток проводами, являются удобными для наблюдения только потому, что прямые кулоновские эффекты погашаются с очень и очень большой точностью присутствием равных количеств положительных и отрицательных зарядов. Но все гравитационные силы — силы притяжения, так что нет никакой надежды на такое сокращение. Для крутящихся колес имелось бы затруднение, так как упругие напряжения материи увеличивают энергию, колеса разлетались бы и т.д. Сверх того, мы могли бы подумать о том, что и обычное гравитационное притяжение достаточно трудно измерить, а магнитоподобные эффекты могли бы оказаться меньше в отношении $(v/c)^2$, типа отношения магнитных сил к кулоновским силам. Силы между несущими ток проводами имеют порядок веса 1 грамма, тогда как непогашенные кулоновы притяжения между частицами в проводах имеют порядок миллиардов миллионов тонн.

Может быть удастся наблюдать эффекты этого магнитоподобного члена, если мы рассмотрим гравитационное притяжение частиц, перемещающихся со скоростью света, или очень близкой к ней. Предположим, что $T'_{\mu\nu}$ возникает от стационарного источника, типа Солнца, так что выживает только член T_{44}, и мы рассматриваем гравитационное притяжение между Солнцем и фиксированной частицей, которая перемещается со скоростью v близкой к c, так что тензор напряжений имеет такие компоненты, что $T_{11} = (v^2/c^2)T_{44}$. Тогда в (3.4.2) мы видим, что энергия взаимодействия больше, чем она будет из-за одного T_{44}, на множитель $1 + v^2/c^2$, или 2 для фотона. Таким образом, поскольку фотон путешествует в сильном гравитационном поле, он падает сильнее, чем исходя из одного только его содержания энергии предсказывает теория Ньютона. Отклонение света звезды, когда он проходит вблизи поверхности Солнца, оказывается в два раза больше, чем вычисление “импульса” дало бы в теории Ньютона. Земляне сделали этот эксперимент и обнаружили, что отклонение больше, чем получается в соответствии с теорией падения, на множитель очень близкий к 2. Даже при том что экспериментальное доказательство довольно несовершенно и не вполне безупречно, наблюдение безусловно отдает предпочтение заметному эффекту в том направлении, которое предсказывает наша теория.

Мы могли бы в этом месте перейти к подробному обсуждению расчетов подобных эффектов, а также решить много других задач, типа рассеяния Комптона для гравитонов, эффектов движения планеты Меркурий относительно Солнца, и т.п., чтобы выяснить порядок величины гравитационных эффектов и то, какие эксперименты могли бы быть поставлены. Однако, возможно, предпочтительнее будет перейти к описанию гравитационного поля непосредственно в терминах полевой функции Лагранжа и полевых уравнений, а не амплитуд.

3.5 ЛАГРАНЖИАН ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Мы теперь изучим нашу теорию с помощью функции Лагранжа, рассматривая сами поля, а не просто амплитуды. Сначала сделаем обзор ситуации в электродинамике. Там, действие имеет вид

$$S_{\mathrm{E}} = -\int d\tau \left[\frac{1}{4} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} \right) + j^\mu A_\mu \right]. \tag{3.5.1}$$

Из этого лагранжиана мы, в конечном счете, выводим полевые уравнения; сейчас мы хотим получить гравитационный аналог для формулы $A_\mu = -(1/k^2) j_\mu$.

Нетрудно угадать форму второго члена, т.е. члена взаимодействия. Он, как мы догадываемся, должен быть равен $-\lambda h_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$. Аналогия для членов, включающих производные $h_{\mu\nu}$ не так очевидна, здесь просто слишком много индексов, которые могут быть переставлены слишком многими способами. Мы должны написать общую формулу для лагранжиана как суммы по всем способам записи полевых производных, помещая произвольные коэффициенты перед каждым членом, следующим образом,

$$a\left(\frac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\cdot\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)+b\left(\frac{\partial h^{\mu\sigma}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}\right)+c\left(\frac{\partial h^{\mu}{}_{\mu}}{\partial x_\nu}\cdot\frac{\partial h^{\sigma}{}_{\nu}}{\partial x^\sigma}\right)+\ldots. \tag{3.5.2}$$

Наша теория не будет полной, пока мы не найдем некоторый критерий для нахождения коэффициентов $a, b, c, d, e, \ldots$.

Возможно, по некоторой аналогии с электромагнетизмом, можно сделать одно предположение. Если мы будем варьировать общую функцию Лагранжа в (3.5.1) по A, то получим дифференциальное уравнение, связывающее поля и ток,

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}A_\mu-\frac{\partial}{\partial x_\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}A_\nu=j_\mu. \tag{3.5.3}$$

Для экономии записи впредь будем обозначать такие дифференцирования просто указывая индекс координаты после запятой, предыдущее уравнение принимает вид

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu}-A_{\nu,\mu}{}^{,\nu}=j_\mu. \tag{3.5.4}$$

Сохранение заряда выражается с помощью приравнивания дивергенции j_μ к нулю. Но мы можем заметить, что уравнения Максвелла для поля не совместны, если нет сохранения заряда, и что градиент выражения в левой части (3.5.4) *тождественно* обращается в ноль. Тогда при помощи правильной функции Лагранжа для электромагнетизма сохранение заряда может быть выведено как следствие полевых уравнений. *Левая* часть удовлетворяет *тождеству* , ее дивергенция равна нулю:

$$A_{\mu,\nu}{}^{,\nu\mu}-A_{\nu,\mu}{}^{,\nu\mu}=0. \tag{3.5.4}$$

Подобное требование служит для определения величины коэффициентов $a, b, c, d, e, \ldots$ относительно друг друга. Мы запишем общую функцию Лагранжа, выведем, варьируя ее, дифференциальные полевые уравнения и затем потребуем, так как дивергенция тензора $\mathbf{T}$ исчезает, что равные ей полевые выражения должны иметь дивергенцию, тождественно обращающуюся в ноль. Это приводит к единственному выбору значений коэффициентов. Мы проделаем вычисления явно, подбирая коэффициенты так, чтобы полевые уравнения были совместимы только тогда, когда

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0. \tag{3.5.6}$$

3.6 УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Мы начинаем, записывая все возможные произведения производных нашего тензорного поля $h_{\mu\nu}$. На каждом шаге значительное упрощение получается, если использовать симметрию $h_{\mu\nu}$ для комбинирования членов. Если два тензорных индекса отличаются от индекса производной, то мы имеем два возможных произведения:

1. $h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\nu,\sigma}$

2. $h_{\mu\nu,\sigma}h^{\mu\sigma,\nu}$

Если имеются два индекса, которые являются равными, получаем три возможных произведения:

3. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma}$

4. $h^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}$

5. $h^{\nu}{}_{\nu,\mu}h_{\sigma}{}^{\sigma,\mu}$

Не все пять произведений необходимы, номер 2 может быть опущен, так как он может быть преобразован к номеру 3 интегрированием по частям. Это оставляет только четыре независимых произведения производных. То есть, мы принимаем действие в виде

$$S = \int d\tau \Big[ah^{\mu\nu,\sigma}h_{\mu\nu,\sigma} + bh^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\mu,\sigma} + ch^{\mu\nu}{}_{,\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}$$
$$+ dh^{\nu}{}_{\nu,\mu}h_{\sigma}{}^{\sigma,\mu} - \lambda T^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\Big]. \tag{3.6.1}$$

Теперь проварьируем эту сумму четырех произведений относительно $h_{\mu\nu}$, чтобы получить дифференциальное уравнение, связывающее полевые производные с тензором источника $T_{\alpha\beta}$. Результат имеет вид (необходимо помнить, что $\delta h_{\alpha\beta}$ симметрична по α, β, так что только симметричная часть ее коэффициента должна быть нулем)

$$a2h_{\alpha\beta,\sigma}{}^{,\sigma} + b(h_{\alpha\sigma,\beta}{}^{,\sigma} + h_{\beta\sigma,\alpha}{}^{,\sigma})$$
$$+c(h^{\sigma}{}_{\sigma,\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}h^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu}) + d2\eta_{\alpha\beta}h^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{,\mu} = -\lambda T_{\alpha\beta}. \tag{3.6.2}$$

Возьмем производную каждого члена относительно индекса β, тогда требование, что дивергенция слева должна быть тождественным нулем, приводит к уравнению

$$\begin{aligned} 2ah^{\alpha\beta,\sigma}{}_{,\sigma\beta} + bh^{\alpha\sigma,\beta}{}_{,\sigma\beta} + bh^{\beta\sigma,\alpha}{}_{,\sigma\beta} + ch^{\sigma}{}_{\sigma}{}^{,\alpha\beta}{}_{,\beta} \\ + ch^{\mu\nu}{}_{,\mu\nu}{}^{,\alpha} + 2dh^{\sigma}{}_{\sigma,\mu}{}^{,\mu\alpha} = 0. \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Теперь приведем подобные члены и положим коэффициенты равными нулю, это подразумевает некоторое жонглирование индексами и изменение их обозначений:

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta,\sigma}{}_{,\sigma\beta}(2a+b) &= 0 \\ h^{\beta\sigma,\alpha}{}_{,\beta\sigma}(b+c) &= 0 \\ h^{\sigma}{}_{\sigma,\beta}{}^{,\alpha\beta}(c+2d) &= 0. \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

Если мы выберем для наших результатов такой масштаб, что $a = 1/2$, то получим

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 1, \quad d = -\frac{1}{2}. \tag{3.6.5}$$

Возможно, теперь мы получили правильный лагранжиан для поля гравитации. Как следствие из этого лагранжиана мы, в конечном счете, получим уравнения поля.

3.7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИМВОЛОВ

Манипуляции с этими тензорными величинами становятся в дальнейшей работе все более и более утомительными; чтобы не увязнуть в болоте алгебры многих индексов, могут быть развиты некоторые уловки для упрощения. Не всегда будет сразу очевидно, что определения, которые мы собираемся сделать, полезны, оправдание их использования придет позднее.

Определим действие “черты над буквой” на произвольном тензоре второго ранга

$$\bar{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(X_{\mu\nu} + X_{\nu\mu}) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}X^{\sigma}{}_{\sigma}. \tag{3.7.1}$$

Для симметричного тензора такого как $\mathbf{h}$, правило упрощается, потому что два члена в первой круглой скобке равны

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\sigma}{}_{\sigma}, \tag{3.7.2a}$$

$$\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}, \tag{3.7.2b}$$

заметьте, что действие черты над буквой является своим собственным обратным для симметричных тензоров.

Введем также использование символа тензора без индексов для представления его следа

$$h = \mathrm{Tr}(\mathbf{h}) = h^{\sigma}{}_{\sigma},$$
$$\bar{h}^{\sigma}{}_{\sigma} = -h. \tag{3.7.3}$$

С этими обозначениями полевые уравнения (3.6.2) и (3.6.5) в симметрированной версии могут быть написаны следующим образом

$$h_{\mu\nu,\sigma}{}^{,\sigma} - 2\bar{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} = -\lambda\bar{T}_{\mu\nu}. \tag{3.7.4}$$

Чтобы получить соотношение для $T_{\mu\nu}$, мы просто поставим “черту над буквой” по обе стороны этого уравнения.

Затем мы ищем чего-нибудь аналогичного электродинамике в свойствах калибровочной инвариантности, чтобы упростить решение (3.7.4). В электродинамике, полевое уравнение

$$A^{\mu,\nu}{}_{,\nu} - A_{\nu}{}^{,\nu\mu} = j^{\mu} \tag{3.7.5}$$

дает возможность эквивалентного описания полей в терминах нового 4-вектора A'_{μ}, получаемого из A_{μ} добавлением градиента скалярной функции X

$$A'_{\mu} = A_{\mu} + X_{,\mu} \tag{3.7.6}$$

Что могло бы быть аналогичным свойством для тензорного поля? Мы догадываемся, что справедливо могло бы быть следующее (мы должны быть осторожны, чтобы сохранять наши тензоры симметричными!): подстановка

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + X_{\mu,\nu} + X_{\nu,\mu} \tag{3.7.7}$$

в левую часть (3.7.4) не изменит формы этого уравнения. Доказательство этого оставляем в качестве упражнения.

При использовании этого свойства калибровочной инвариантности будет проще получить уравнения для полей в определенной калибровке, которая является наиболее подходящей, что-нибудь вроде калибровки Лоренца в электродинамике. По аналогии с выбором

$$A^{\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{3.7.8}$$

мы сделаем соответствующий выбор (который мы назовем условием Лоренца)

$$\bar{h}^{\mu\sigma}{}_{,\sigma} = 0. \tag{3.7.9}$$

Это приводит к полевым уравнениям, связывающим $\mathbf{T}$ с чертой с полем

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma} = -k^2 h^{\mu\nu} = -\lambda \bar{T}^{\mu\nu}. \tag{3.7.10}$$

Или, в результате решения $h_{\mu\nu} = (\lambda/k^2)\bar{T}_{\mu\nu}$, будет немедленно следовать, что амплитуда взаимодействия такого $\mathbf{h}$ с другим источником $T'_{\mu\nu}$ из $\lambda h_{\mu\nu} T'^{\mu\nu}$ в функции Лагранжа есть

$$\lambda^2 T'_{\mu\nu} \left[\frac{1}{k^2}\right] \bar{T}^{\mu\nu}.$$

Таким образом, получается точно то же самое, что мы нашли прежде при непосредственном обсуждении амплитуд.

ЛЕКЦИЯ 4

4.1 СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕНЗОРНЫМ РАНГОМ И ЗНАКОМ ПОЛЯ

Мы хотели бы вывести некоторые полезные общие свойства полей, используя свойства лагранжевой плотности. Для гравитационного поля определим здесь константу взаимодействия и нормировку плоских волн, которые будем использовать в дальнейшем. Примем

$$\lambda = \sqrt{8\pi G}, \tag{4.1.1}$$

где G — обычная гравитационная постоянная в естественных единицах ($\hbar = c = 1$), квадратный корень включен в определение, чтобы константа λ была аналогична заряду электрона e в электродинамике, а не его квадрату. Множитель $\sqrt{8\pi}$ служит, чтобы устранить не относящиеся к делу коэффициенты из наиболее полезных формул. Чтобы представлять гравитонные плоские волны, мы будем использовать поля

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu}\mathrm{exp}(ik \cdot x) \tag{4.1.2}$$

с тензором поляризации $e_{\mu\nu}$, нормированные таким образом, что

$$e_{\mu\nu}\bar{e}^{\mu\nu} = 1. \tag{4.1.3}$$

Действие, которое описывает полную систему полей гравитации и материи и взаимодействие между материей и гравитонами, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\int dV \left(h^{\mu\nu,\lambda}\bar{h}_{\mu\nu,\lambda} - 2\bar{h}^{\mu\lambda}{}_{,\lambda}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} \right) \quad & \text{(поля)} \\ - \int dV(\lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}) \quad & \text{(член взаимодействия)} \\ +S_M \quad & \text{(материя)}. \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Из лагранжиана полей можно вывести некоторые важные свойства, например, мы можем понять, почему в гравитации притягиваются и одноименные, и разноименные заряды, тогда как одноименные заряды электричества отталкиваются, а разноименные — притягиваются. Можно показать, что это свойство связано со знаком функции Лагранжа, так что, если бы мы заменили $S \to -S$, изменился бы и знак силы. Знак константы взаимодействия λ или e или g не оказывает никакого влияния, так как она появляется в квадрате в любой диаграмме, которая представляет поправку к энергии, там всегда имеется две вершины. Мы можем изменить знак энергии, соответствующей диаграмме типа Рис.4.1, только если сможем ввести множитель i в каждую вершину, например, если мы будем использовать поля $i\phi$, а не ϕ.

Однако, поля ϕ должны представлять соответствующие плоские волны, которые последовательно определены так, чтобы стоячие волны в большом ящике имели положительные энергии, и квантово-механические осцилляторы, которые представляют эти стоячие волны, вели бы себя должным образом. Скалярные поля имеют плоские волны вида

$$\phi = a \exp(ik \cdot x). \tag{4.1.5}$$

Амплитуда квантового поля появляется как координата квантово-механического осциллятора. Если кинетические энергии таких осцилляторов, пропорциональные $\dot{a}^2$, должны представлять собой положительные энергии, мы должны записывать нашу теорию согласованным образом, и замена $\phi \to i\phi$ была бы неправильна.

Для электромагнитных волн именно поперечные компоненты, перпендикулярные к направлению распространения, ограничены подобным соображением. Отрицательный знак появляется в соответствующей энергии, поскольку энергия содержит пространственные индексы в скалярном произведении двух векторов, которое мы определили формулой

$$A_\mu B^\mu = A_4 B_4 - (A_3 B_3 + A_2 B_2 + A_1 B_1). \tag{4.1.6}$$

Знак кулоновых сил возникает из знака временны́х компонент в лагранжиане. Для гравитационных волн ограничены снова поперечные компоненты, но при сворачивании более чем двух индексов (или любого четного числа индексов) знаки сокращаются, знак временных компонент h_{44} противоположен случаю электричества, и мы имеем притяжение.

4.2 ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА СКАЛЯРНОЙ МАТЕРИИ

Прежде, чем мы сможем вычислять наблюдаемые эффекты и делать предсказания, отличные от закона обратных квадратов и предложения, что "одноименные заряды" притягиваются с силой, пропорциональной энергии, мы должны точно знать, как определяется тензор напряжений материи $T_{\mu\nu}$. Сначала выполним в некоторых деталях вычисления, основанные на самом простом предположении, что материя может быть представлена скалярной функцией ϕ. Позже, мы должны рассмотреть функции более высокого ранга, возможно в конце курса мы сможем рассмотреть и материю со спином $1/2$, потому что она будет иметь свойства, значительно отличающиеся от свойств целых спинов. Целые спины, 1 или 2, будут требовать более сложной алгебры, но никаких концептуальных новшеств не потребуется.

Как получить плотность напряжений для скалярного поля ϕ? Если мы посмотрим в книгу Вентцеля по теории поля [Went 49], мы обнаружим, что там предложена следующая процедура. Предполагается, что функция Лагранжа зависит от полей и их производных,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^i, \psi^i_{,\nu}). \tag{4.2.1}$$

44-компонента тензора напряжений должна представлять собой плотность энергии, которая является гамильтонианом. Поэтому, путем обобщения обычного классического предписания для нахождения гамильтониана из функции Лагранжа,

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L, \tag{4.2.2}$$

получаем следующее правило

$$T^\mu_\nu = \psi^i_{,\nu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i_{,\mu}} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{4.2.3}$$

Это правило не всегда верно. С одной стороны, оно не обязательно приводит к выражению, симметричному по μ и ν. Если тензор $T_{\mu\nu}$ несимметричен, результирующая теория будет патологической (например, будет невозможно определить угловой момент в поле). Сохранение энергии затруднено, потому что дивергенции включают члены, которые больше не равны,

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} \neq T^{\nu\mu}{}_{,\nu}. \tag{4.2.4}$$

В нашем специальном скалярном случае оказывается, что правило (4.2.3), дает удовлетворительную симметричную форму. У нас есть функция Лагранжа и действие

$$S(\text{скалярной материи}) = \frac{1}{2}\int dV(\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} - m^2\phi^2), \tag{4.2.5}$$

которые приводят к следующему тензору напряжений

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\mu\nu}. \tag{4.2.6}$$

С тензором напряжений скалярной материи (4.2.6), член взаимодействия в функции Лагранжа принимает вид

$$-\lambda h^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = -\lambda \left[h^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} (\phi^{,\sigma} \phi_{,\sigma} - m^2 \phi^2) \right]. \tag{4.2.7}$$

В терминах нашей компактной системы обозначений, использующей черту над буквой, это записывается как

$$-\lambda \left[\bar{h}^{\mu\nu} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{2} h m^2 \phi^2 \right]. \tag{4.2.8}$$

Мы можем теперь использовать этот член взаимодействия, чтобы построить амплитуды рассеяния путем обмена гравитоном.

4.3 АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ (СКАЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ)

Амплитуда рассеяния, соответствующая обмену одним гравитоном, изображенная схематически на Рис. 4.2, может быть записана непосредственно, так как мы знаем форму пропагатора и взаимодействие для каждой вершины, заданное функцией Лагранжа (4.2.7). Мы заменяем градиенты компонентами 4-импульса в импульсном представлении

$$i\phi_{,\nu} = p_\nu, \tag{4.3.1}$$

так чтобы взаимодействие для одной вершины приняло вид

$$2\lambda\left[\underline{{}^1p_\mu{}^2p_\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}({}^1p^{\sigma 2}p_\sigma - m^2)\right]. \tag{4.3.2}$$

Мы использовали подчеркивание произведения $p_\mu p_\nu$, чтобы напомнить, что мы должны использовать соответственно симметрированную версию, так как $h_{\mu\nu}$ является симметричным. В явном виде,

$$\underline{A_\mu B_\nu} \equiv \frac{1}{2}[A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu]. \tag{4.3.3}$$

Для второй вершины нам нужна “черта над буквой” в этом выражении, имеющем вид:

$$2\lambda\left[\underline{{}^3p_\mu{}^4p_\nu} - \frac{1}{2}m^2\eta_{\mu\nu}\right]. \tag{4.3.4}$$

Полное выражение для амплитуды тогда будет

$$4\lambda^2\left[\underline{{}^3p_\mu{}^4p_\nu} - \frac{1}{2}m^2\eta_{\mu\nu}\right]\frac{1}{q^2}\left[\underline{{}^1p_\mu{}^2p_\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}({}^1p^{\sigma 2}p_\sigma - m^2)\right]. \tag{4.3.5}$$

Эти сокращения (черта над буквой, подчеркивание, и т.д.) приводят к упрощениям алгебраических манипуляций в более сложных вычислениях, которые нас ожидают впереди, так что стоит ими воспользоваться.

Наша теория дала нам выражение для амплитуды гравитационного рассеяния одной частицы на другой. Чтобы вычислить что-нибудь для тел наблюдаемых размеров, мы должны перейти к очень большим массам, а чтобы наблюдать что-нибудь новое, не описываемое законом Ньютона, мы нуждаемся в скоростях близких к скорости света. Мы можем, например, вычислить отклонение малой массы при очень высокой скорости ($v \approx c$), когда она проходит рядом со звездой типа Солнца. Здесь мы должны обосновать замену суммы амплитуд всех частиц звезды одной-единственной амплитудой, соответствующей массе M, эта замена — аппроксимация, но она дает правильный ответ на некоторые вопросы в первом приближении. Отклонение оказывается в $(1 + v^2/c^2)$ раз больше, чем предсказывает теория Ньютона.

Предшествующий результат, не может, как считают, соответствовать отклонению света Солнцем, потому что фотон — не скалярная частица, следовательно, он не может быть представлен нашим скалярным массивным полем ϕ. Для рассеяния двух тождественных частиц амплитуда должна включать обменный член, но в случае звезды очевидно, что частицы не идентичны.

Наша теория пока еще не рассматривала возможность того, что можно было бы прибавить член с нулевой дивергенцией к нашему тензору напряжений $T_{\mu\nu}$, что будет соответствовать другому распределению массы и напряжений в пространстве. Этот вопрос и связанные с ним вопросы будут позже обсуждены подробно. Даже для скалярной материи, как мы увидим, имеется реальная неоднозначность при описании $T_{\mu\nu}$. Эта трудность также возникает в электродинамике, когда мы пытаемся описать взаимодействие фотонов с заряженными векторными мезонами.

4.4 ДЕТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПЛОСКИХ ВОЛН. ЭФФЕКТ КОМПТОНА

Мы можем изучить свойства гравитационных волн при отсутствии материи; варьируя функцию Лагранжа, получаем уравнение

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} - 2\bar{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} = 0, \tag{4.4.1}$$

которое аналогично уравнению Максвелла в пустом пространстве. Если мы используем плоские волны

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp(iq \cdot x), \tag{4.4.2}$$

то уравнение принимает вид

$$q^2 e_{\mu\nu} - q_\nu q^\sigma \bar{e}_{\sigma\mu} - q_\mu q^\sigma \bar{e}_{\sigma\nu} = 0. \tag{4.4.3}$$

Нас интересуют случаи когда $q^2 \neq 0$ и $q^2 = 0$. Если $q^2 \neq 0$, мы можем разделить на q^2 и перестроить все так, чтобы

$$e_{\mu\nu} = q_\nu \left(\frac{1}{q^2} q^\sigma \bar{e}_{\sigma\mu} \right) + q_\mu \left(\frac{1}{q^2} q^\sigma \bar{e}_{\sigma\nu} \right). \tag{4.4.4}$$

Это разделение явно выражает $e_{\mu\nu}$ как симметризованный градиент вектора

$$e_{\mu\nu} = \chi_{\mu,\nu} + \chi_{\nu,\mu}. \tag{4.4.5}$$

Мы обсудили предварительно, почему калибровочная инвариантность гравитационного поля означает, что добавление члена этого вида не меняет физики. Поэтому всегда можно что-то прибавить к $e_{\mu\nu}$, так чтобы $e_{\mu\nu} = 0$. Мы назовем эти волны с $q^2 \neq 0$ "калибровочными волнами", они не дают никакого физического эффекта и могут всегда быть удалены преобразованием калибровки.

Если $q^2 = 0$, то уравнение (4.4.3) подразумевает что

$$q^{\sigma}\bar{e}_{\sigma\mu} = 0. \tag{4.4.6}$$

То есть, свободные волны *должны* удовлетворять условию калибровки Лоренца. Это не только вопрос выбора

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0, \tag{4.4.7}$$

для удобства, в случаях когда волна не свободна. Здесь имеется электромагнитный аналог, для фотонов $q^{\mu}e_{\mu}$ должно быть нулем.

Мы можем вывести фактическую форму тензора поляризации $e_{\mu\nu}$ в такой системе координат, где вектор импульса

$$q^{\mu} = (\omega, \omega, 0, 0). \tag{4.4.8}$$

Если мы выбираем

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + q_{\mu}\chi_{\nu} + q_{\nu}\chi_{\mu}, \tag{4.4.9}$$

и требуем, чтобы $e'_{\mu\nu}$ имел компоненты только в поперечных направлениях, то получаем систему уравнений, которую можем решить и получить ответ

$$e'_{11} = -e'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad e'_{12} = e'_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4.4.10}$$

Чтобы прийти к уравнению (4.4.10), заметим, что уравнение (4.4.6) подразумевает, что $\bar{e}_{\mu 4} = -\bar{e}_{\mu 3}$, так что только компоненты 4, 1, и 2 независимы. 4-компоненты могут быть удалены, при желании, преобразованием (4.4.9). Например, $e'_{14} = e_{14} + \omega\chi_1$, тогда выбираем $\chi_1 = -e_{14}/\omega$, $\chi_2 = -e_{24}/\omega$. Тогда $e'_{43} = e_{43} + \omega\chi_4 - \omega\chi_3$, так выбираем $\chi_3 - \chi_4 = -e_{34}/\omega$, тогда $e'_{43} = \bar{e}'_{43} = \bar{e}'_{44} = \bar{e}'_{33} = 0$. Мы делаем $e'_{44} = e_{44} + 2\omega\chi_4 = 0$, выбирая $\chi_4 = -e_{44}/2\omega$. Тогда, поскольку $\bar{e}'_{44}$ — также ноль, след e'^{σ}_{σ} нулевой как и e'_{33} и $e'_{11} + e'_{22}$. Поэтому выживают только компоненты с $\mu, \nu = 1$

или 2 в ${e'}_{\mu\nu}$, и для них ${e'}_{11} = -{e'}_{22}$. Итак, имеется только две линейно-независимых нормализованных комбинации (4.4.10).

Амплитуда для комптоновского рассеяния гравитона частицей массы m соответствует диаграммам на Рис. 4.3. Поляризация гравитона представляется тензором $e_{\mu\nu}$, для скалярных масс компонентами импульса в каждой вершине будут ${}^1p_\mu$, $({}^1p_\nu + {}^1q_\nu) = ({}^2p_\nu + {}^2q_\nu)$ и ${}^2p_\mu$. В терминах этих величин, мы имеем (для первой диаграммы)

$$4\lambda^{22}\bar{e}^{\mu\nu}\left[{}^2p_\mu({}^2p_\nu + {}^2q_\nu) - \frac{1}{2}m^2\eta_{\mu\nu}\right]\frac{1}{({}^1p + {}^1q)^2 - m^2}$$
$$\times {}^1\bar{e}^{\alpha\beta}\left[{}^1p_\alpha({}^1p_\beta + {}^1q_\beta) - \frac{1}{2}m^2\eta_{\alpha\beta}\right]. \qquad (4.4.11)$$

Пропагатор, который мы написали, соответствует скалярной частице. Некоторые упрощения в формуле следуют из ограничения на плоские волны $q^2 = 0$ и $q^\nu \bar{e}_{\nu\mu} = 0$.

4.5 НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИАГРАММЫ ДЛЯ ГРАВИТОНОВ

От калибровочной инвариантности мы ожидаем, что замена ${}^1e_{\mu\nu} \to {}^1e_{\mu\nu} + {}^1q_\mu a_\nu + {}^1q_\nu a_\mu$ не должна оказывать никакого влияния на комптоновскую амплитуду. Прямая подстановка показывает, что это *не так*. Наш результат неудовлетворителен и не полон. Что же является неправильным?

В комптоновском рассеянии фотонов электронами, имеется третья диаграмма, Рис. 4.4, не аналогичная ни одной диаграмме из пары на Рис. 4.3. Она соответствует квадратичному взаимодействию, A^2, которое появляется в функции Лагранжа, чтобы сделать теорию калибровочно-инвариантной.По аналогии с ситуацией в электродинамике, мы могли бы заподозрить, что при рассмотрении только пары диаграмм, Рис. 4.3, мы сделали только приближение к истине путем линеаризации. Существование амплитуды с квадратичным взаимодействием, Рис. 4.4, может быть выведено в электродинамике из требования, что подстановка калибровки

$$e_1' = e_1 + qa \tag{4.5.1}$$

не должна привести ни к какому изменению амплитуды в данном порядке. Процедура состоит в том, чтобы просто приравнять члены одного и того же порядка в амплитудах, полученных с e_1 и e_1', с некоторыми неопределенными коэффициентами перед каждым членом, которые требуется найти. Можно было бы аналогичным способом вывести вид квадратичных членов для гравитона, но это пока еще не выполнено, потому что самодействие гравитона делает все вещи во втором порядке очень сложными, и мы получим правильный вид другим путем.

Могло бы быть интересным когда-нибудь все же попробовать вывести эти члены непосредственно, так что мы еще сделаем несколько замечаний по этому поводу.

Если бы мы рассматривали добавление к рассеянию Комптона, амплитуд не только типа, представленного Рис. 4.4, но также и на диаграммах Рис. 4.5, мы возможно получили бы условия для определения всех неизвестных параметров более полной теории. Если рассмотреть вместо этого рассеяние Комптона для виртуального гравитона, можно увеличить число свободных параметров и восстановить правильную теорию. Соответствующие диаграммы могли бы быть вроде изображенных на Рис. 4.6, и можно было бы попытаться сделать сумму калибровочно-инвариантной. Фактически, мы решим эти задачи другим способом, и все же могло бы быть полезно изучить детали нашей теории поля, приближаясь к решению различными путями.

4.6 КЛАССИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЧАСТИЦЫ

Чтобы вычислить в нашей теории некоторые классические эффекты, например, орбиты планет при их движении вокруг звезды, мы должны привести квантовую теорию к классической форме. Можно сделать это, записав классическую теорию как результат вариационного принципа, примененного к интегралу по траекториям, который включает действие, то есть, интеграл по времени от функции Лагранжа. Движение, описанное частицей, является минимумом интеграла по траекториям, например для свободной частицы, оно является минимумом выражения

$$-\int \sqrt{(ds)^2} = -\int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -\int \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha}} d\alpha. \qquad (4.6.1)$$

Надо кое-что добавить к подынтегральному выражению, чтобы представить гравитационные эффекты. Существует больше одного вариационного принципа, который может дать классическую теорию, мы будем использовать тот, который дает наиболее удобные интегралы по путям (фактически, тот, который ведет к уравнению Клейна-Гордона квантовомеханическим методом интеграла по траекториям). Для заряженных частиц мы можем получить уравнения движения, варьируя интеграл

$$-\frac{m}{2}\int d\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right) - e\int d\alpha A_\mu(x)\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right). \qquad (4.6.2)$$

После того, как мы сделали некоторые упрощения, результатом будет

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\alpha^2} = eF_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}\right), \tag{4.6.3}$$

где $F_{\mu\nu}$ — ротор от A_μ. Из этого уравнения, умножением на $dx_\mu/d\alpha$, так как $F_{\mu\nu}$ является антисимметричным, находим, что

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right)$$

равно нулю, или

$$\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha} = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2$$

— константа, так что α пропорционально собственному времени (и мы можем принять его равным собственному времени, если m_0 — масса покоя частицы). Затем мы должны включить наш тензор $T_{\mu\nu}$ в подынтегральное выражение, чтобы соответствующим способом получить правильные гравитационные уравнения. В электродинамике вектор, свернутый с полем — просто производная от смещения по 4-скаляру, то есть, скорость $(dx^\mu/d\alpha)$. Мы догадываемся, что тензор $T_{\mu\nu}$ — не что иное как тензор, порожденный двумя такими скоростями, и подбираем постоянный множитель так, чтобы 44-компонента правильно представляла плотность энергии. Положим

$$T^{\mu\nu} = m_0\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}\right), \tag{4.6.4}$$

где $\alpha = s$ — "собственное время". 44-компонента — действительно плотность энергии, она имеет один множитель $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, для увеличения энергии со скоростью, и другой, чтобы учесть одновременное уменьшение объема из-за сокращения Лоренца.

Интеграл от функции Лагранжа, или действие, которое будет варьироваться, поэтому имеет вид

$$m_0\left[-\frac{1}{2}\int d\alpha\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right) - \lambda\int d\alpha h_{\mu\nu}(x)\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}\right)\right]. \tag{4.6.5}$$

Мы вводим новый тензор, чтобы описать это в более компактной форме,

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}(x), \tag{4.6.6}$$

так чтобы наш интеграл от функции Лагранжа принял вид

$$m_0\left[-\frac{1}{2}\int d\alpha g_{\mu\nu}(x)x'^{\mu}x'^{\nu}\right]. \tag{4.6.7}$$

С этого времени мы обозначаем производные относительно α штрихами. Варьируя относительно координат пути x мы получаем по два равных члена от каждого из множителей x'^{μ}, x'^{ν}, и один от тензора $g_{\mu\nu}$, уравнение движения есть

$$-\frac{d}{d\alpha}(g_{\sigma\nu}x'^{\nu}) + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}x'^{\mu}x'^{\nu} = 0. \tag{4.6.8}$$

Имеются и другие способы записи уравнений, которые иногда полезны. Сначала мы переносим члены, включающие две скорости, в одну сторону

$$g_{\sigma\nu}x''^{\nu} = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}}\right]x'^{\mu}x'^{\nu}. \tag{4.6.9}$$

Затем разделяем второй член на две равные части и заменяем индексы $\mu \leftrightarrow \nu$ в одной части, чтобы получить комбинацию, которой присваиваем специальный символ, потому что она часто повторяется,

$$[\mu\nu,\sigma] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right]. \tag{4.6.10}$$

В терминах этой скобки (называемой "ковариантными коэффициентами связности"), уравнение движения есть просто

$$g_{\sigma\nu}x''^{\nu} = -[\mu\nu,\sigma]x'^{\mu}x'^{\nu}. \tag{4.6.11}$$

Имеется одно следствие уравнения, которое получается немедленно при дифференцировании относительно α произведения $g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}) = 2g_{\mu\nu}x'^{\mu}x''^{\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}x'^{\mu}x'^{\nu}x'^{\sigma}. \tag{4.6.12}$$

Если мы перепишем произведение $g_{\mu\nu}x''^{\nu}$ в первом члене с помощью выражения(4.6.9) и заменим индексы суммирования, то найдем, что производная — тождественный ноль. Таким образом, произведение $g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$

является скалярной константой. Если мы определим новый параметр s соотношением

$$g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2,$$

это s будет аналогом собственного времени для задач гравитации. Так как $ds/d\alpha$ — константа, мы выбираем ее равной единице и представляем далее все производные относительно s точкой. В частности, тогда

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 1. \tag{4.6.13}$$

4.7 ОРБИТАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ЗВЕЗДЫ

Уравнение движения может быть написано в терминах тензора поля $h_{\mu\nu}$ следующим образом(из (4.6.8)):

$$\frac{d}{ds}(\eta_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma} + 2\lambda h_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma}) = \lambda\frac{\partial h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\sigma}. \tag{4.7.1}$$

Перед нахождением движения, мы нуждаемся в соответствующих выражениях для гравитационных полей. Нас интересует область, где нет никаких источников массы. Таким образом, полевое уравнение

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} - 2\bar{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{,\lambda} = -\lambda\bar{T}_{\mu\nu}, \tag{4.7.2}$$

может быть решено способом, аналогичным решению уравнений Максвелла в калибровке Лоренца, $\bar{h}_{\mu\lambda}{}^{,\lambda} = 0$. Мы имеем оператор Даламбера ($\Box^2 = (\partial/\partial t)^2 - \nabla^2$)

$$\Box^2 h_{\mu\nu} = -\lambda\bar{T}_{\mu\nu}. \tag{4.7.3}$$

Для гравистатического случая, когда зависимость от времени имеет нулевую частоту, мы должны получить ньютонов закон силы, компонента T_{44} пропорциональна массе. Другие компоненты тензора напряжений нулевые. Полевой тензор

$$\bar{h}_{44} = -\frac{\lambda M}{4\pi r}, \quad \bar{h}_{\mu\nu} = 0\ (\nu, \mu \neq 4, 4). \tag{4.7.4}$$

Тензор без черты получается с помощью черты над обеими частями.

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{h}^{\sigma}{}_{\sigma}\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -\frac{\lambda}{8\pi}\frac{M}{r} & \text{при } \mu = \nu \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \tag{4.7.5}$$

Мы подставляем этот полевой тензор в уравнения движения и используем следующие сокращения

$$\phi = 2\lambda h_{44},$$

$$\psi = 2\lambda h_{33} = 2\lambda h_{22} = 2\lambda h_{11}. \tag{4.7.6}$$

Для нашего случая, $\phi = \psi = -2MG/r$, но далее мы столкнемся со случаем, когда это неверно, так что мы сохраним различия в алгебре, однако принимая, что ϕ и ψ — функции только от r.

Процедура решения для орбит аналогична обычному методу решения уравнений для ньютонова поля. Мы разделяем уравнение на пространственные координаты и координаты времени, устраняем время и параметр α, чтобы получить дифференциальное уравнение, связывающее радиус и угловое смещение. Мы начинаем с 4-мерного уравнения (4.7.1). Пространственные компоненты ($\nu = 3,\ 2,\ 1$) ведут себя согласно уравнениям вида

$$\frac{d}{ds}\left(-\dot{x} + \psi\dot{x}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\dot{t}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)\right]. \tag{4.7.7}$$

Уравнение для времени

$$\frac{d}{ds}\left(\dot{t} + \phi\dot{t}\right) = 0. \tag{4.7.8}$$

Мы имеем интеграл движения, следующий из уравнения (4.6.13),

$$\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu + 2\lambda h_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1, \tag{4.7.9}$$

которое приводит, для нашего случая, к соотношению

$$\dot{t}^2(1+\phi) - (1-\psi)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1. \tag{4.7.10}$$

Уравнение времени (4.7.8) подразумевает, что

$$(1+\phi)\frac{dt}{ds} = K, \tag{4.7.11}$$

где K — константа (пропорциональная энергии). Это служит нам, чтобы устранить производную (dt/ds) из пространственного уравнения (4.7.7).

Так как ϕ, ψ зависят только от r, правая часть (4.7.7) направлена по оси x. Отсюда следует что

$$\frac{d}{ds}\Big((1-\psi)(\dot{x}y-\dot{y}x)\Big)=0.$$

Таким образом, если мы предполагаем, что движение лежит полностью в плоскости $z=0$ и используем полярные координаты r, θ в плоскости xy, то мы имеем дополнительную константу движения L, связанную с угловым моментом:

$$(1-\psi)r^2\dot{\theta}=L. \tag{4.7.12}$$

Радиальное движение может тогда быть получено из уравнения (4.7.10) в радиальных координатах

$$\frac{K^2}{1+\phi}-\Big(1-\psi\Big)\Big(r^2\dot{\theta}^2+\dot{r}^2\Big)=1. \tag{4.7.13}$$

При переходе к производным $(dr/d\theta)$ разделив (dr/ds) на $(d\theta/ds)$ мы получаем дифференциальное уравнение орбиты

$$\frac{K^2}{1+\phi}-\frac{L^2}{(1-\psi)r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right]=1. \tag{4.7.14}$$

Традиционная подстановка $u=1/r$ приводит к уравнению, в котором удобно воспользоваться малыми возмущениями ньютоновых решений

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=\left(\frac{K^2}{1+\phi}-1\right)\frac{1-\psi}{L^2}. \tag{4.7.15}$$

Мы ожидаем что $\phi=\psi=-2MG/r=-2MGu$. Для нерелятивистских движений K близко к 1 и $K^2/(1+\phi)-1=K^2-1+2MGu$, если ϕ считается малым, так что в пределе малых ϕ, ψ правая часть (4.7.15) принимает вид $L^{-2}(K^2-1+2MGu)$. Это то же самое, что и в теории Ньютона, где правая часть есть $(E+2MGu)L^{-2}$, а E — энергия. Есть изменения в релятивистском случае, где мы не пренебрегаем членами более высокого порядка. Их мы обсудим в следующем разделе.