Трехмерная гравитация новыми глазами

Эдвард Виттен

0706.3359v1

School of Natural Sciences, Institute for Advanced Study
Princeton, New Jersey 08540

Аннотация

Мы рассматриваем проблему поиска CFT, которые могут быть дуальны к гравитации без источников в трех измерениях с отрицательной космологической постоянной. c-теорема указывает, что трехмерная гравитация без источников самосогласована только при определенных значениях константы взаимодействия, и связь с калибровочной теорией Черна-Саймонса намекает, что это могут оказаться те значения, при которых дуальная CFT может быть голоморфно факторизована. Если это так, и если взять минимальную массу черной дыры BTZ, то энергетический спектр трехмерной гравитации с отрицательной космологической постоянной может быть определен точно. При самом отрицательном значении космологической постоянной дуальной CFT вероятно будет теория монстра Френкеля, Леповского и Мермана. Теория монстра может быть первой в дискретном ряду CFT, дуальных к трехмерной гравитации. Функция распределения второй теории из этой последовательности может быть определена на гиперэллиптической поверхности Римана любого рода. Мы также делаем подобный анализ для супергравитации.

1 Введение

Трехмерная квантовая гравитация без источников с действием Эйнштейна-Гильберта

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int d^3x\sqrt{g}\left(R + \frac{2}{\ell^2}\right), \tag{1}$$

изучалась с многих точек зрения (см. некоторые ранние факты в [1]-[3] и недавний обзор со ссылками в [4]), но ее статус в сущности остался неясен. Эта статья посвящена предварительной попытке пересмотреть ситуацию. Мы начнем с введения в проблему перед тем как изложить краткое содержание статьи.

Первая мысль об этой теории такова, что на классическом уровне она является "тривиальной," в том смысле, что нет никаких гравитационных волн, и любые два решения локально эквивалентны. Поэтому, возможно, ее удастся трактовать квантово-механически.

Вторая мысль состоит в том, что несмотря на то, что теория "тривиальна," она фактически при подсчете степеней оказывается неперенормируемой, так как гравитационная постоянная G имеет размерность длины. Таким образом, возможно, что квантовой теории не существует.

Заявление о неперенормируемости, однако, ошибочно, и именно потому, что классическая теория тривиальна. В трех измерениях тензор Римана R_{ijkl} может быть выражен через тензор Риччи R_{ij}. В случае чистой гравитации, уравнения движения делают тензор Риччи пропорциональным метрике. Таким образом, любой возможный контрчлен может быть сведен к числу, кратному $\int d^3x\sqrt{g}$, и эквивалентен on-shell перенормировке космологической постоянной, которая параметризована в (1) параметром ℓ^2. Контрчлен, который исчезает on-shell, может быть удален локальным переопределением метрического тензора g (общего вида $g_{ij} \to g_{ij} + aR_{ij} + \dots$, где a – постоянная, и многоточие относится к локальным членам более высокого порядка). Таким образом, более точным утверждением будет сказать, что любые расходимости в теории возмущений могут быть удалены переопределением поля и перенормировкой ℓ^2.

1.1 Связь с калибровочной теорией

Только что сделанное заявление справедливо, вне зависимости от того, как формулируется теория возмущений. Но фактически, есть естественная формулировка, в которой не требуется никакого переопределения полей или перенормировки. Это следует из того факта, что, классически, $2+1$-мерная чистая гравитация может быть выражена в терминах калибровочной теории. Спиновая связность ω является $SO(2,1)$ калибровочным полем (или $SO(3)$ калибровочным полем в случае евклидовой сигнатуры). Она может быть объединена с “vierbein” e, чтобы образовать калибровочное поле группы $SO(2,2)$, если космологическая постоянная отрицательна (или подобной группы, если космологическая постоянная будет равна нулю или положительна).

Мы просто объединяем ω и e в 4×4 матрицу 1-форм A:

$$A = \begin{pmatrix} \omega & e/\ell \\ -e/\ell & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Здесь ω заполняет 3×3 блок, в то время как e занимает последнюю строку и столбец. Пока e является обратимым, обычные преобразования e и ω при бесконечно малых локальных преобразованиях Лоренца и диффеоморфизмах объединяются в калибровочные преобразования A. Это утверждение фактически имеет близкий аналог в любой размерности пространства-времени d, если заменить $SO(2,2)$ на $SO(d-1,2)$. Особенностью $d=3$ является то, что действие также можно записать в калибровочно-инвариантной форме [5], [6]. Действительно, обычное действие Эйнштейна-Гильберта (1) эквивалентно действию, записанному через лагранжиан Черна-Саймонса[1] для калибровочного поля A:

$$I = \frac{k}{4\pi}\int \mathrm{tr}^* \left(\mathrm{A}\wedge \mathrm{dA} + \frac{2}{3}\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}\right). \tag{3}$$

При числе измерений, отличном от трех, невозможно подобным образом заменить действие Эйнштейна-Гильберта калибровочно-инвариантным действием для калибровочных полей.[2]

При описании на языке калибровочной теории, теория возмущений перенормируема при подсчете степеней и фактически конечна, потому

[1]Здесь tr^*, обозначает инвариантную квадратичную форму на алгебре Ли $SO(2,2)$, определенную через $\mathrm{tr}^*\,\mathrm{ab} = \mathrm{tr}\ \mathrm{a}\star\mathrm{b}$, где tr – след в четырехмерном представлении, и $\star$ – звезда Ходжа, $(\star b)_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijkl}b^{kl}$.

[2]В $d=4$ можно написать гамильтоновы связи общей теории относительности в терминах калибровочных полей [7]. Это стало отправной точкой петлевой квантовой гравитации.

что нет никаких возможных локальных контрчленов. Сам функционал Черна-Саймонса является единственным калибровочно-инвариантным действием, которое может быть записано только через A, без метрического тензора; поскольку это не интеграл от калибровочно-инвариантной локальной плотности, он не будет появляться как контрчлен в теории возмущений. Космологическая постоянная не может быть перенормирована, так как при описании на языке калибровочной теории она является структурной константой калибровочной группы.

Как мы уже заметили, описание Черна-Саймонса для трехмерной гравитации применимо тогда, когда vierbein является обратимым. Это верно для классического решения, и таким образом, также верно если Вы находитесь достаточно близко к классическому решению. Теория возмущений, стартующая с классического решения, не будет выводить нас из области, в которой vierbein является обратимым, таким образом, описание Черна-Саймонса для трехмерной гравитации справедливо в теории возмущений. Тот факт, что в этой формулировке разложение по теории возмущений трехмерной гравитации фактически конечно, разумно воспринять как намек, что соответствующая квантовая теория действительно существует.

Однако вне теории возмущений связь между трехмерной гравитацией и калибровочной теорией Черна-Саймонса является неясной. С одной стороны, в теории Черна-Саймонса vierbein может стать необратимым непертурбативно. Например, есть классическое решение $A = \omega = e = 0$. Точка зрения работы [6] состояла в том, что такие негеометрические конфигурации должны быть включены, чтобы придать смысл трехмерной квантовой гравитации непертурбативно. Но указывалось (особенно Н. Зайбергом), что, в тех случаях, когда мы действительно знаем, как извлечь смысл из квантовой гравитации, мы относимся к обратимости vierbein серьезно. Например, в пертурбативной теории струн, понятой как модель квантовой гравитации в двух пространственно-временных измерениях, интегрирование по пространству модулей поверхностей Римана, которое приводит к разумной теории, выполняется в предположении, что метрика должна быть невырожденной.

Есть и другие возможные проблемы в непертурбативном соответствии между трехмерной гравитацией и теорией Черна-Саймонса. Эквивалентность между диффеоморфизмами и калибровочными преобразованиями ограничивается диффеоморфизмами, которые непрерывно связаны с тождественным преобразованием. Однако мы полагаем, что в гравитации играют важную роль более общие диффеоморфизмы (типа модулярных преобразований в пертурбативной теории струн). Они не включаются естественным образом в описание Черна-Саймонса. Можно руками дополнить описание на языке калибровочной теории наложением требования инвариантности при несвязных диффеоморфизмах, но неясно, насколько это естественно.

Точно также, в квантовой гравитации ожидается, что необходимо суммировать по различным топологиям пространства-времени. Ничто в Черна-Саймонса описании не требует, чтобы мы делали такое суммирование. Мы можем дополнить действие Черна-Саймонса инструкцией суммировать по 3-многообразиям, но неясно, почему мы должны делать это.

С точки зрения описания Черна-Саймонса, кажется естественным фиксировать специфическую поверхность Римана Σ, скажем, рода g, и конструировать квантовое гильбертово пространство, квантуя калибровочные поля Черна-Саймонса на Σ. (Действительно, имело место замечательное продвижение в изучении того, как сделать это и как связать результаты с теорией Лиувилля [8]-[11].) В квантовой гравитации мы ожидаем изменяющих топологию процессов, таких, что могло бы оказаться невозможным ассоциировать гильбертово пространства со специфическим пространственным многообразием.

Независимо от мнения по таким вопросам, с идеей, что гравитация и калибровочная теория в трех измерениях эквивалентны непертурбативно есть более серьезная проблема. Спустя несколько лет после того, как калибровочно-гравитационная связь была предложена, Банадос, Тейтельбойм и Занелли [12], обнаружили, что в трехмерной гравитации с отрицательной космологической постоянной есть решения для черных дыр.

Существование этих объектов, обычно называемых черными дырами BTZ, удивительно, учитывая, что классическая теория "тривиальна." Последующая работа [13], [14] прояснила, что к трехмерным черным дырам нужно отнестись серьезно, особенно в контексте AdS/CFT соответствия [15].

Черная дыра BTZ имеет горизонт положительной длины и соответствующую энтропию Бекенстейна-Хокинга. Если, таким образом, трехмерная гравитация действительно соответствует квантовой теории, то эта теория должна иметь огромное вырождение состояний черных дыр. Кажется маловероятным, что это вырождение может быть понято в калибровочной теории Черна-Саймонса, потому что эта чрезвычайно топологическая теория имеет слишком мало степеней свободы. Однако, некоторые интересные попытки были сделаны; их обзор см. в работе [4].

Существование черной дыры BTZ делает трехмерную гравитацию гораздо более захватывающей проблемой. Это могло бы стать для нас лучшим шансом на получение разрешимой модели с квантовыми черными дырами. Конечно, в размерности 3+1 существование гравитационных волн с их нелинейными взаимодействиями означает, что нельзя надеяться на точное решение ни для какой системы, включающей в себя квантовую гравитацию.[3] Могло бы существовать точное решение в 1+1-мерной модели с черными дырами (интересные попытки были сделаны [16]), но такая модель, вероятно, будет намного менее реалистичной, чем трехмерная чистая гравитация. Например, в 1+1 измерениях горизонт черной дыры состоит только из двух точек, и таким образом, нет никакого хорошего аналога площади горизонта черной дыры.

1.2 К чему стремиться

Таким образом, мы хотели бы решить трехмерную чистую квантовую гравитацию.

Но что означало бы решить ее?

Прежде всего, мы будем рассматривать только случай, когда космологическая постоянная Λ отрицательна. Это единственный случай, для которого мы знаем, что значит решить теорию.

В настоящее время, есть некоторое подозрение (например, см. [17]), что квантовая гравитация с $\Lambda > 0$ не существует непертурбативно, ни в какой размерности. Одна из причин в том, что кажется невозможным при $\Lambda > 0$ определить точные наблюдаемые, по крайней мере, нет ни одной из них [18], которая может быть измерена наблюдателем, находящимся внутри пространства-времени.[4]

Это естественно, если мир с положительным Λ (как тот, в котором мы,

[3] Можно представить себе точное решение, или по крайней мере, проясняющее положение описание соответствующего гамильтониана для почти экстремальных черных дыр, взаимодействующих с внешними безмассовыми частицами.

[4] По крайней мере пертурбативно, de Sitter/CFT соответствие дает наблюдаемые, которые могут быть измерены наблюдателем, который смотрит на всю Вселенную с внешней стороны [19], [18]. Эта наблюдаемая характеризует волновую функцию основного состояния.

может быть, живем) всегда в лучшем случае метастабилен, что действительно имеет место для известных вложений де ситтерова пространства в теории струн [20]. Если это так, то чистая гравитация с $\Lambda > 0$ действительно не имеет смысла как точная теория сама по себе, но (как нестабильная частица) должна изучаться как часть большей системы. Может быть много выборов большей системы (например, много вложений в теории струн), и может быть нереалистично ожидать, что любой из них будет разрешимым.

Является это правильной интерпретацией или нет, мы не можем в попытке, которой является эта статья, решить трехмерную гравитацию с $\Lambda > 0$, так как, не зная, как определить какую бы то ни было математически точную наблюдаемую, мы не знаем, что пытаться вычислить.

Для $\Lambda = 0$ выше трех измерений в квантовой гравитации есть точная наблюдаемая, это S-матрица. Однако в трехмерном случае S-матрицы в обычном смысле нет, так как в любом состоянии с энергией отличной от нуля, пространство-время является асимптотическим к пространству Минковского на бесконечности только локально [3]. Что более существенно ввиду наших целей, в трехмерной чистой гравитации с $\Lambda = 0$ нет S-матрицы, так как нет никаких частиц, которые могут быть рассеяны. Нет никаких гравитонов в трех измерениях, и нет также никаких черных дыр, если только не будет $\Lambda < 0$. Итак, снова у нас нет ясной картины того, к чему надо стремиться, чтобы решить трехмерную гравитацию с нулевой космологической постоянной.

При отрицательной космологической постоянной имеется аналог, и фактически намного более богатый аналог, S-матрицы, а именно, дуальная конформная полевая теория (CFT). Это, конечно, *дву*мерная CFT, определенная на асимптотической границе пространства-времени. Мало того, что дуальность AdS/CFT имеет смысл в трех измерениях, но, фактически, одним из предшественников AdS/CFT соответствия было открытие Брауном и Энно [21] асимптотической алгебры Вирасоро в трехмерной гравитации. Они рассматривали трехмерную гравитацию с отрицательной космологической постоянной, возможно взаимодействующую с дополнительными полями. Действие имело вид

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int d^3x\sqrt{g}\left(R + \frac{2}{\ell^2} + \dots\right), \tag{4}$$

где многоточие обозначает вклады других полей. Их главный результат состоял в том, что физическое гильбертово пространство, полученное при квантовании этой теории (в асимптотически анти-де-ситтеровом (AdS) пространстве-времени) имеет действие лево- и право- перемещающих алгебр Вирасоро, где $c_L = c_R = 3\ell/2G$. В нашем современном понимании [15], это является частью намного более богатой структуры — граничной конформной теории поля.

Решить чистую квантовую гравитацию с $\Lambda < 0$, это значит найти эту дуальную конформную полевую теорию. Мы сосредотачиваемся на случае $\Lambda < 0$, потому что это единственный случай, для которого мы знаем, что означает решить теорию. К счастью, и возможно неслучайно, это также тот случай, где имеются черные дыры.

1.3 Неклассическое ограничение

Эта формулировка того, что мы стремимся сделать, проясняет, что мы должны ожидать ограничения, которое является довольно удивительным с классической точки зрения. При рассмотрении классического действия (4) кажется, что безразмерное отношение ℓ/G есть свободный параметр. Но формула для центрального заряда $c_L = c_R = 3\ell/2G$ показывает, что этого не может быть. Согласно c-теореме Замолодчикова [22], в любом непрерывно варьируемом семействе конформных теорий поля в $1+1$ измерениях центральный заряд c постоянен. Более общо, то же самое верно для лево- и право- движущих центральных зарядов c_L и c_R.

Таким образом, центральные заряды дуальной CFT не могут зависеть от непрерывно изменяющегося параметра ℓ/G. Это должно означать [18], что теория имеет смысл только для определенных значений ℓ/G.

Конечно, в c-теореме имеется важное техническое предположение: теория должна иметь нормируемое и $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$-инвариантное основное состояние. (Два фактора $SL(2,\mathbb{R})$ стоят для влево- и вправо-перемещающихся граничных возбуждений.) Этому условию повинуется трехмерная гравитация, где анти-де-ситтерово пространство является классическим приближением к вакууму. Желаемая $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ симметрия есть просто классическая $SO(2,2)$ симметрич трехмерного AdS пространства.

Утверждение, что ℓ/G не может изменяться непрерывно, не ограничено чистой гравитацией. Оно выполняется по той же самой причине в любой теории трехмерной гравитации с материей, которая имеет разумный AdS вакуум. Например, в моделях теории струн, для которых дуальные CFT известны, ℓ/G выражается в терминах принимающих целые значения потоков; это дает прямое объяснение того, почему оно не может изменяться непрерывно.

1.4 План этой статьи

Теперь мы можем описать план этой статьи.

Мы стремимся решить трехмерную гравитацию с отрицательным Λ, при некоторых выделенных значениях ℓ/G, при которых она имеет смысл.

У нас нет никакого строго метода, чтобы определить правильные значения. Однако в Главе 2, принимая описание Черна-Саймонса трехмерной гравитации, мы будем использовать его, чтобы мотивировать определенные значения ℓ/G. Значения, которые появляются (с помощью маленькой ловкости рук в выборе калибровочной группы для теории Черна-Саймонса) являются интересными. Они являются теми значениями, при которых c_L и c_R будут целыми кратными числа 24, и полная голоморфная факторизация дуальной CFT оказывается разумной.

Не желая смотреть дареному коню в зубы, мы предположим, что это и есть правильные значения, которые надо рассматривать. Полагаясь на голоморфную факторизацию для описания решения теории, мы должны описать последовательность голоморфных CFT при $c = 24k$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

При $k = 1$ считается [23], что есть в точности 71 штука голоморфных CFT с нужным центральным зарядом $c = 24$. Из этих теорий, 70 штук имеют некоторую симметрию, типа Каца-Муди или алгебры токов, расширяющую конформную симметрию. В AdS/CFT соответствии эти теории являются дуальными к трехмерным теориям, описывающим гравитацию плюс дополнительные калибровочные поля (с взаимодействиями Черна-Саймонса). Чтобы описывать чистую гравитацию, мы нуждаемся в голоморфной CFT при $c = 24$ и без всякой симметрии Каца-Муди.

Такая модель была построена почти двадцать пять лет назад Френкелем, Леповски и Мерменом [24], которые также предположили ее единственность. Побуждением для построения модели было то, что она допускает в качестве группы симметрии группу монстра Fischer-Griess $\mathbb{M}$ — наибольшую из спорадических конечных групп. (Связь между монстром и конформной полевой теорией предполагалась развитием, возникшим из наблюдения McKay, связавшего монстра с j-функцией, как мы объясним более подробно в Главе 3.1.) Возможно, модель FLM — самая естественная известная структура с $\mathbb{M}$-симметрией. Детальное и изящное описание находится в книге [25]; короткое резюме см. в работах [26], [27], а последующие события и обзор см. в [28] - [30]. Принимая (недоказанную) гипотезу единственности FLM, мы предполагаем, что их модель должна давать CFT, дуальную к трехмерной гравитации при $c = 24$.

Для $c = 24k$, $k > 1$ мы нуждаемся в аналоге требования, что нет никакой симметрии Каца-Муди. Вероятным аналогом, выражающим идею, что мы стремимся описывать чистую гравитацию, является то, что не должно быть никаких первичных полей низкой размерности, отличных от тождественного. Небольшое вычисление показывает, что при $c = 24k$, самая низкая размерность первичного поля, отличного от тождественного, не может быть больше чем $k + 1$, и если мы предполагаем, что эта размерность и есть в точности $k + 1$, тогда функция распределения определена единственным образом. Конформные полевые теории с этим свойством были впервые исследованы Хеном в [31], [32] и были названы экстремальными CFT; см. также [33].

Неизвестно[5], существуют ли экстремальные CFT при $k > 1$. Если такая CFT действительно существует, она является привлекательным кандидатом на роль дуальной к трехмерной гравитации при соответствующем значении космологической постоянной. Первичные поля размерности $k + 1$ и выше интерпретировались бы как операторы, которые создают черные дыры. Размерность $k + 1$ хорошо согласуется с минимальной массой черной дыры BTZ. Это утверждение может походить на волшебство, так как значение $k+1$ определено из голоморфности и модулярной инвариантности, без упоминания о черных дырах; но результат не настолько удивителен, если вы знакомы с предыдущими результатами о AdS/CFT соответствии в трех измерениях [34].

Глава 3 этой статьи посвящена описанию функции распределения экстремальной CFT и обсуждению, как такая теория могла бы быть связана с трехмерной гравитацией. В Главах 2 и 3, мы рассматриваем также случай трехмерной супергравитации. Более точно, мы рассматриваем только минимальную супергравитацию, соответствующую $N = 1$ суперконформной симметрии для граничной CFT. В этом случае голоморфная факторизация мыслима при $c = 12k^*$, $k^* = 1, 2, 3, \ldots$ Здесь есть

[5]Определение Хена экстремальной CFT, позволяет голоморфную факторизацию с точностью до фазы, так чтобы c могло быть кратным числу 8, а не 24. В результате, он обсуждал несколько примеров экстремальных теорий, которые мы не будем рассматривать здесь. Эти примеры имеют нецелое k, меньшее 2.

некоторая двусмысленность в том, что мы должны точно подразумевать под экстремальной суперконформной полевой теорией (SCFT), но если действовать прагматически, имеются хорошие кандидаты при $k^* = 1, 2$. $k^* = 1$ теория была построена Френкелем, Леповски и Мерманом, которые также предположили ее единственность. Ее дискретные симметрии были поняты только недавно в работе Дункана [35]. Для $k^* = 2$ экстремальная SCFT была построена Диксоном, Гинспаргом и Харви [26], путем модификации orbifold проектирования, которое использовалось [24] при построении $k = 1$ экстремальной CFT. Интересно, что экстремальные SCFT с $k^* = 1, 2$ обе допускают[6] действие очень больших дискретных групп, связанных с группой Конвея. Это очередное указание, что необычные дискретные группы являются существенными для трехмерной гравитации и супергравитации. Фактически, мы находим некоторые намеки, что супергравитация может иметь симметрию монстра при $k^* = 4$ и симметрию бэби-монстра при $k^* = 6$.

К сожалению, мы не знаем, как строить новые примеры экстремальных конформных или суперконформных полевых теорий. Глава 4 посвящена вычислению, которое стремится оказать скромную поддержку идее, что новые экстремальные теории действительно существуют. Мы рассматриваем экстремальную CFT с $k = 2$ и показываем, что ее функция распределения может быть единственным образом определена на гиперэллиптической поверхности Римана любого рода (включая, например, любую риманову поверхность рода 2). Тот факт, что функция распределения с правильными свойствами существует и единственна для любого рода, как мы надеемся, является намеком на то, что экстремальная CFT при $k = 2$ действительно существует.

Мы делаем на каждой стадии самое оптимистическое предположение. Решающие аргументы в пользу предположений, сделанных здесь, все еще отсутствуют. Литература по трехмерной гравитации заполнена заявлениями (включая некоторые, принадлежащие настоящему автору [6]), которые непредубежденному взгляду кажутся менее чем удовлетворительными. Хотелось бы надеяться, что будущая работа все разъяснит.

Совет J. Maldacena имел существенное значение в начале этой работы. Я также хочу поблагодарить следующих лиц: J. Duncan, G. Höhn, G. Nebe и J. Teschner за описания их работ и полезные советы; T. Gannon,

[6] Тот факт, что они имеют по существу ту же самую группу симметрии, был указан J. Дунканом, который также предложил идентификацию $k^* = 2$ теории.

R. Griess, J. Lepowsky и A. Ryba за переписку о группе монстра и по относящимся к ней вопросам; и многих коллег в IAS и в других местах, особенно A. Maloney, G. Moore и S. Shenker за полезные комментарии.

2 Калибровочная теория и значение c

Задача настоящей главы состоит в том, чтобы определить, какие значения космологической постоянной, или эквивалентно, центрального заряда c граничной CFT предполагаются связью между трехмерной гравитацией и калибровочной теорией Черна-Саймонса.

Перед переходом к каким-либо вычислениям, мы наметим несколько предварительных пунктов. Прежде всего, [36], пока трехмерное пространство-время является ориентируемым, как мы предполагаем в этой статье, трехмерная гравитация, может быть обобщена, чтобы включить дополнительное взаимодействие, функционал Черна-Саймонса от спиновой связности ω:

$$\Delta_0 I = \frac{k'}{4\pi}\int_W \mathrm{tr}\,\left(\omega\wedge \mathrm{d}\omega + \frac{2}{3}\omega\wedge\omega\wedge\omega\right). \tag{5}$$

Здесь мы считаем ω $SO(2,1)$ калибровочным полем (или $SO(3)$ калибровочным полем в случае евклидовой сигнатуры). Кроме того, tr – след в трехмерном представлении $SO(2,1)$, и k' квантуется по топологическим причинам (точная нормировка зависит от некоторых предположений и обсуждается в Главах 2.1 и 2.4). Эквивалентно, вместо ω, мы могли бы использовать $SO(2,2)$ калибровочное поле A, введенное в 2, и добавить к действию член вида

$$\Delta I = \frac{k'}{4\pi}\int_M \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{A}\wedge \mathrm{dA} + \frac{2}{3}\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}\wedge\mathrm{A}\right), \tag{6}$$

где теперь tr – след в четырехмерном представлении $SO(2,2)$. При условии, что обычное действие Эйнштейна (1) также присутствует, не имеет значения, какую форму гравитационного взаимодействия Черна-Саймонса мы используем, так как они приводят к эквивалентным теориям. Если добавить [7] к ω число, кратное e, то действие Эйнштейна 1 преобразует-

[7]Эта операция является инвариантной относительно диффеоморфизмов и локальных преобразований Лоренца, потому что ω и e преобразуются таким же образом при локальных преобразованиях Лоренца — утверждение, которое точно выполняется в трех пространственно-временных измерениях.

ся так, что сокращает e-зависимую часть уравнения (6), сводя его к (5) (хотя и изменяя параметры в действии Эйнштейна).

Для наших целей $SO(2,2)$-инвариантная форма (6) более удобна. Этот способ записи функционала Черна-Саймонса помещает делает его в точности параллельным с действием Эйнштейна-Гильберта, которое как в (3 может подобным образом быть выражено как взаимодействие Черна-Саймонса, определенное другой квадратичной формой. Мы будем использовать тот факт, что все взаимодействия могут быть записаны как взаимодействия Черна-Саймонса, чтобы ограничить надлежащее квантование всех безразмерных параметров, включая ℓ/G.

Мы начинаем с факта, что группа $SO(2,2)$ является локально эквивалентной $SO(2,1)\times SO(2,1)$. Кроме того, при выполнении вычислений мы будем предполагать что старт с $SO(2,1)\times SO(2,1)$ является правильной глобальной формой калибровочной группы. (Затем мы рассмотрим накрывающие группы[8] Таким образом, выбрав подходящие линейные комбинации ω и e, мы получим пару $SO(2,1)$ калибровочных полей A_L и A_R. Они имеют взаимодействия Черна-Саймонса

$$I=\frac{k_L}{4\pi}\int \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{A_L}\wedge \mathrm{dA_L}+\frac{2}{3}\mathrm{A_L}\wedge\mathrm{A_L}\wedge\mathrm{A_L}\right)-\frac{\mathrm{k_R}}{4\pi}\int \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{A_R}\wedge \mathrm{dA_R}+\frac{2}{3}\mathrm{A_R}\wedge\mathrm{A_R}\wedge\mathrm{A_R}\right). \tag{7}$$

Как k_L, так и k_R являются целыми числами по топологическим причинам, и это приводит к квантованию отношения G/ℓ, которое появляется в действии Эйнштейна-Гильберта, так же как и гравитационная константа взаимодействия Черна-Саймонса (6). Знак минус, появляющийся при последнем члене в (7) удобен; он будет гарантировать, что k_L и k_R оба положительны.

2.1 Квантование параметров

Для полноты мы начинаем с обзора квантования константы взаимодействия Черна-Саймонса в калибровочной теории. Основной случай для рассмотрения — калибровочная группа $U(1)$. Калибровочное поле A - связность на комплексном линейном расслоении $\mathcal{L}$ над 3-многообразием W, которое для простоты мы примем не имеющим никакой границы.

[8]Ранние трактовки накрытий в контексте теории Черна-Саймонса с компактной калибровочной группой см. в [37], которые являются только локально изоморфными $SO(2,1)\times SO(2,1)$.

Наивно говоря, действие Черна-Саймонса есть

$$I = \frac{k}{2\pi}\int_W A \wedge dA \tag{8}$$

с некоторым коэффициентом k. Если линейное расслоение $\mathcal{L}$ тривиально, то мы можем интерпретировать A как 1-форму, и I хорошо определено как функционал, принимающий действительные значения. Если бы это было общим случаем, то не было бы никакой потребности квантовать k.

Однако, в общем случае $\mathcal{L}$ нетривиально, A имеет особенности типа дираковской струны, и формула (8) не является в действительности хорошо определенной в том виде, как она написана. Чтобы добиться большего успеха, мы выбираем 4-многообразие M с границей W и такое, что $\mathcal{L}$ расширяется на M. Такое M всегда существует. Затем мы выбираем расширение $\mathcal{L}$ и A на M, и заменяем определение (8) на

$$I_M = \frac{k}{2\pi}\int_M F \wedge F, \tag{9}$$

где $F = dA$ – кривизна. Теперь нет никакой особенности, типа струны Дирака, и определение I_M имеет смысл. Но I_M действительно зависит от M (и на выбранном расширении $\mathcal{L}$, хотя мы не указываем это в обозначениях). Чтобы определить количественно зависимость от M, мы рассматриваем два различных 4-многообразия M и M' с границей W и выбранными расширениями $\mathcal{L}$. Мы можем построить четыре 4-многообразие X без границы, склеивая M и M' вдоль W, с противоположной ориентацией для M' так, чтобы они соответствовали гладко по их общей границе. Тогда мы получаем

$$I_M - I_{M'} = \frac{k}{2\pi}\int_X F \wedge F. \tag{10}$$

Теперь на замкнутом 4-многообразии X величина $\int_X F\wedge F/(2\pi)^2$ представляет $\int_X c_1(\mathcal{L})^2$ (здесь c_1 – первый класс Черна), и поэтому целое число. В квантовой механике функция действия I должна быть определена по модулю 2π (так, чтобы $\exp(iI)$, которое появляется в интеграле по траекториям, было однозначным). Требуя чтобы $I_M - I_{M'}$ было целым кратным 2π, мы видим, что k должно быть целым числом. Это и есть квантование константы взаимодействия Черна-Саймонса для $U(1)$ калибровочной теории [9]

[9] Имеется усовершенствование, если 3-многообразие W обеспечено спиновой струк-

Теперь позвольте нам перейти дальше к случаю калибровочной группы $SO(2,1)$. Группа $SO(2,1)$ — contractible на свою максимальную компактную подгруппу $SO(2)$, которая изоморфна $U(1)$. Так квантование константы взаимодействия Черна-Саймонса для $SO(2,1)$ калибровочного поля может быть выведено немедленно из результата для $U(1)$. Пусть A будет $SO(2,1)$ калибровочным полем и определяет взаимодействие Черна-Саймонса

$$I = \frac{k}{4\pi} \int_W \mathrm{tr} \left(\mathrm{A} \wedge \mathrm{dA} + \frac{2}{3} \mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \right), \tag{11}$$

где tr – след в трехмерном представлении $SO(2,1)$. Тогда, чтобы I было частью действия квантовой теории, k должно быть целым числом. Причина того, что фактор $1/2\pi$ в 9 был заменен на $1/4\pi$ в 11, состоит просто в том, что, когда мы идентифицируем $U(1)$ с $SO(2)$ и затем включаем это в $SO(2,1)$, след дает фактор 2.

Накрытия

Таким образом мы получили соответствующее квантование константы взаимодействия Черна-Саймонса для калибровочной группы $SO(2,1)$. Однако, это еще не все, потому что группа $SO(2,1)$ не односвязна. Поскольку она contractible к $SO(2) \cong U(1)$, то имеет ту же самую фундаментальную группу, что и $U(1)$, а именно, $\mathbb{Z}$. Следовательно, возможно для каждого положительного целого числа n, взять n-кратное покрытие $SO(2,1)$. Самое знакомое из них — это двойное покрытие, $SL(2,\mathbb{R})$. Кроме того, $SO(2,1)$ имеет односвязное универсальное накрытие.

Мы хотим разработать квантование взаимодействия Черна-Саймонса, если $SO(2,1)$ заменена одной из этих групп накрытия. Снова удобно начать с $U(1)$. Сказать, что калибровочной группой абелевой калибровочной теории является $U(1)$, а не $\mathbb{R}$, означает точно, что возможные электрические заряды образуют решетку, порожденную фундаментальным зарядом, который мы называем "заряд 1." Дуально, магнитные потоки квантуются, с $\int_C F/2\pi \in \mathbb{Z}$ для любого 2-цикла C. Замена $U(1)$ n-кратным накрытием означает, что электрические заряды принимают

турой. В этом случае k может быть полуцелым числом, как объяснено в [38]. Это усовершенствование физически реализуется в квантовом эффекте Холла с долей заполнения 1. Этот эффект может быть описан электромагнитным взаимодействием Черна-Саймонса с $k = 1/2$; полуцелое значение последовательно, потому что микроскопическая теория имеет фермионы и так требует спиновой структуры.

значения $n^{-1}\mathbb{Z}$, и дуально, магнитные потоки являются делимыми на n, $\int_C F/2\pi \in n\mathbb{Z}$. В результате для четырех многообразий X, мы имеем $\int_C F\wedge F/(2\pi)^2 \in n^2\mathbb{Z}$. Так, требуя, чтобы функция Черна-Саймонса 8 была хорошо определена по модулю 2π, мы требуем, чтобы $k \in n^{-2}\mathbb{Z}$. Это подходящий результат для n-кратного накрытия. В случае универсального накрытия, с $U(1)$ замененным на $\mathbb{R}$, магнитные потоки исчезают, и нет никакого топологического ограничения на k.

Эти утверждения переносятся немедленно на накрытия $SO(2,1)$, накрытия которого все contractible к соответствующим накрытиям $U(1)$. Так для n-кратного накрытия $SO(2,1)$, мы требуем

$$k \in n^{-2}\mathbb{Z}, \tag{12}$$

и для универсального покрытия $SO(2,1)$, k произвольно и может изменяться непрерывно.

Диагональные накрытия

Есть еще что сказать, потому что трехмерная гравитация фактически связана с $SO(2,1)\times SO(2,1)$ калибровочной теорией, а не только с калибровочной теории с единственной $SO(2,1)$. Таким образом мы должны рассмотреть накрытия $SO(2,1)\times SO(2,1)$, которые не обязательно возникают из отдельных накрытий этих двух факторов.

Так как $SO(2,1)\times SO(2,1)$ - contractible к $SO(2)\times SO(2) = U(1)\times U(1)$, мы можем действовать, сначала анализируя $U(1)\times U(1)$ случай. Мы рассматриваем калибровочную теорию $U(1)\times U(1)$ с калибровочными полями A, B и действием Черна-Саймонса

$$I = \frac{k_L}{2\pi}\int_W A\wedge dA - \frac{k_R}{2\pi}\int_W B\wedge dB. \tag{13}$$

Чтобы определить I в топологически нетривиальном случае, мы выбираем четыре 4-многообразие M, на которое все распространяется и определяем

$$I_M = \int_M \left(\frac{k_L}{2\pi}F_A\wedge F_A - \frac{k_R}{2\pi}F_B\wedge F_B\right), \tag{14}$$

где F_A и F_B – это две кривизны. Это хорошо определено по модулю 2π, если

$$I_X = \int_X \left(\frac{k_L}{2\pi}F_A\wedge F_A - \frac{k_R}{2\pi}F_B\wedge F_B\right) \tag{15}$$

– число, кратное 2π для любого $U(1) \times U(1)$ калибровочного поля над замкнутым 4-многообразием X.

В $U(1) \times U(1)$ калибровочной теории решетка зарядов порождена зарядами $(1,0)$ и $(0,1)$, и классы когомологии $x = F_A/2\pi$ и $y = F_B/2\pi$ являются целыми. Для накрытия $U(1) \times U(1)$ мы хотим расширить решетку зарядов. Чтобы держать вещи простыми, мы рассмотрим только случай, который фактически будет важен в нашем применении: диагональное накрытие, в котором добавляют вектора заряда $(1/n, 1/n)$ для некоторого целого числа n. В этом случае, x и y все еще являются целыми, и их разность делится на n: $x = y + nz$, где n – целый класс. Мы имеем

$$I_X = 2\pi(k_L - k_R)\int_X y^2 + 2\pi k_L \int_X (n^2 z^2 + 2nyz). \tag{16}$$

Условие, что это число, кратное 2π для любого X и любых целых классов y, z, состоит в том, что

$$\begin{aligned} k_L \quad &\in \begin{cases} n^{-1}\mathbb{Z} \quad \text{если} \quad \text{n} \quad \text{нечетное} \\ (2n)^{-1}\mathbb{Z} \quad \text{если} \quad \text{n} \quad \text{четное} \end{cases} \\ k_L - k_R \quad &\in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{17}$$

Это также ограничения на k_L и k_R, если калибровочная группа есть диагональное накрытие $SO(2,1) \times SO(2,1)$ с действием (7). Например, группа $SO(2,2)$ – двойное накрытие $SO(2,1) \times SO(2,1)$, и это накрытие соответствует случаю $n = 2$ для вышеупомянутого обсуждения. Итак для $SO(2,2)$ калибровочной теории соответствующее ограничение на уровни Черна-Саймонса будет:

$$\begin{aligned} k_L \quad &\in \tfrac{1}{4}\mathbb{Z} \\ k_L - k_R \quad &\in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{18}$$

Для общего n-кратного диагонального накрытия нужно использовать (17).

Также можно сформировать “универсальное диагональное накрытие,” соответствующее, примерно, пределу $n \to \infty$ в вышеупомянутых формулах. С этой калибровочной группой нет никакого ограничения на k_L, но $k_L - k_R$ – целое число. В терминах трехмерной гравитации, к которой мы возвращаемся затем, это соответствует разрешению ℓ/G быть свободно переменным параметром, в то время как гравитационная константа взаимодействия Черна-Саймонса k', определенная в (6) – целое число. Как объяснено в Главе 1.3, хотя это соответствует в трехмерной гравитации конъюнктуре классически, это не может быть правильным квантово-механическим ответом.

2.2 Сравнение с трехмерной гравитацией

Пока мы поняли соответствующую нормализацию калибровочной теории для действия Черна-Саймонса

$$\begin{aligned} I = & \quad k_L I_L + k_R I_R \\ = & \quad \frac{k_L}{4\pi}\int \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{A_L}\wedge \mathrm{dA_L} + \frac{2}{3}\mathrm{A_L}\wedge\mathrm{A_L}\wedge\mathrm{A_L}\right) - \frac{\mathrm{k_R}}{4\pi}\int \mathrm{tr}\,\left(\mathrm{A_R}\wedge \mathrm{dA_R} + \frac{2}{3}\mathrm{A_R}\wedge\mathrm{A_R}\wedge\mathrm{A_R}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Наш следующий шаг должен будет выразить A_L и A_R, которые являются калибровочными полями $SO(2,1)\times SO(2,1)$ (или накрывающей группы) в терминах гравитационных переменных, и таким образом определить ограничения на гравитационные константы взаимодействия. Мы имеем

$$I = \frac{k_L + k_R}{2}(I_L - I_R) + (k_L - k_R)\frac{(I_L + I_R)}{2}. \tag{20}$$

член в (20) пропорциональный $I_L - I_R$ будет давать действие Эйнштейна-Гильберта (1), в то время как член, пропорциональный $(I_L + I_R)/2$ эквивалентен гравитационной константе взаимодействия Черна-Саймонса (6) с коэффициентом $k' = k_L - k_R$.

Спиновая связность $\omega^{ab} = \sum_i dx^i \omega_i^{ab}$ является 1-формой, принимающей значения на множестве антисимметричных 3×3 матриц. vierbein – обычно 1-форма, принимающая значения на векторах Лоренца, $e^a = \sum_i dx^i\, e_i^a$. Метрика выражается через e обычным способом, $g_{ij}dx^i\otimes dx^j = \sum_{ab}\eta_{ab}e^a\otimes e^b$, где $\eta = \mathrm{diag}(-1,1,1)$ – метрика Лоренца; и риманова форма объема – $d^3x\sqrt{g} = \frac{1}{6}\epsilon_{abc}e^a\wedge e^b\wedge e^c$, где ϵ_{abc} – антисимметричный тензор, скажем, $\epsilon_{012} = 1$. Все это имеет очевидный аналог в любом измерении. Однако в трех измерениях вектор Лоренца эквивалентен антисимметричному тензору; это факт, который позволяет связать гравитацию и калибровочную теорию. Удобно ввести объект $^*e_{ab} = \epsilon_{abc}e^c$, являющийся 1-формой, принимающей значения в антисимметричных матрицах, точно так же как ω. Мы поднимаем и опускаем локальные индексы Лоренца с помощью метрики Лоренца η, таким образом $\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\epsilon_{bcd} = -\delta^a_d$, и $e^c = -\frac{1}{2}\epsilon^{abc}\,{}^*e_{bc}$.

Мы можем объединить ω и ${}^*e$ и положить $A_L = \omega - {}^*e/\ell$, $A_R = \omega + {}^*e/\ell$. Небольшое вычисление дает

$$I_L - I_R = -\frac{1}{\pi\ell}\int \mathrm{tr}\,{}^*\mathrm{e}(\mathrm{d}\omega + \omega\wedge\omega) - \frac{1}{3\pi\ell^3}\int \mathrm{tr}\,({}^*\mathrm{e}\wedge{}^*\mathrm{e}\wedge{}^*\mathrm{e}). \tag{21}$$

В терминах матрично-значных 2-форм кривизны $R^{ab} = (d\omega + \omega\wedge\omega)^{ab} = \frac{1}{2}\sum_{ij} dx^i \wedge dx_j R^{ab}_{ij}$, где R^{ab}_{ij} – тензор Римана, а метрический тензор – g, это эквивалентно

$$I_L - I_R = \frac{1}{\pi\ell}\int d^3x\sqrt{g}\left(R + \frac{2}{\ell^2}\right). \tag{22}$$

Запоминая множитель $(k_L + k_R)/2$ в (20), мы видим, что это точно согласуется с действием Эйнштейна-Гильберта (1), если

$$k_L + k_R = \frac{\ell}{8G}. \tag{23}$$

Центральный заряд граничной конформной полевой теории был первоначально вычислен Брауном и Энно [21] для случая, когда гравитационная константа взаимодействия Черна-Саймонса $k' = k_L - k_R$ исчезает. В этом случае, мы кладем $k = k_L = k_R = \ell/16G$. Формула для центрального заряда имеет вид: $c = 3\ell/2G$, и это ведет к $c = 24k$. Для случая $k' = 0$, граничная CFT лево-право симметрична, причем $c_L = c_R$, так что фактически $c_L = c_R = 24k$.

Вообще, граничная CFT имеет лево-и право- перемещающие алгебры Вирасоро, которые могут интерпретироваться (для подходящей ориентации границы) как граничные возбуждения, связанные с A_L и A_R соответственно. Таким образом центральные заряды c_L и c_R являются функциями только k_L и k_R, соответственно. Следовательно обобщение результата, полученного в последнем параграфе имеет вид:

$$(c_L, c_R) = (24k_L, 24k_R). \tag{24}$$

2.3 Голоморфная факторизация

В конформной полевой теории в двух измерениях энергия основного состояния есть $-c/24$. Более широко, если есть отдельные левые и правые центральные заряды c_L и c_R, энергии основного состояния для лево-и правостороннего движения будут $(-c_L/24, -c_R/24)$. Модулярная инвариантность говорит, что разность между лево- и право- сторонними энергиями основного состояния должна быть целым числом. В вышеупомянутом вычислении, $(c_L - c_R)/24 = k_L - k_R$. Согласно 24, это целое число при условии, что константа гравитационного взаимодействия Черна-Саймонса $k' = k_L - k_R$ является целым числом.

Голоморфная факторизация требует, чтобы энергии лево- и право- перемещающих основных состояний по отдельности являлись целыми, так, чтобы была модулярная инвариантность отдельно для лево-перемещающих и право-перемещающих мод CFT. Таким образом, для голоморфной факторизации, c_L и c_R должны оба быть целыми кратными числа 24. Это единственное ограничение, так как голоморфные CFT с $c = 24$ действительно существуют (и были классифицированы [23] по модулю гипотезы, упомянутой в Главе 1.4).

Согласно 24, условие для c_L и c_R быть целыми кратными 24 состоит точно в том, что k_L и k_R должны быть целыми числами. Как и в нашем обсуждении уравнения (11), это правильное условие, если калибровочная группа есть в точности $SO(2,1) \times SO(2,1)$, а не группа накрытия.

Можно дать интуитивное объяснение того, почему это правильная калибровочная группа, если граничная CFT должна быть голоморфно факторизованной. Алгебра Вирасоро, конечно, бесконечномерна, но она имеет конечномерную подалгебру, порожденную $L_{\pm 1}$ и L_0, которая является симметрией вакуума. Общепринято рассматривать соответствующую группу симметрии вакуума как $SL(2, \mathbb{R})$, но фактически, в голоморфной CFT, в которой все энергии являются целыми числами, группа, которая действует faithfully, есть в действительности $SO(2,1)$. Таким образом голоморфно факторизованная CFT имеет группу симметрии $SO(2,1) \times SO(2,1)$, и естественно, что это является правильной калибровочной группой при описании калибровочной теории (аспектов) дуальной гравитационной теории.

Теперь позвольте нам рассмотреть некоторые другие возможные калибровочные группы. Одна возможность состоит в том, чтобы взять двойное накрытие для каждого фактора $SO(2,1) \times SO(2,1)$, беря калибровочную группу $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$. Соответствующее ограничение на константы взаимодействия калибровочной теории было определено в 12 (где мы должны положить $n = 2$), и то, что k_L и k_R принимают значения в $\frac{1}{4}\mathbb{Z}$. Следовательно центральные заряды c_L и c_R являются множителями числа 6. В частности $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ калибровочная теория позволила бы нам рассматривать значения констант взаимодействия, которые противоречат модулярной инвариантности граничной CFT.

Имеется, возможно скорее интуитивный, аргумент, предлагающий, что $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ не та группа, которую следует рассматривать. Если калибровочная группа есть $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$, то после взятия двумерного представления одной из групп $SL(2,\mathbb{R})$ мы получаем двумерное вещественное векторное расслоение W, которое обобщает то, что в классической геометрии есть спиновое расслоение. Таким образом, это было бы теорией, в которой, в классическом пределе, W является спиновым многообразием, обеспеченным выдающейся спиновой структурой (или даже двумя). Это нормально в теории с фермионами, но это не так, по-видимому, в теории чистой гравитации.

Мы подобным образом теряем модулярную инвариантность и имеем трудности в том, как интерпретировать геометрические структуры, если мы рассматриваем другие недиагональные накрытия $SO(2,1)\times SO(2,1)$. Так что давайте обсуждать диагональные накрытия $SO(2,1) \times SO(2,1)$, которые рассматривали в конце Главы 2.1. Мы знаем, что универсальное диагональное накрытие не правильно, так как тогда ℓ/G могло бы изменяться непрерывно. Это оставляет возможность n-кратного диагонального накрытия для некоторых n. Лучше всего мотивированным примером возможно является двойное накрытие $SO(2,2)$, который является симметрией анти-де-ситтерова пространства-времени (в противоположность накрытию этого пространства-времени). В этом случае, согласно 18, k_L и k_R могут принимать взять значения в $\mathbb{Z}/4$, пока $k' = k_L - k_R$ является целым. Для граничной CFT это означает, что c_L и c_R могут быть кратными 6 (а их разность — кратной числу 24). Например, позвольте нам рассмотреть гипотетическую CFT $(c_L, c_R) = (6,6)$. Энергии основного состояния будут $(-1/4,-1/4)$. Поскольку эти значения — не целые числа, группа симметрии основного состояния будет не $SO(2,1) \times SO(2,1)$, а четырехкратное диагональное накрытие, которое является двойным покрытием калибровочной группы $SO(2,2)$, что было предположено. Такая CFT не может быть голоморфно факторизована, так как энергии лево-и право- перемещающих основных состояний — не целые числа; она не может даже быть голоморфно разложена на множители с точностью до фазы [10] Структура значительно сложнее, чем в

[10]Лево-перемещающая функция распределения должна была бы быть $\Phi/\Delta^{1/4}$, где $\Delta = \eta(q)^{24}$ – дискриминант, η будет эта-функцией Дедекинда, а Φ – модулярная фор-

голоморфно факторизованном случае. Подобные замечания применимы и к другим диагональным накрытиям.

Прагматически рассуждая, самый важный аргумент против попытки описывать трехмерную гравитацию через накрытие $SO(2,1) \times SO(2,1)$ может быть просто фактом, что никаких хороших кандидатов нам не известно. Например, кажется, не известно никакой особенно интересной бозонной CFT (в противоположность суперконформной полевой теории), при $c = 6, 12$, или 18, а это — значения, которых мы ожидали бы, если бы ли мы использовали калибровочную группу $SO(2,2)$. В отличие от этого, при $c = 24$, что является естественным для $SO(2,1) \times SO(2,1)$, теория монстра Frenkel-Lepowsky-Meurman - выдающийся кандидат, как мы упоминали в Главе 1.4 и объясним более подробно в Главе ? newbie.

Самой простой гипотезой является та, что правильной калибровочной группой, которую надо рассматривать при изучении трехмерной чистой гравитации является $SO(2,1) \times SO(2,1)$, с целыми k_L и k_R и голоморфной факторизацией граничной CFT. Было бы очень неестественно пропустить тот факт, что $SO(2,1) \times SO(2,1)$ калибровочная теория приводит точно к значениям центрального заряда, при которых решительное упрощение граничной CFT, известное как голоморфная факторизация является мыслимым. Кроме того, факт, что классическое действие [19] калибровочной теории является суммой расцепленных действий для A_L и A_R, связанных соответственно с лево-и право- перемещающими модами граничной CFT, является намеком на голоморфную факторизацию граничной теории.

Во всяком случае, независимо от того, дают ли они нам все, действительно кажется хорошо мотивированным искать голоморфно факторизованные CFT с центральными зарядами, кратными 24, которые являются дуальными к трехмерной чистой гравитации при специальных значениях космологической постоянной. Это будет нашим главным фокусом в остальной части этой статьи.

ма веса 3. Степень Δ была настроена, чтобы получить правильную энергию основного состояния; модулярная инвариантность подразумевает, что модулярный вес Φ должен равняться весу $\Delta^{1/4}$. Так как нет никакой модулярной формы веса 3, такая теория не существует. Даже при $(c_L, c_R) = (12, 12)$, невозможно получить голоморфную факторизацию с точностью до фазы. Чтобы получить модулярную инвариантность и правильную энергию основного состояния, лево-перемещающая функция распределения должна была бы быть $E_6/\Delta^{1/2}$, где E_6 - ряд Эйзенштейна веса 6. Однако, коэффициенты в q-разложении этой функции не положительны.

2.4 Интерпретация

Несколько дальнейших слов об интерпретации кажутся напрашивающимися.

Мы *не* утверждаем, что трехмерная гравитация непертурбативно эквивалентна калибровочной теории Черна-Саймонса. Некоторые возражения против этой идеи были описаны в Главе 1.1. Мы знаем, что калибровочная теория Черна-Саймонса полезна для теории возмущений, как объяснялся в той главе, и мы надеемся, что она полезна и для того, чтобы понять некоторые непертурбативные вопросы. Мы использовали подход калибровочной теории, чтобы получить некоторые намеки о правильных значениях космологической постоянной (или, эквивалентно, центрального заряда) просто потому, что это был единственный доступный инструмент. Мы конечно не утверждаем, что у нас есть твердый аргумент в пользу того, что значения (c_L, c_R), предложенные $SO(2,1) \times SO(2,1)$ калибровочной теорией являются единственными уместными.

Неявным в подходе калибровочной теории к квантованию безразмерного параметра ℓ/G является предположение, что по крайней мере некоторые из негеометрических состояний, которые могут быть описаны в калибровочной теории, имеют смысл. Действительно, когда понято в классической геометрии с метрикой, предполагаемой гладкой и невырожденной, действие Эйнштейна-Гильберта 1 хорошо определено как вещественная функция. Топологические проблемы, которые заставляют его быть многозначным, когда оно интерпретируется в калибровочной теории как функция Черна-Саймонса и приводит к квантованию ℓ/G, зависят от допущения определенных конфигураций, которые являются естественными в калибровочной теории, но сингулярными в геометрии, потому что vierbein не является обратимым.

Кроме того, голоморфная факторизация наиболее вероятно возможна, только если интеграл по траекториям включает сумму по некоторым негеометрическим конфигурациям. В квантовой гравитации, мы по крайней мере ожидаем суммировать по всем топологиям 3-многообразий W, возможно с некоторым фиксированным асимптотическим поведением. Выбор топологии как ожидается, затронет и лево- и право- движущиеся моды граничной CFT. Чтобы достигнуть голоморфной факторизации, должна по-видимому быть своего рода отдельная топологическая сумма для лево- и право- движущихся мод. Поскольку это не происходит в классической геометрии, это должно зависеть от своего рода негеометрических вкладов в интеграл по траекториям, хотя эти вклады могут быть экспоненциально малыми при многих обстоятельствах.

Гравитационное действие Черна-Саймонса новыми глазами

Наше обсуждение квантования гравитационной константы взаимодействия Черна-Саймонса (5)

$$\Delta_0 I = \frac{k'}{4\pi}\int_W \mathrm{tr}\,\left(\omega\wedge \mathrm{d}\omega + \frac{2}{3}\omega\wedge\omega\wedge\omega\right) \tag{25}$$

базировалось полностью на калибровочной теории. Мы теперь хотим описать подобный, но немного отличный ответ, который возник бы из классической дифференциальной геометрии. Как всегда, различия отражают тот факт, что анализ на языке калибровочной теории допускает некоторые негеометрические конфигурации.

Мы сначала кратко переформулируем анализ калибровочной теории. ω есть связность на $SO(2,1)$ или (в евклидовой сигнатуре) $SO(3)$ расслоении над 3-многообразием W. Как обычно, чтобы определить $\Delta_0 I$ более точно, мы выбираем ориентируемое 4-многообразие M с границей W с расширением ω на W. Затем мы определяем

$$I_M = \frac{k'}{4\pi}\int_M \mathrm{tr\,F\wedge F}. \tag{26}$$

Если M заменяется некоторым другим 4-многообразием M', и $X = M - M'$ будет 4-многообразие без границы, полученное путем склеивания M и M', то

$$I_M - I_{M'} = \frac{k'}{4\pi}\int_X \mathrm{tr\,F\wedge F} = 2\pi\mathrm{k'}\int_\mathrm{X}\mathrm{p_1(F)}, \tag{27}$$

где $p_1(F) = (1/8\pi^2)\mathrm{tr\,F\wedge F}$ – первая форма Понтрягина. Вообще, $\int_X p_1(F)$ может быть любым целым числом, таким образом, условие, что неопределенность в I_M является целым кратным 2π, означает просто, что k' – целое число.

Это правильный ответ, если правильно просто думать об ω как о $SO(3)$ или $SO(2,1)$ калибровочном поле, игнорируя его классическое отношение к гравитации. Однако в классической гравитации, можно получить лучший ответ. В классической гравитации ω – связность в касательном расслоении TW над W. Теперь заменим TW на $TW\oplus\epsilon$, где ϵ – тривиальное вещественное линейное расслоение. Тогда ω может быть расценена как связность на $TW \oplus \epsilon$ очевидным способом, и $TW \oplus \epsilon$ расширяется на M как касательное расслоение M. С этим выбором, (26) становится

$$I_M = \frac{k'}{4\pi} \int_M \operatorname{tr} \mathrm{R} \wedge \mathrm{R}, \tag{28}$$

, где R – форма кривизны M, и (27) становится

$$I_M - I_{.'} = 2\pi k' \int_X p_1(R). \tag{29}$$

Эффектом этого является то, что вместо первого числа Понтрягина общего расслоения над X, как в (27), мы имеем здесь первое число $p_1(TX)$ Понтрягина касательного расслоения X. Это число является кратным 3, из-за теоремы сигнатуры, которая говорит, что для 4-многообразий X, $p_1(TX)/3$ – целое число, сигнатура X. Следовательно, в гравитационной интерпретации, условие на k' будет

$$k' \in \frac{1}{3}\mathbb{Z}. \tag{30}$$

Есть также другой вариант этого. Если W – спиновое многообразие, и мы желаем определить гравитационную константу взаимодействия Черна-Саймонса 25 путем, который зависит от спиновой структуры W (это не кажется естественным в обычной гравитации, но это может быть естественным в супергравитации, к которой мы перейдем в Главе 2.5), условие на k' может быть далее смягчено. В этом случае, мы можем выбрать M так, чтобы выбранная спиновая структура на W простиралась на M. Если M' – другой выбор с тем же самым свойством, то $X = M - M'$ – спиновое многообразие . Но (как следует из теоремы об индексе Атья-Зингера для уравнения Дирака) сигнатура четырехмерного спинового многообразия является делимой на 16. Так в этой ситуации $p_1(TX)$ – число, кратное 48, и результат для k', согласно этим предположениям будет

$$k' \in \frac{1}{48}\mathbb{Z}. \tag{31}$$

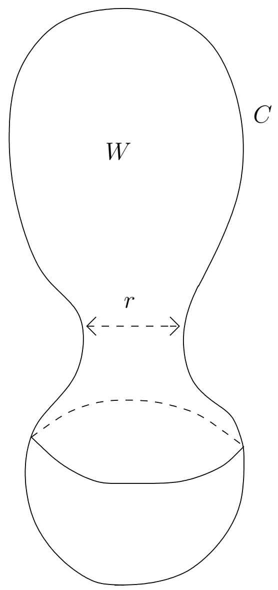
Физическое гильбертово пространство

Теперь мы обсудим значение для гравитации физического гильбертова пространства калибровочной теории Черна-Саймонса.

В трехмерной калибровочной теории Черна-Саймонса, можно фиксировать риманову поверхность C и построить $\mathcal{H}_C$, гильбертово пространство физических состояний, полученных путем квантования данной теории на C. Это гильбертово пространство зависит от констант взаимодействия Черна-Саймонса, так что, если мы хотим быть более точными, мы назовем это $\mathcal{H}_C(k_L, k_R)$. В [6], было предложено, чтобы физическое гильбертово пространство трехмерной гравитации на римановой поверхности C было получено, по существу, этим способом, используя $SO(2,1) \times SO(2,1)$ калибровочную теорию (или нечто подобное, в зависимости от того, положительна ли космологическая постоянная, отрицательна, или ноль). Некоторые серьезные возражения на утверждение, что чистая гравитация и калибровочная теория Черна-Саймонса являются эквивалентными в трех измерениях, были отмечены в Главе 1.1. Все же замечательный прогресс был достигнут [8], [11] в понимании квантования $SO(2,1)$ калибровочной теории, и еще более замечательный в связи этого квантования с теорией Лиувилля. Поэтому кажется вероятным, что гильбертово пространство, полученное при квантовании калибровочной теории Черна-Саймонса $SO(2,1) \times SO(2,1)$, кое-что означает для трехмерной гравитации, даже если предложение в [6] было преждевременно. Остальная часть этого подраздела будет посвящена попытке (не используемой в остальной части статьи), урегулировать другие точки зрения. См. некоторые полезные сведения в [39] .

Мы можем начать с вопроса, что мы подразумеваем под физическим гильбертовым пространством $\mathcal{H}_C$, полученным в квантовой гравитации при квантовании на замкнутом многообразии C. На какой вопрос это пространство, как предполагается, может ответить? Квантование на, например, асимптотически плоском пространстве-времени приводит к гильбертову пространству, которое может интерпретироваться относительно прямым способом, но физический смысл гильбертова пространства, полученного при квантовании на компактном пространственном многообразии (если такое гильбертово пространство может быть определено вообще), не ясен.

Волновая функция Хартла-Хокинга wavefunction Ψ вычисляется путем интегрирования по 3-многообразиям W с данной границей C. Пунктир, помеченный r, обозначает путь в W, соединяющий две точки на C. Можно изменить W так, чтобы длина этого пути обратилась в ноль без изменения геометрии C. В этом пределе W становится сингулярным даже при том, что граница C гладкая. Это дает "вклад источника"в уравнение Уилера-ДеВитта, из-за которого волновая функция Хартла-



Хокинга не удовлетворяет этому уравнению.

Одна линия мысли, которая является относительно близкой к работе, требует рассмотреть волновую функцию Хартла-Хокинга [**?**] J. Hartle и S. B. Хокинг, "Wavefunction Вселенной,"Phys. Rev. **D28** (1983) 2960. и потребовать, что она является вектором в $\mathcal{H}_C$. (Очевидная идея, что квантово-механические вероятности вычислялись бы в терминах внутренних произведений векторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_C$ физических состояний, сталкивается с подобными, но более серьезными проблемами.) Волновая функция Хартла-Хокинга является функционалом метрики на C. Для каждой метрики h на C, мы определяем $\Psi(h)$ как результат вычисления интеграла по траекториям по 3-многообразиям W, чьей границей является C и чья метрика g совпадает с h на границе. Формально, можно пытаться утверждать, что $\Psi(h)$ удовлетворяет уравнению Уилера-ДеВитта и таким образом является вектором гильбертова пространства $\mathcal{H}_C$ решений этого уравнения. Кроме того, можно формально сопоставить уравнения Уилера-ДеВитта гравитации с условиями для физического состояния в калибровочной теории Черна-Саймонса. Хотя многие шаги в этой аргументации работают хорошо, мы попадаем в затруднительное положение, потому что риманова поверхность может быть погружена, а не вложена, в 3-многообразие, и следовательно для W возможно стать вырожденным без вырождения C (**??**). В результате волновая функция Хартла-Хокинга не удовлетворяет уравнению Уилера-

ДеВитта и не является вектором в $\mathcal{H}_C$.

В случае отрицательной космологической постоянной, граничная CFT дает своего рода лечение для проблемы с волновой функцией Хартла-Хокинга. Вместо того, чтобы думать о C как об обычной границе W, мы думаем об нем как о конформной границе на бесконечности. Функция распределения $\hat{\Psi}(h)$ граничной CFT определена через интеграл по траекториям по всем выборам W с C в качестве конформной границы. Это хорошо, потому что, при C на конформной бесконечности, это является определенно вложением, а не погружением. Кроме того, $\hat{\Psi}(h)$ - своего рода ограничивающее значение волновой функции Хартла-Хокинга. Действительно, пусть ϕ будет положительной функцией на C. Тогда $\hat{\Psi}(h)$ есть в сущности[11] предельное значение $\Psi(e^{\phi}h)$ когда $\phi \to \infty$.

Это предлагает, чтобы мы в состоянии думать о $\hat{\Psi}(h)$ как о векторе в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_C$ связанном с трехмерной гравитацией и 2-многообразием C. Эту точку зрения можно объяснить более подробно. Фазовое пространство $SO(2,1) \times SO(2,1)$ теории Черна-Саймонса на C есть пространство $SO(2,1) \times SO(2,1)$ плоских связностей на C. Пространство $SO(2,1)$ плоских связностей на C имеет несколько топологических компонент (помеченных первым классом Черна, который появляется, потому что $SO(2,1)$ является contractible к $SO(2) \cong U(1)$). Одна из этих компонент, единственная, которая может просто интерпретироваться в терминах классической гравитации с отрицательной космологической постоянной, [12] является изоморфной к пространству Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Таким образом, эта компонента классического фазового пространства $\mathcal{M}$ есть произведение двух копий $\mathcal{T}$, параметризованных парой точек $\tau, \tau' \in \mathcal{T}$. Можно квантовать $\mathcal{M}$ (или по крайней мере эту его компоненту) наивно при использовании стандартной голоморфной структуры $\mathcal{T}$. Если мы делаем это, то волновая функция физического состояния — это "функция" τ и τ', которая является голоморфной в τ и антиголоморфной в τ'. (Антиголоморфность по одной переменной отражает, что относительный знак минус в действии Черна-Саймонса 19; мы пред-

[11] Мы нуждаемся в некоторой перенормировке в этом пределе; необходимая перенормировка отражает конформную аномалию. Из-за этой аномалии, $\hat{\Psi}(h)$ – не совсем функция только конформной структуры C, но функция метрики, которая преобразуется с определенным весом при конформных масштабных преобразованиях. В результате точный выбор ϕ имеет значение, но все довольно просто.

[12] В подходе к квантованию, развитому в [8], [11], это единственная компонента, которая рассматривается.

полагаем, что k_L и k_R положительны.) Фактически, волновая функция физического состояния $\Psi(\tau, \overline{\tau}')$ — не совсем функция τ и $\overline{\tau}'$ в обычном смысле, а форма, весов, определенных k_L и k_R. Таким образом, она принимает значения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_C(k_L, k_R)$, которое зависит от взаимодействий Черна-Саймонса. Такая волновая функция $\Psi(\tau, \overline{\tau}')$ определена его ограничением на диагональное подпространство $\tau = \tau'$. Кроме того, если мы хотим установить отношение к гравитации, естественно потребовать, чтобы Ψ была инвариантной при диагональном действии группы класса отображения на τ и τ'; это условие совместимо с ограничением $\tau = \tau'$.

Точно так же функция распределения CFT на поверхности Римана C не обязательно является голоморфной "функцией" (фактически форма соответствующих весов) $\Psi(\tau, \overline{\tau})$. Будучи вещественно-аналитической, Ψ может быть аналитически продолжена до функции $\Psi(\tau, \overline{\tau}')$ с τ' по крайней мере немного удалено от τ. Кажется, это не стандартный факт [13], что Ψ аналитически продолжается к голоморфной функции на $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ (с инвариантностью только относительно одной диагональной копии группы класса отображений). Однако, это верно для рода 1, так как функция распределения может быть определена как $\mathrm{Tr}\, q^{L_0} \overline{q}\,'^{\overline{L}_0}$, где мы можем взять q и q' так, чтобы они были независимыми комплексными переменными, по модулю меньшими 1. Кажется весьма вероятным, что это утверждение является фактически верным для всех значений рода, так как можно углубить пространство Тейхмюллера, "обрезая" по кругу и вставляя $q^{L_0} \overline{q}\,'^{\overline{L}_0}$. Если это так, то функция распределения CFT может всегда интерпретироваться как вектор[14] в гильбертовом пространстве Черна-Саймонса $\mathcal{H}_C(k_L, k_R)$.

Если нам дана теория трехмерной гравитации, возможно, взаимодействующей с другими полями, функция распределения дуальной CFT будет волновой функцией $\Psi(\tau, \overline{\tau}')$, которая, согласно только что заявленной гипотезе, является вектором в $\mathcal{H}_C(k_L, k_R)$. Любая гравитационная теория тех же самых центральных зарядов приводит к другому вектору в том же самом пространстве.

С этой точки зрения, кажется, что мы не должны требовать, как это было сделано в [6], что $\mathcal{H}_C(k_L, k_R)$ является пространством физических

[13] Однако Г. Сигал получил результаты в этом направлении.

[14] Здесь может быть необходимым расширить $\mathcal{H}_C(k_L, k_R)$ до пространства форм на $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$, которые являются инвариантными при действии группы классов отображений, но не обязательно квадратично интегрируемыми.

состояний, которые являются физически значащими в чистой трехмерной гравитации. Скорее специфическая гравитационная теория в объеме, типа чистой гравитации, дает начало специфической дуальной CFT, функция распределения которой дает определенный вектор в $\mathcal{H}_C(k_L, k_R)$. Другая гравитационная теория, возможно с полями материи, дуальная CFT для которой имеет те же самые значения центральных зарядов, приведет к дуальной функции распределения, которая является другим вектором в том же самом пространстве. Таким образом, $\mathcal{H}_C(k_L, k_R)$ есть, в некотором смысле, универсальная мишень для гравитационных теорий (с произвольными полями материи) данных центральных зарядов.

Мы сформулировали это для специфической римановой поверхности C, но, или в гравитационной теории, или в дуальной CFT, C может изменяться и имеется хорошее поведение, когда C вырождается. Таким образом, более естественно думать об этом, как о структуре, которая определена для всех римановых поверхностей. В конформной теории, эта перспектива описана в [40] .

Список литературы

[1] H. Leutwyler, "2+1-мерная модель для квантовой теории гравитации," Nuovo Cim. **42A** (1966) 159.

[2] E. J. Martinec, "Разрешимые системы в квантовой гравитации," Phys. Rev. **D30** (1984) 1198.

[3] S. Deser, R. Jackiw, и G.'t Hooft, "Трехмерная эйнштейновская гравитация: динамика плоского пространства," Annals Phys. **152** (1984) 220.

[4] S. Carlip, "Конформная теория поля, (2 + 1)-мерная гравитация и черная дыра BTZ," gr-qc/0503022.

[5] A. Achúcarro и P. Townsend, "Действие Черна-Саймонса для трехмерных анти-де-ситтеровых теорий супергравитации," Phys. Lett. **B180** (1986) 89.

[6] Е. Виттен, "(2+1)-мерная гравитация как точно решаемая система," Nucl. Phys. **B311** (1988) 46.

[7] A. Ashtekar, “Новые переменные для классической и квантовой гравитации,” Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 2244-2247.

[8] J. Teschner, “О связи между квантовой теорией Лиувилля и квантовыми пространствами Тейхмюллера,” Int. J. Mod. Phys. **A19S2** (2004) 459-477, hep-th/0303149.

[9] J. Teschner, “От теории Лиувилля к квантовой гравитации римановых поверхностей” (Международный Конгресс по Математической Физике, 2003), hep-th/0308031.

[10] J. Teschner, “Лекция по вершинным операторам Лиувилля,” Int. J. Mod. Phys. **A19S2** (2004) 436-458, hep-th/0303150.

[11] J. Teschner, “Аналог модулярного функтора из квантованной теории Teichmuller,” math/0510174.

[12] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “Черная дыра в трехмерном пространстве-времени,” Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849-1851, hep-th/9204099.

[13] A. Strominger, “Энтропия черных дыр из микросостояний вблизи горизонта,” JHEP 9802:009 (1998), hep-th/9712251.

[14] D. Birmingham, I. Sachs, and S. Sen, “Энтропия трехмерных черных дыр в теории струн,” Phys. Lett. **B424** (1998) 275-280, hep-th/9801019.

[15] J. Maldacena, “ Предел больших N для суперконформных полевых теорий и супергравитации,” Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231-252, hep-th/9711200.

[16] C. G. Callan, Jr., S. B. Giddings, J. A. Harvey, and A. Strominger, “Недолговечные черные дыры,” Phys. Rev. **D45** (1992) 1005-1009, hep-th/9111056.

[17] N. Goheer, M. Kleban, и L. Сасскинд, “Неприятность с пространством де Ситтера,” JHEP 0307:066 (2003), hep-th/0212209.

[18] Э. Виттен, “Квантовая гравитация в пространстве де Ситтера,” hep-th/0106109.

[19] A. Strominger, “AdS/CFT оответствие,” JHEP 0110:034 (2001), hep-th/0106113.

[20] S. Kachru, R. Каллош, A. Линде, и S. Трайведи, “Вакуум де Ситтера в теории струн,” Phys. Rev. D68:046005,2003, hep-th/0301240.

[21] J. D. Brown and M. Henneaux, “Центральные заряды в канонической реализации асимптотической симметрии: пример из трехмерной гравитации,” Commun. Math. Phys. **104** (1986) 207-226.

[22] А. Б. Замолодчиков, “Необратимость потока ренорм-группы в 2-мерной теории поля,” JETP Lett.. **43** (1986) 430.

[23] A. N. Schellekens, “Мероморфные конформные теории поля с $c = 24$,” Commun. Math. Phys. **153** (1993) 159-186, hep-th/9205072.

[24] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, “Естественное представление монстра Fischer-Griess с модулярной функцией J в качестве характера,” Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81** (1984) 3256-3260.

[25] I. B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, *Алгебры вершинных операторов и монстр* (Academic Press, Бостон, 1988).

[26] L. Dixon, P. Ginsparg, and J. Харви, “Красота и бестия: суперконформная симметрия в модуле монстра,” Commun. Math. Phys. **119** (1988) 221-241.

[27] L. Dolan, P. Goddard, и P. Монтагью, “Конформная теория поля, Triality и группа монстра,” Phys. Lett. **B236** (1990) 165-172.

[28] R. Borcherds, “Автоморфные формы и алгебры Ли,” в *Current Developments In Mathematics* (International Press, Boston, 1997).

[29] J. McKay, “Необходимые сведения о лунном свете монстра,” *Groups and Combinatorics — in Memory of M. Suzuki*, Adv. Studies in Pure Math. **32** (2001) 347-343.

[30] T. Gannon, “Лунный свет за пределами монстра: мост, соединяющий алгебру, модулярные формы и физику” (Cambridge University Press, 2006).

[31] G. Höhn, “Selbstduale Vertexoperatorsuperalgebren und das Babymonster,” Ph.D. thesis (Bonn 1995), Bonner Mathematische Schriften 286 (1996), 1-85, arXiv:0706.0236.

[32] G. Höhn, “Конформные проекты, основанные на алгебрах вершинных операторов,” arXiv:math/0701626.

[33] M. Jankiewicz and T. Kephart, “Модулярные инварианты и монстр Fischer-Griess,” arXiv:math-ph/0608001.

[34] R. Dijkgraaf, J. Maldacena, G. Moore и E. Verlinde, “A Black Hole Farey Tail,” hep-th/0005003..

[35] J. F. Duncan, “Супер-лунный свет для наибольшей спорадической группы Конвея,” arXiv:math/0502267.

[36] S. Deser, R. Jackiw, и S. Templeton, “Топологически массивные калибровочные теории,” Annals of Phys. **140** (1982) 372-411.

[37] Г. Мур и Н. Зайберг, “Приручая конформный зоопарк,” Phys. Lett. **B220** (1989) 422.

[38] Е. Виттен, “Действие $SL(2,\mathbb{Z})$ на трехмерных конформных теориях поля с абелевой симметрией,” hep-th/0307041.

[39] S. Carlip “Квантовая гравитация в 2+1 измерениях: случай замкнутой Вселенной,” Living Rev. Relat. **8** (2005) 1, gr-qc/0409039. .

[40] D. Friedan and S. Shenker, “Аналитическая геометрия двумерной конформной теории поля,” Nucl. Phys. **B281** (1987) 509..