Массивный гравитон с гамильтоновой точки зрения

В.О. Соловьев

Семинар ОТФ 27.10.2010

План

Аксиомы

1. Физика есть динамика в пространстве-времени
2. Пространство-время есть связное 4-мерное многообразие, на котором существует метрика с сигнатурой (-+++)
3. Законы физики не зависят от выбора системы координат
4. Одно из следующих утверждений:
    1. Метрика не зависит от динамики (параметризованная теория)
    2. Метрика является динамической переменной (ОТО)
    3. В теории две метрики: одна – фоновая, другая – динамическая (массивная гравитация)

Лагранжев или гамильтонов подход

- Лагранжев подход: решение уравнений сразу на всем пространстве-времени.
- Гамильтонов подход: эволюция “состояния”.

“Состояние” — полный набор динамических переменных “в данный момент времени”, т.е. на “начальной” пространственноподобной гиперповерхности.

Время

- Время как координата

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial x^0}$$

- Время как новый параметр

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial \tau}$$

- Время как векторное поле

$$\dot{A} = N^\alpha \nabla_\alpha A$$

Метод Кухаржа[2]

- Вводится вторая система координат в пространстве-времени τ, x^i, согласованная с выбором семейства гиперповерхностей $\tau = \mathrm{const}$.
- Предполагается, что имеет место взаимно-однозначное гладкое отображение

$$X^\alpha = e^\alpha(\tau, x^i),$$

где $e^\alpha(\tau, x^i)$ называются функциями вложения.
- Строится локальный базис $\{n^\alpha, e_i^\alpha\}$ с ортонормированным вектором нормали $n_\alpha e_i^\alpha = 0$, $n_\alpha n^\alpha = -1$, $e_i^\alpha = \partial e^\alpha / \partial x^i$.
- Производится разложение всех векторов и тензоров по этому базису:

$$A^\alpha = A^\perp n^\alpha + A^i e_i^\alpha,$$

$$A^\perp = -A^\alpha n_\alpha, \qquad A^i = A^\alpha e_\alpha^i.$$

- При разложении проекций ковариантных производных

$$A_{i;j} = A_{i|j} - A_{\perp}K_{ij}, \qquad A_{\perp;i} = A_{\perp|i} - A^{j}K_{ij},$$

появляется тензор внешней кривизны гиперповерхности

$$K_{ij} = -n_{\alpha;\beta}e_i^{\alpha}e_j^{\beta}.$$

- Определение производной по времени:

$$\dot{A}_{\alpha} = N^{\beta}A_{\alpha;\beta}, \qquad N^{\alpha} = \frac{\partial e^{\alpha}}{\partial \tau} = Nn^{\alpha} + N^{i}e_i^{\alpha},$$

например, для индуцированной метрики $\gamma_{ij} = g_{\alpha\beta}e_i^{\alpha}e_j^{\beta}$ получаем

$$\dot{\gamma}_{ij} = N_{i|j} + N_{j|i} - 2NK_{ij}.$$

- Разложение метрики пространства-времени $g^{\mu\nu} = -n^{\mu}n^{\nu} + e_i^{\mu}e_j^{\nu}\gamma^{ij}$.

Пример параметризованной теории:
скалярное поле в пространстве-времени Минковского

Действие имеет вид:

$$S = \int d^4X \mathcal{L} = -\int d^4X \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + U(\phi) \right)$$

Переход к 3+1-обозначениям:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} N \sqrt{\gamma} \left(\phi_{,\perp} \phi_{,\perp} - \gamma^{ij} \phi_{,i} \phi_{,j} - 2U(\phi) \right),$$

причем

$$\dot{\phi} = N^\alpha \phi_{,\alpha} = -N \phi_{,\perp} + N^i \phi_{,i}.$$

Импульс определяется обычным образом

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\sqrt{\gamma} \phi_{,\perp} = \frac{\sqrt{\gamma}}{N} \left(\dot{\phi} - N^i \phi_{,i} \right),$$

а скорость выражается через него по формуле

$$\dot{\phi} = \frac{N}{\sqrt{\gamma}}\pi_\phi + N^i\phi_{,i}.$$

После преобразования Лежандра действие скалярного поля принимает вид

$$S = \int d\tau d^3x \left(\pi_\phi\dot{\phi} - N\mathcal{H} - N^i\mathcal{H}_i\right)$$

где

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{\pi_\phi^2}{2} + \frac{1}{2}\gamma\gamma^{ij}\partial_i\phi\partial_j\phi + \gamma U(\phi)\right), \quad \mathcal{H}_i = \pi_\phi\phi_{,i}.$$

- Инвариантность относительно выбора системы координат X^α обеспечена, т.к. эта система полностью исчезла из формул.
- Заданные почти произвольно функции вложения $e^\alpha(\tau, x^i)$ вместе с фоновой метрикой однозначно определяют функции смещения и сдвига $N(\tau, x^i)$, $N^i(\tau, x^i)$, индуцированную метрику на гиперповерхностях (метрику пространства) и поле единичных нормалей к гиперповерхностям.
- Задача Коши решается для скалярного поля и сопряженного импульса, начальные данные для них произвольны.
- Такова картина и для других теорий поля, конечно, при наличии калибровочной инвариантности могут появляться связи.

“Квантование на искривленных поверхностях”[1]

Если, следуя Дираку, придать функциям вложения статус динамических переменных, то определяя сопряженные им импульсы

$$p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{e}^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^\alpha}$$

мы придем к связям первого рода

$$R \equiv p + \mathcal{H} = 0, \qquad R_i \equiv p_i + \mathcal{H}_i = 0,$$

для которых имеет место алгебра

$$\begin{aligned}
\{R_i(x), R_j(y)\} &= R_i(y)\delta_{,j}(x-y) + R_j(x)\delta_{,i}(x-y),\\
\{R_i(x), R(y)\} &= R(x)\delta_{,i}(x-y),\\
\{R(x), R(y)\} &= \left[\gamma^{ij}(x)R_j(x) + \gamma^{ij}(y)R_j(y)\right]\delta_{,i}(x-y).
\end{aligned}$$

Гамильтониан тогда содержит произвольные функции и является линейной комбинацией связей

$$H = \int d^3x \left(\lambda R + \lambda^i R_i\right).$$

Функции вложения являются теперь динамическими переменными, их эволюция определяется лагранжевыми множителями λ^A, есть только начальные данные для них: $e^\alpha(0, x^i)$.

Мы можем перейти на ручное управление эволюцией, деформируя гиперповерхность согласно своим вкусам. Параметр эволюции необязательно время.

Общая теория относительности

$$S = \int d^4X \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

Снова вводим вторую систему координат τ, x^i через функции вложения $X^\alpha = e^\alpha(\tau, x^i)$. Метрика $g_{\mu\nu}$ при 3+1-разложении является и инструментом для построения базиса $\{n^\alpha, e_i^\alpha\}$, и динамической переменной, проекции которой должны вычисляться с помощью этого базиса. Четыре из этих проекций оказываются поэтому тривиальными

$$g_{\perp\perp} = -1, \qquad g_{\perp i} = 0,$$

нетривиальны только остальные шесть, ими оказываются компоненты индуцированной метрики $\gamma_{ij} = g_{\alpha\beta} e_i^\alpha e_j^\beta$.

Проекции тензоров Римана и Риччи выражаются через внешнюю кривизну гиперповерхности

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(N_{i|j} + N_{j|i} - \dot{\gamma}_{ij}\right),$$

функции смещения и сдвига N, N^i, а также через их производные.
В итоге, плотность лагранжиана состоит из выражения

$$N\sqrt{\gamma}\left(\tilde{R} - K^2 + \mathrm{Sp}K^2\right),$$

где $\tilde{R}$ – скалярная кривизна гиперповерхности, построенная с помощью индуцированной метрики γ_{ij}, $\mathrm{Sp}K^2 = K_{ij}K_{kl}\gamma^{ik}\gamma^{jl}$, и поверхностных членов вида

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(-2\sqrt{\gamma}K) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(2\sqrt{\gamma}N^iK - 2\sqrt{\gamma N^{|i}}\right)$$

Предполагая, что поверхностные члены несущественны, заключаем, что скорости входят только для индуцированной метрики, но не для $N^A = N, N^i$, поэтому имеются первичные связи

$$\pi_A = 0.$$

Скобки Пуассона канонические

$$\{F, G\} = \int \left(\frac{\delta F}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} + \frac{\delta F}{\delta N^A} \frac{\delta G}{\delta \pi_A} - (F \leftrightarrow G) \right) d^3x,$$

гамильтониан принимает вид

$$H = \int \left(N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i + \lambda^A \pi_A \right) d^3x.$$

Требование сохранения первичных связей

$$\dot{\pi}_A = \{\pi_A, H\} = 0$$

дает вторичные связи

$$\mathcal{H} = -\sqrt{\gamma}\tilde{R} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2\right) = 0, \qquad \mathcal{H}_i = -2\pi^j_{i|j} = 0,$$

которые оказываются в инволюции, причем их алгебра совпадает с алгеброй связей параметризованных теорий поля

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(y)\} &= \mathcal{H}_i(y)\delta_{,j}(x-y) + \mathcal{H}_j(x)\delta_{,i}(x-y), \\ \{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(y)\} &= \mathcal{H}(x)\delta_{,i}(x-y), \\ \{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)\} &= \left[\gamma^{ij}(x)\mathcal{H}_j(x) + \gamma^{ij}(y)\mathcal{H}_j(y)\right]\delta_{,i}(x-y). \end{aligned}$$

Считать ли N, N^i переменными или лагранжевыми множителями? Последнее проще. Это равносильно калибровкам и переходу к скобкам Дирака.

Число степеней свободы $=$(число переменных-число связей 1 рода$*2)/2 = (12 - 4 * 2)/2 = 2$.

γ_{ij}, π^{ij} – канонические переменные,
$\Phi_A = \mathcal{H}, \mathcal{H}_i$ – связи 1-го рода,
$N^A = N, N^i$ – лагранжевы множители.

Проблема нулевого гамильтониана

Традиционные калибровки $\Psi_B(\gamma_{ij}, \pi^{ij}) = 0$ приводят к "замороженному формализму"

$$\dot{F} = \{F, H\}_D = 0,$$

т.к. $H = 0$ на поверхности связей. Скобки Дирака даются формулой

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \Omega_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\Omega_\beta, G\},$$

где

$$\Omega_\alpha = \Phi_A, \Psi_B, \qquad C^{\alpha\beta}\{\Omega_\beta, \Omega_\gamma\} = \delta^\alpha_\gamma,$$

Первый выход:

калибровки, явно зависящие от времени (например, $\pi = \tau$)

$$\Psi_B(\tau, \gamma_{ij}, \pi^{ij}) = 0, \quad \dot{\Psi}_B = \frac{\partial \Psi_B}{\partial \tau} + \{\Psi_B, H\} = 0,$$

позволяют получить ненулевые значения для лагранжевых множителей $N^A = N, N^i$.

Второй выход:

поверхностные интегралы в гамильтониане ("дивергенции перестают быть дивергенциями")

$$H = \int \left(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i\right) d^3x + \oint$$

Нужны хорошие граничные условия.

Требования к граничным условиям:

- сходимость всех интегралов
- учет всех ненулевых вкладов при интегрировании по частям
- сохранение алгебры скобок Пуассона
- сохранение гамильтоновых уравнений
- инвариантность граничных условий

Варианты постановки задачи Коши (без материи):

1. Начальные данные $\gamma_{ij}(0, x^i)$, $\pi^{ij}(0, x^i)$ должны удовлетворять уравнениям связи
$$-\sqrt{\gamma}\tilde{R} - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2\right) = 0, \qquad -2\pi^j_{i|j} = 0,$$
лагранжевы множители $N(\tau, x^k)$, $N^i(\tau, x^i)$ – произвольные функции времени и пространственных координат.
2. Найти такие переменные, которые могут быть заданы свободно (уравнения связи для них выполняются автоматически).
3. Начальные данные в исходной системе координат $g_{\mu\nu}(X^\alpha)$, $g_{\mu\nu,\alpha}(X^\alpha)$ на заданной гиперповерхности $X^\alpha = e^\alpha(0, x^i)$. Требуется вычислить метрику $g_{\mu\nu}(X^\alpha)$ в исходной системе координат в 4-мерной области, ограниченной гиперповерхностями $X^\alpha = e^\alpha(0, x^i)$ и $X^\alpha = e^\alpha(\tau, x^i)$.

Альтернативные пути построения гамильтонова формализма:

- метод Остроградского (не отбрасывая высших производных)
- метод Палатини (равноправие метрики и связности)
- метод ADM (нековариантное разбиение метрики)
- тетрадный подход
- переменные Аштекара
- ....

Введение массы гравитона

Космологический член $\Lambda\sqrt{-g}$
Какие массовые члены можно придумать?
$g_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$, $(g_{\mu\nu}h^{\mu\nu})^2$, $g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}h^{\mu\nu}h^{\alpha\beta}$,...
Инвариантность требует второго симметричного тензора (второй метрики)
Рождение биметризма: N. Rosen (1940) [6]
Плотность лагранжиана в РТГ [7]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}\sqrt{-g}R - \frac{m^2}{16\pi G}\left(\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-h}\right) = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2.$$

Обозначения

$h_{\mu\nu}$ – плоская фоновая (нединамическая) метрика
$g_{\mu\nu}$ – (псевдо)риманова (динамическая) метрика

$$X^\alpha = e^\alpha(\tau, x^i)$$

$$N^\alpha = \frac{\partial e^\alpha}{\partial \tau}$$

– векторное поле, которое должно быть времениподобным в обеих метриках

$$g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta < 0, \quad h_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta < 0.$$

$$\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j, \quad \eta_{ij} = h_{\mu\nu} e^\mu_i e^\nu_j.$$

$$\gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j > 0, \quad \eta_{ij}(x^k) dx^i dx^j > 0,$$

В общем случае, η_{ij} – не плоская метрика, в отличие от to $h_{\mu\nu}$.

Возникают две разных нормали, n^α и $\bar{n}^\alpha$

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} n^\alpha e_i^\beta &= 0 \quad h_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1 \\ g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha e_i^\beta &= 0 \qquad g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta = -1 \end{aligned}$$

и два базиса, которые связаны соотношениями:

$$\bar{n}^\alpha = \sqrt{-g^{\perp\perp}} n^\alpha - \frac{g^{\perp i}}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}} e_i^\alpha .$$

Величины с чертой будут связаны с $g_{\mu\nu}$. Вместо $g^{\mu\nu}$ удобно использовать тензор

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-h}} g^{\mu\nu} .$$

Два разложения поля времени и метрики:

$$
\begin{aligned}
N^\alpha &= N n^\alpha + N^i e_i^\alpha = \bar{N}\bar{n}^\alpha + \bar{N}^i e_i^\alpha ,\\
g^{\mu\nu} &= g^{\perp\perp} n^\mu n^\nu + g^{\perp j} n^\mu e_j^\nu + g^{i\perp} e_i^\mu n^\nu + g^{ij} e_i^\mu e_j^\nu = \\
&= -\bar{n}^\mu \bar{n}^\nu + \gamma^{ij} e_i^\mu e_j^\nu ,\\
f^{\mu\nu} &= f^{\perp\perp} n^\mu n^\nu + f^{\perp j} n^\mu e_j^\nu + f^{i\perp} e_i^\mu n^\nu + f^{ij} e_i^\mu e_j^\nu ,
\end{aligned}
$$

где

$$
N = -n_\mu N^\mu ,\;\; N^i = e^i_\mu N^\mu ,\;\; \bar{N} = -\bar{n}_\mu N^\mu ,\;\; \bar{N}^i = \bar{e}^i_\mu N^\mu ,
$$

$$
g^{\perp\perp} = n_\mu n_\nu g^{\mu\nu} ,\;\; g^{\perp j} = g^{j\perp} = -n_\mu e^j_\nu g^{\mu\nu} ,\;\; g^{ij} = e^i_\mu e^j_\nu g^{\mu\nu} .
$$

Связь между функциями смещения и сдвига:

$$
\bar{N} = -\frac{1}{f^{\perp\perp}} \sqrt{\frac{\gamma}{\eta}} N , \quad \bar{N}^i = N^i - \frac{f^{\perp i}}{f^{\perp\perp}} N ,
$$

Для преобразования плотности лагранжиана необходимо выразить через 3+1-переменные два слагаемых $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$. Первое не содержит ни массы гравитона, ни плоской метрики. Поэтому для $\mathcal{L}_1$ можно воспользоваться преобразованиями, уже проделанными в ОТО, после чего, *с точностью до поверхностных членов*, оно оказывается равным

$$-\frac{\bar{N}\sqrt{\gamma}}{\kappa}(\tilde{R}-\bar{K}^2+\mathrm{Sp}\bar{K}^2)=-\frac{N}{\kappa}\frac{\gamma}{f^{\perp\perp}\sqrt{\eta}}(\tilde{R}-\bar{K}^2+\mathrm{Sp}\bar{K}^2),$$

где $\kappa=16\pi G$, $\tilde{R}$ – скалярная кривизна гиперповерхности, построенная с помощью метрики γ_{ij}, $\mathrm{Sp}\bar{K}^2=\bar{K}_{ij}\bar{K}_{kl}\gamma^{ik}\gamma^{jl}$,

$\bar{K}_{ij}(x^i, t)$ – вторая фундаментальная форма (внешняя кривизна) гиперповерхности в римановой геометрии, заданной метрикой $g_{\mu\nu}$,

$$\bar{K}_{ij} = \frac{1}{2\bar{N}}\left(\bar{N}_{i|j} + \bar{N}_{j|i} - \dot{\gamma}_{ij}.\right)$$

Вертикальная черта обозначает ковариантную производную в римановой геометрии 3-мерного пространства, определяемую метрикой γ_{ij}.

Второе слагаемое $\mathcal{L}_2$, с учетом формулы

$$f^{ij} = \frac{1}{f^{\perp\perp}} \left(f^{\perp i} f^{\perp j} - \frac{\gamma \gamma^{ij}}{\eta} \right),$$

и после подстановки в него 3+1-разложений, принимает вид

$$-N\sqrt{\eta}\frac{m^2}{\kappa}\left[-1 - \frac{f^{\perp\perp}}{2} + \frac{f^{\perp i} f^{\perp j} \eta_{ij}}{2 f^{\perp\perp}} - \frac{1}{f^{\perp\perp}} \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{1}{2} \eta_{ij} \gamma^{ij} - 1 \right) \right],$$

как видно, оно не содержит скоростей и поэтому не влияет на определение импульсов.

Поверхностные вклады в лагранжеву плотность (полные производные по времени и пространственные дивергенции) не влияют на симплектическую структуру, и следовательно, на скобки Пуассона. Отбрасывая их, приходим к действию гравитационного поля вида

$$
\begin{aligned}
S \;&=\; \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{R^3} d^3x \left(-\frac{N}{\kappa}\frac{\gamma}{f^{\perp\perp}\sqrt{\eta}}(\tilde{R} - \bar{K}^2 + \mathrm{Sp}\bar{K}^2) \right. \\
&- \left. N\sqrt{\eta}\frac{m^2}{16\pi G}\left[-1 - \frac{f^{\perp\perp}}{2} + \frac{f^{\perp i}f^{\perp j}\eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}} - \frac{1}{f^{\perp\perp}}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1\right)\right]\right) \\
.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Независимыми переменными, подлежащими варьированию, считаем $\gamma_{ij}(\tau, x^k)$, $f^{\perp\perp}(\tau, x^k)$, $f^{\perp i}(\tau, x^k)$. Известными и поэтому не подлежащими варьированию величинами следует считать плоскую метрику пространства-времени $h_{\mu\nu}(X^\alpha)$ и функции, задающие однопараметрическое семейство пространственноподобных гиперповерхностей $e^\alpha(\tau, x^i)$, через них в свою очередь выражаются векторы базиса $n^\alpha(\tau, x^i), e_i^\alpha(\tau, x^i)$ и вектор $N^\alpha(\tau, x^i)$.

Исходя из действия (1) для сопряженных импульсов находим соотношения

$$
\begin{aligned}
\pi_\perp &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}^{\perp\perp}} = 0, \\
\pi_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}^{\perp i}} = 0, \\
\pi_{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{K}_{ij}} \frac{\partial \bar{K}_{ij}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}} = -\frac{\sqrt{\gamma}}{\kappa}(\bar{K}^{ij} - \gamma^{ij}\bar{K}),
\end{aligned}
$$

из которых видно, что два первых соотношения являются первичными связями в терминологии Дирака и должны быть добавлены к гамильтониану теории с произвольными множителями Лагранжа.

Таким образом, получаем

$$\mathrm{H} = \int\limits_{R^3} d^3x \left(\pi^{ij}\dot{\gamma}_{ij} - \mathcal{L} + \lambda^{\perp}\pi_{\perp} + \lambda^{i}\pi_{i}\right),$$

где необходимо выразить скорости через импульсы по формуле

$$\dot{\gamma}_{ij} = \bar{N}_{i|j} + \bar{N}_{j_i} + \frac{2\kappa\bar{N}}{\sqrt{\gamma}}(\pi_{ij} - \gamma_{ij}\frac{\pi}{2}).$$

После этой процедуры гамильтониан гравитационного поля, с точностью до поверхностных членов, принимает вид

$$\mathrm{H} = \int\limits_{R^3} d^3x \left(N\mathcal{H} + N^{i}\mathcal{H}_{i} + \lambda^{\perp}\pi_{\perp} + \lambda^{i}\pi_{i}\right),$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\frac{1}{f^{\perp\perp}}\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}\bar{\mathcal{H}} - \frac{f^{\perp i}}{f^{\perp\perp}}\bar{\mathcal{H}}_i \\
&+ \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\left[-1 - \frac{f^{\perp\perp}}{2} + \frac{f^{\perp i}f^{\perp j}\eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}} - \frac{1}{f^{\perp\perp}}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1\right)\right], \\
\mathcal{H}_i &= \bar{\mathcal{H}}_i = -2\pi^j_{i|j}, \\
\bar{\mathcal{H}} &= -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\frac{1}{\kappa}\gamma\tilde{R} + \kappa\left(\frac{\pi^2}{2} - \mathrm{Sp}\pi^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

Канонические скобки Пуассона

$$\{F, G\} = \int\limits_{R^3} d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} + \frac{\delta F}{\delta f^{\perp\perp}} \frac{\delta G}{\delta \pi_\perp} + \frac{\delta F}{\delta f^{\perp i}} \frac{\delta G}{\delta \pi_i} - (F \leftrightarrow G) \right]$$

позволяют записать гамильтоновы уравнения в привычном виде

$$\dot{\gamma}_{ij} = \{\gamma_{ij}, \mathrm{H}\}, \quad \dot{\pi}^{ij} = \{\pi^{ij}, \mathrm{H}\},$$

$$\dot{f}^{\perp\perp} = \{f^{\perp\perp}, \mathrm{H}\}, \quad \dot{\pi}_\perp = \{\pi_\perp, \mathrm{H}\},$$

$$\dot{f}^{\perp i} = \{f^{\perp i}, \mathrm{H}\}, \quad \dot{\pi}_i = \{\pi_i, \mathrm{H}\}.$$

Далее необходимо убедиться, что первичные связи согласованы с уравнениями движения, для этого следует обеспечить обращение в нуль производных по времени $\dot{\pi}_\perp$ и $\dot{\pi}_i$. Поскольку сопряженные переменные $f^{\perp\perp}$ и $f^{\perp i}$ входят в гамильтониан алгебраически, мы получаем вторичные связи в виде алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f^{\perp\perp}} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial f^{\perp i}} = 0,$$

которые элементарно разрешаются и дают

$$f^{\perp i} = \frac{\kappa}{m^2\sqrt{\eta}} \eta^{ij} \bar{\mathcal{H}}_j,$$

$$f^{\perp\perp} = -\frac{\kappa}{m^2\sqrt{\eta}} \sqrt{\eta^{ij}\bar{\mathcal{H}}_i\bar{\mathcal{H}}_j + 2\frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\left[\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}\bar{\mathcal{H}} + \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa}\frac{\gamma}{\eta}\left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1\right)\right]}$$

Из разрешенного вида вторичных связей легко увидеть, что их скобки Пуассона с первичными связями отличны от нуля, т.е. все связи являются связями второго рода и могут быть полностью исключены введением скобок Дирака. В данном случае скобки Дирака получаются из скобок Пуассона простым исключением членов с переменными $(f^{\perp\perp}, \pi_\perp)$ и $(f^{\perp i}, \pi_i)$

$$\{F, G\}_D = \int\limits_{R^3} d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} - \frac{\delta F}{\delta \pi^{ij}} \frac{\delta G}{\delta \gamma_{ij}} \right],$$

Подставляя решения уравнений связи в гамильтониан получаем

$$\mathrm{H} = \int\limits_{R^3} \left[N \left(\sqrt{\eta^{ij} \bar{\mathcal{H}}_i \bar{\mathcal{H}}_j + 2\frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa} \left[\sqrt{\frac{\gamma}{\eta}} \bar{\mathcal{H}} + \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa} \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{1}{2} \eta_{ij} \gamma^{ij} - 1 \right) \right]} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa} \right) + N^i \bar{\mathcal{H}}_i \right].$$

Мы пришли к гамильтониану, который зависит от канонических переменных γ_{ij}, π^{ij}, а также содержит зависимость от известной заранее (определяемой из фиксированной метрики пространства-времени и функций, определяющих гиперповерхности) метрики η_{ij}. Входящая константа обеспечивает нормировку энергии вакуума: если риманова метрика совпадает с плоской $g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, то при любом задании гиперповерхностей получаем $\mathrm{H} = 0$.

Группа Пуанкаре в РТГ

Следуем подходу Редже и Тейтельбойма [3]. Среди всех вариантов гамильтоновой эволюции, разнообразие которых проистекает из произвола в выборе функций $N(x)$, $N^i(x)$ в гамильтониане, содержатся преобразования, сохраняющие метрику Минковского. Выбирая в качестве гиперповерхностей гиперплоскости и выбирая на них декартовы координаты, мы получаем на гиперплоскостях метрику η_{ij}, индуцированную метрикой Минковского, в простейшем виде $\eta_{ij} = \delta_{ij}$, а функции преобразований в виде

$$N = A_k x^k + a, \quad N^i = A_{ik} x^k + a^i,$$

где

$$A_{ik} = -A_{ki}.$$

Тогда гамильтониан, ввиду его линейности по функциям $N(x)$, $N^i(x)$, примет вид

$$H = P^0 a - P^i a^i + M^k A_k + \frac{1}{2} M^{ik} A_{ik},$$

где

$$\begin{aligned}
P^0 &= -\frac{m^2}{\kappa} \int \left(1 + f^{\perp\perp}\right) d^3x, \\
P_i &= -\frac{m^2}{\kappa} \int f^{\perp i} d^3x \equiv -\int \mathcal{H}_i d^3x, \\
M^{ik} &= -\frac{m^2}{\kappa} \int \left(x^i f^{\perp k} - x^k f^{\perp i}\right) d^3x \equiv \int \left(x^k \mathcal{H}_i - x^i \mathcal{H}_k\right) d^3x, \\
M^k &= -\frac{m^2}{\kappa} \int x^k (1 + f^{\perp\perp}) d^3x.
\end{aligned}$$

Однако прежде, чем сводить гамильтониан к такому упрощенному виду, полезно получить алгебру скобок Дирака для общих гамильтонианов. Пусть

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \int\limits_{R^3} d^3x \left(N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i \right) \\
&= \int\limits_{R^3} d^3x \left(\bar{N}\bar{\mathcal{H}} + \bar{N}^i \bar{\mathcal{H}}_i \right. \\
&+ \left. \frac{m^2\sqrt{\eta}}{\kappa} N \left[-1 - \frac{f^{\perp\perp}}{2} + \frac{f^{\perp i} f^{\perp j} \eta_{ij}}{2f^{\perp\perp}} - \frac{1}{f^{\perp\perp}} \frac{\gamma}{\eta} \left(\frac{1}{2}\eta_{ij}\gamma^{ij} - 1 \right) \right] \right),
\end{aligned}
$$

Результаты вычислений можно представить либо в виде, удобном для сравнения с аналогичной формулой ОТО:

$$
\begin{aligned}
\{H(\alpha,\alpha^i),H(\beta,\beta^j)\} &= \int d^3x\Big[\bar\lambda\bar{\mathcal{H}}+\bar\lambda^k\bar{\mathcal{H}}_k \\
&+ (\bar\alpha\bar\beta^k_{|k}-\bar\beta\bar\alpha^k_{|k})\bar{\mathcal{H}} \\
&- \frac{m^2}{\kappa}\sqrt{\gamma}\gamma_{k\ell}(\bar\alpha\bar\beta^{k|\ell}-\bar\beta\bar\alpha^{k|\ell})(2-\eta_{mn}\gamma^{mn})) \\
&- \frac{m^2}{\kappa}\sqrt{\gamma}\eta_{k\ell}(\bar\alpha\bar\beta^{k|\ell}-\bar\beta\bar\alpha^{k|\ell})\Big], \\
\bar\lambda &= \bar\alpha^i\bar\beta_{,i}-\bar\beta^i\bar\alpha_{,i}, \\
\bar\lambda^k &= \gamma^{k\ell}(\bar\alpha\bar\beta_{,\ell}-\bar\beta\bar\alpha_{,\ell})+\bar\alpha^\ell\bar\beta^k_{,\ell}-\bar\beta^\ell\bar\alpha^k_{,\ell},
\end{aligned}
$$

либо в виде, соответствующем теориям поля на фоне фиксированной метрики:

$$
\begin{aligned}
\{H(\alpha,\alpha^i),H(\beta,\beta^j)\} &= H(\lambda,\lambda^k) \\
&+ \int \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\eta_{ij}}\left(\alpha\mathcal{L}_{\vec\beta}\eta_{ij}-\beta\mathcal{L}_{\vec\alpha}\eta_{ij}\right)d^3x, \\
\lambda &= \alpha^i\beta_{,i}-\beta^i\alpha_{,i}, \\
\lambda^k &= \eta^{k\ell}(\alpha\beta_{,\ell}-\beta\alpha_{,\ell})+\alpha^\ell\beta^k_{,\ell}-\beta^\ell\alpha^k_{,\ell},
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{L}_{\vec\alpha}\eta_{ij}=-\alpha_{i|j}-\alpha_{j|i}$ – производная Ли от метрики η_{ij} по направлению векторного поля $\vec\alpha$.

Отличия от ОТО проявляются как в членах, пропорциональных квадрату массы гравитона, так и в коэффициенте при $\bar{\mathcal{H}}$. Последнее связано с тем, что коэффициент при $\bar{\mathcal{H}}$, т.е. функция $\bar{N}$, пропорционален $\sqrt{\gamma}$. Найденные соотношения, таким образом, не представляют собой известную алгебру деформаций гиперповерхности, т.к. функции $\bar{N}$, $\bar{N}^i$ не являются ее параметрами.

Подстановка вместо произвольных функций α, α^i, β, β^j выражений, отвечающих преобразованиям Пуанкаре, приводит к соотношениям алгебры Пуанкаре для скобок Дирака:

$$
\begin{aligned}
\{P^0, P_i\}_D &= 0, \quad \{P_i, P_j\}_D = 0, \\
\{P^0, M^{ik}\}_D &= 0, \quad \{P_i, M^{jk}\}_D = \delta_{ik} P_j - \delta_{ij} P_k, \\
\{M^{ij}, M^{k\ell}\}_D &= \delta_{ik} M^{j\ell} - \delta_{i\ell} M^{jk} + \delta_{j\ell} M^{ik} - \delta_{jk} M^{i\ell}, \\
\{P^0, M^i\}_D &= -P^i, \quad \{P_i, M^j\}_D = -\delta_{ij}(P^0 - c^0), \\
\{M^k, M^{ij}\}_D &= \delta_{kj}(M^i - c^i) - \delta_{ki}(M^j - c^j), \quad \{M^i, M^j\}_D = -M^{ij}.
\end{aligned}
$$

Аддитивные вклады $c^0 = m^2/\kappa \int d^3x$ и $c^i = m^2/\kappa \int x^i d^3x$ в P_0 и M^i, выражаюшиеся расходящимися интегралами по всему пространству, играют роль центральных зарядов в канонической реализации алгебры Пуанкаре и отвечают классической перенормировке энергии вакуума.

Заключение

1. Гамильтонов формализм работает и позволяет по новому взглянуть на проблемы массивной гравитации
2. Неизбежное несовпадение причинных структур в двух разных метриках оставляет открытые вопросы
3. Неотрицательность или ограниченность снизу полной плотности энергии гравитации и материи неразрывно связана с причинной структурой
4. Можно ли избежать подводных камней ограничив выбор произвольных функций при задании эволюции?

- Dirac P.A.M. Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva Univ., N.Y., 1964. (Имеется перевод: П.А.М. Дирак. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968)
- Kuchař K. J. Math. Phys. v.17 (1977) 777-791; 792-800; 801-820; 18 (1978) 1589-1597.
- Regge T., Teitelboim C. Ann. of Phys. v.88 (1974) 286-318.
- Freund P.G.O., Maheahwari A., Schonberg E. Finite-range gravitation. Astroph. J. 157 (1969) 857-867.
- Boulware D.G., Deser S. Can gravitation have a finite range? Phys. Rev. D6 (1972) 3368-3382.
- Rosen N. General Relativity and flat space. I,II. Phys. Rev. v.57 (1940) 147-150; 150-153.
- Логунов А.А. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 2006.

- Питтс Дж.Б., Шив У.К. Массивная гравитация с универсальным взаимодействием. ТМФ т. 151 (2007) 311-336.
- Zinoviev Yu.M. On massive spin 2 interactions. Nucl. Phys. B770 (2007) 83-106.
- Соловьев В.О. Канонический формализм для релятивистской теории гравитации. Проблемы физики высоких энергий и теории поля: Труды IX Семинара, Протвино, 7-13 июля 1986 г. М.: Наука, 1987, сс. 24-33.
- Соловьев В.О. Гамильтонов подход в релятивистской теории гравитации и в общей теории относительности. ЭЧАЯ т.19 (1988) 1115-1153.
- Соловьев В.О., Чичикина М.В. Канонический формализм релятивистской теории гравитации. arXiv:0812.4616.

Соловьев В.О., Чичикина М.В. Алгебра Пуанкаре в гамильтоновом формализме релятивистской теории гравитации. arxv:1001.2099.