Биградитация в гамильтоновом формализме

В.О. Соловьёв

Семинар ОТФ
11 декабря 2012

Bigravity in Kuchar's Hamiltonian formalism. 1. The General Case
Vladimir O. Soloviev and Margarita V. Tchichikina
arXiv:1211.6530

План

История и терминология

- Биметрические теории, Rosen (1940)
- Массивная гравитация, Логунов, Мествиришвили (1984)
- Бигравитация, Damour, Kogan (2002)
- dRGT, de Rham, Gabadadze, Tolley (2011)
- АДМ формализм, Arnowitt, Deser, Misner (1962)
- Формализм Кухаржа, Kuchař (1977)

Бигравитация

Лагранжиан бигравитации

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(f)} + \mathcal{L}^{(g)} - \sqrt{-f}\, U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

состоит из двух почти независимых частей,

$$\mathcal{L}^{(f)} = \frac{1}{16\pi G^{(f)}} \sqrt{-f}\, f^{\mu\nu} R^{(f)}_{\mu\nu} + \mathcal{L}^{(f)}_M(\psi^A, f_{\mu\nu}),$$

$$\mathcal{L}^{(g)} = \frac{1}{16\pi G^{(g)}} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R^{(g)}_{\mu\nu} + \mathcal{L}^{(g)}_M(\phi^A, g_{\mu\nu}),$$

и потенциала их взаимодействия

$$\sqrt{-f}\, U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}) \qquad \text{or} \quad \sqrt[4]{fg}\, V(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

Потенциал de Rham, Gabadadze, Tolley

Модная сейчас теория с двумя метриками использует потенциал взаимодействия между ними, содержащий матричный квадратный корень из тензора свёртки метрик, т.е. если

$$Y^{\alpha}_{\beta} = g^{\alpha\mu} f_{\mu\beta},$$

то

$$X = \sqrt{Y}, \qquad Y^{\alpha}_{\beta} = X^{\alpha}_{\mu} X^{\mu}_{\beta}.$$

Потенциал образуется как линейная комбинация коэффициентов характеристического многочлена матрицы X^{α}_{β}

$$P(\lambda) = Det(X - \lambda I),$$

т.е. как линейная комбинация симметричных многочленов от собственных значений этой матрицы

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4,$$

или, через следы полиномов от матрицы,

$$SpX,$$

$$\frac{1}{2}\left((SpX)^2 - SpX^2\right),$$

$$\frac{1}{6}\left((SpX)^3 - 3SpXSpX^2 + 2SpX^3\right),$$

$$\frac{1}{24}\left((SpX)^4 - 6(SpX)^2SpX^2 + 3(SpX^2)^2 + 8SpXSpX^3 - 6SpX^4\right).$$

Постановка задачи

Непосредственные вычисления с эти потенциалом затруднены. Поэтому тот анализ гамильтонова формализма, который уже сделан в ряде работ, представляется не вполне убедительным. Наша цель – исходя из потенциала общего вида, вывести те его свойства, которые необходимы для реализации заявленной dRGT программы – построения теории массивной гравитации с 5 степенями свободы (без духов).

Обозначения

Пусть $f_{\mu\nu}$ – первая (поначалу динамическая, потом, м.б. фоновая) метрика, а $g_{\mu\nu}$ – вторая (всегда динамическая) метрика, семейство гиперповерхностей задаётся уравнениями

$$X^\alpha = e^\alpha(\tau, x^i),$$

$$N^\alpha = \frac{\partial e^\alpha}{\partial \tau},$$

– векторное поле, которое должно быть времениподобным в обеих метриках,

$$g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta < 0, \quad f_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta < 0;$$

индуцированными на гиперповерхности метриками будут

$$\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} e^{\mu}_{i} e^{\nu}_{j}, \quad \eta_{ij} = f_{\mu\nu} e^{\mu}_{i} e^{\nu}_{j},$$

$$\gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j > 0, \quad \eta_{ij}(x^k) dx^i dx^j > 0.$$

Возникают две разных нормали к гиперповерхности, n^α и $\bar{n}^\alpha$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} n^\alpha e^{\beta}_{i} &= 0 \quad f_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = -1 \\ g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha e^{\beta}_{i} &= 0 \quad g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta = -1 \end{aligned}$$

и два базиса $(n^\alpha, e^{\alpha}_{i})$, $(\bar{n}^\alpha, e^{\alpha}_{i})$, которые связаны соотношением

$$\bar{n}^\alpha = \sqrt{-g^{\perp\perp}} n^\alpha - \frac{g^{\perp i}}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}} e^{\alpha}_{i},$$

Два разложения (для каждого из базисов) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
N^\alpha &= N n^\alpha + N^i e_i^\alpha = \bar{N}\bar{n}^\alpha + \bar{N}^i e_i^\alpha, \\
g^{\mu\nu} &= g^{\perp\perp} n^\mu n^\nu + g^{\perp j} n^\mu e_j^\nu + g^{i\perp} e_i^\mu n^\nu + g^{ij} e_i^\mu e_j^\nu = \\
&= -\bar{n}^\mu \bar{n}^\nu + \gamma^{ij} e_i^\mu e_j^\nu,
\end{aligned}
$$

где

$$
N = -n_\mu N^\mu, \;\; N^i = e^i_\mu N^\mu, \;\; \bar{N} = -\bar{n}_\mu N^\mu, \;\; \bar{N}^i = \bar{e}^i_\mu N^\mu,
$$

$$
g^{\perp\perp} = n_\mu n_\nu g^{\mu\nu}, \;\; g^{\perp j} = g^{j\perp} = -n_\mu e^j_\nu g^{\mu\nu}, \;\; g^{ij} = e^i_\mu e^j_\nu g^{\mu\nu}.
$$

Связь между разложениями:

$$
\bar{N} = \frac{N}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}}, \qquad \bar{N}^i = N^i - \frac{g^{\perp i}}{g^{\perp\perp}} N,
$$

Удобно для дальнейшего ввести новые переменные

$$u = \frac{1}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}}, \qquad u^i = -\frac{g^{\perp i}}{g^{\perp\perp}},$$

которые имеют простой геометрический смысл: u является величиной, обратной к норме (в динамической метрике) вектора n^α, построенного как единичная нормаль к гиперповерхности состояния в фоновой метрике, а u^i есть проекции (в динамической метрике) векторов координатного базиса гиперповерхности на направление того же вектора единичной нормали

$$u = \frac{1}{\sqrt{|g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu|}}, \qquad u^i = \frac{g^{\mu\nu} n_\mu e^i_\nu}{\sqrt{|g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu|}}.$$

Тогда

$$\bar{N} = uN, \qquad \bar{N}^i = N^i + u^i N.$$

Построение гамильтониана

Для преобразования плотности лагранжиана необходимо преобразовать три слагаемых $\mathcal{L}^{(f)}$, $\mathcal{L}^{(g)}$, $-\sqrt{-f}\,U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$. Для двух первых можно воспользоваться преобразованиями, уже проделанными в ОТО, после чего, *с точностью до поверхностных членов*, они оказывается равными следующим выражениям

$$\mathcal{L}^{(f)} = \frac{N\sqrt{\eta}}{\kappa^{(f)}}\left(R^{(\eta)} - K^2 + SpK^2\right) + \mathcal{L}_M(\psi^A, \eta_{ij}, N, N^i),$$

$$\mathcal{L}^{(g)} = \frac{\bar{N}\sqrt{\gamma}}{\kappa^{(g)}}\left(R^{(\gamma)} - \bar{K}^2 + Sp\bar{K}^2\right) + \mathcal{L}_M(\phi^A, \gamma_{ij}, \bar{N}, \bar{N}^i),$$

где $\kappa^{(f)} = 16\pi G^{(f)}$, $\kappa^{(g)} = 16\pi G^{(g)}$, $R^{(\eta)}$, $R^{(\gamma)}$ – скалярные кривизны гиперповерхности, построенные с помощью метрик η_{ij}, γ_{ij},

$K_{ij}(x^i, t)$, $\bar{K}_{ij}(x^i, t)$ – вторые фундаментальные формы (тензоры внешней кривизны) гиперповерхности в римановых геометриях, заданных метриками $f_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}\left(\nabla_j N_i + \nabla_i N_j - \dot{\eta}_{ij}.\right)$$

$$\bar{K}_{ij} = \frac{1}{2\bar{N}}\left(\bar{N}_{i|j} + \bar{N}_{j|i} - \dot{\gamma}_{ij}.\right)$$

$\mathrm{Sp}\bar{K}^2 = \bar{K}_{ij}\bar{K}_{kl}\gamma^{ik}\gamma^{jl}$, а набла и вертикальная черта обозначают ковариантные производные в римановых геометриях 3-мерного пространства, определяемые метриками η_{ij}, γ_{ij}.

Третье слагаемое, т.е. потенциал, с учетом формулы

$$g^{ij} = \frac{g^{\perp i} g^{\perp j}}{g^{\perp\perp}} + \gamma^{ij},$$

и после подстановки в него 3+1-разложений принимает вид

$$-N\tilde{U} \equiv -N\sqrt{\eta}\, U(\eta_{ij}, \gamma_{ij}, u, u^i),$$

как видно, оно не содержит скоростей и поэтому не влияет на определения импульсов:

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{ij}}, \quad \pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}, \quad \Pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^A}, \quad \pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A},$$

$$\pi_N = 0, \quad \pi_{N^i} = 0, \quad \pi_u = 0, \quad \pi_{u^i} = 0.$$

Гамильтониан бигравитации

$$\mathrm{H}_{\mathrm{canonical}} = \int d^3x \left(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i + \bar{N}\bar{\mathcal{H}} + \bar{N}^i\bar{\mathcal{H}}_i + N\sqrt{\eta}U \right),$$

или

$$\mathrm{H}_{\mathrm{canonical}} = \int d^3x \left(N\left(\mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \sqrt{\eta}U\right) + N^i\left(\mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i\right)\right).$$

Связи

Первичные связи

$$\pi_N = 0, \quad \pi_{N^i} = 0, \quad \pi_u = 0, \quad \pi_{u^i} = 0.$$

Вторичные связи

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \sqrt{\eta}U = 0,$$

$$\mathcal{R}_i \equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0,$$

$$\bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = 0, \qquad \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} = 0.$$

Связи второго рода

Пусть $u^a = (u, u^i)$, $\pi_a = (\pi_u, \pi_{u^i})$, $\bar{\mathcal{H}}_a = (\bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{H}}_i)$, $a = 1, .., 4$. χ_A, $A = 1, .., 8$, тогда

$$\chi_A = \left(\pi_a, \bar{\mathcal{H}}_a + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^a} \right),$$

$$||\{\chi_A(x), \chi_B(y)\}|| = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{L}(x)\delta(x,y) \\ \mathbf{L}(x)\delta(x,y) & \mathbf{K}(x,y) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{L}_{ab}(x) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b}(x),$$

$$\mathbf{K}_{ab}(x,y) = \left\{ \bar{\mathcal{H}}_a(x) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^a}(x), \bar{\mathcal{H}}_b(y) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^b}(y) \right\}.$$

Скобки Дирака

Если матрица $\mathbf{L}$ не вырождена, то матрица $||\{\chi_A, \chi_B\}||$ имеет обратную:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^{-1}(x)\mathbf{K}(x,y)\mathbf{L}^{-1}(y) & \mathbf{L}^{-1}(x)\delta(x,y) \\ -\mathbf{L}^{-1}(x)\delta(x,y) & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

это позволяет определить скобки Дирака:

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \int dx \int dy \{F, \chi_A(x)\}\mathbf{C}^{AB}(x,y)\{\chi_B(y), G\}.$$

Для функционалов F, G, не зависящих от u, u^i, π_u, π_{u^i}, скобка Дирака совпадает со скобкой Пуассона:

$$\{F, G\}_D = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \eta_{ij}} \frac{\delta G}{\delta \Pi^{ij}} + \frac{\delta F}{\delta \psi_A} \frac{\delta G}{\delta \Pi^A} + \frac{\delta F}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta G}{\delta \pi^{ij}} + \frac{\delta F}{\delta \phi_A} \frac{\delta G}{\delta \pi^A} - (F \leftrightarrow$$

В то же время можно выразить плотность гамильтониана в виде

$$H = \int d^3x \left(N \left(\mathcal{H} + \tilde{U} - u \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} - u^i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} \right) + N^i \left(\mathcal{H}_i - \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} \right) \right),$$

тогда требуются нетривиальные скобки Дирака:

$$\{\gamma_{mn}(x), u^a(y)\}_D = -\mathbf{L}^{-1\,ab}(y) \{\gamma_{mn}(x), \bar{\mathcal{H}}_b(y)\},$$

$$\{\pi^{mn}(x), u^a(y)\}_D = \mathbf{L}^{-1\,ab}(y) \left(\frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^b \partial \gamma_{mn}} \delta(x, y) - \{\pi^{mn}(x), \bar{\mathcal{H}}_b(y)\} \right),$$

$$\{\Pi^{mn}(x), u^a(y)\}_D = \mathbf{L}^{-1\,ab} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^b \partial \eta_{mn}} \delta(x, y).$$

Условия на потенциал и алгебра связей

$$2\eta_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\eta_{ij}} + 2\gamma_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\gamma_{ij}} - u^i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u^k} = \delta^i_k\tilde{U},$$

$$2u^j\gamma_{jk}\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\gamma_{k\ell}} - u^\ell u\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u} + \left(\eta^{k\ell} - u^2\gamma^{k\ell} - u^k u^\ell\right)\frac{\partial\tilde{U}}{\partial u^k} = 0.$$

Связи первого рода удовлетворяют алгебре:

$$\{\mathcal{R}(x),\mathcal{R}(y)\}_D = \left[\eta^{ik}(x)\mathcal{R}_k(x) + \eta^{ik}(y)\mathcal{R}_k(y)\right]\delta_{,i}(x,y),$$

$$\{\mathcal{R}_i(x),\mathcal{R}_k(y)\}_D = \mathcal{R}_i(y)\delta_{,k}(x,y) + \mathcal{R}_k(x)\delta_{,i}(x,y),$$

$$\{\mathcal{R}_i(x),\mathcal{R}(y)\}_D = \mathcal{R}(x)\delta_{,i}(x,y).$$

План второй части работы

Пусть матрица

$$\mathbf{L}_{ab}(x) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b}(x),$$

будет теперь вырождена, тогда число связей второго рода среди χ_A уменьшается на 2, скобки Дирака строятся на 6 связях, вместо 8.

1. Будут ли выпавшие из обоймы 2 связи связями первого или второго рода?
2. Необходимы ли для решения этого вопроса новые условия на потенциал?
3. Если одна из этих связей первого рода, а другая – второго, то требуется найти еще одну, новую, связь второго рода.
4. Если обе эти связи первого рода, то какой калибровочной инвариантности они соответствуют?

N. Rosen, General Relativity and flat space. I,II. *Phys. Rev.* Vol. **57** 147-150; 150-153 (1940).

T. Damour and I. Kogan, Effective Lagrangians and Universality Classes of Nonlinear Bigravity. *Phys.Rev. D* **66** 104024 (2002); Thibault Damour, Ian I. Kogan, Antonios Papazoglou, Non-linear bigravity and cosmic acceleration. Phys.Rev. D66 (2002) 104025.

P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva Univ., N.Y., 1964. (Имеется перевод: П.А.М. Дирак. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968)

R. Arnowitt, S. Deser and Ch.W. Misner, The Dynamics of General Relativity. In Gravitation, an Introduction to Current Research, ed. L. Witten, Wiley, New York (1963); arXiv:gr-qc/0405109. (Эйнштейновский сборник 1967. М. "Наука", 1967, с. 233).

K. Kuchař J. Math. Phys. v.17 (1977) 777-791; 792-800; 801-820; 18 (1978) 1589-1597.

- В.О. Соловьев. Канонический формализм для релятивистской теории гравитации. Проблемы физики высоких энергий и теории поля: Труды IX Семинара, Протвино, 7-13 июля 1986 г. М.: Наука, 1987, 24-33.
- В.О. Соловьев. ЭЧАЯ т.19 (1988) 1115-1153.
- В.О. Соловьев, М.В. Чичикина. Канонический формализм релятивистской теории гравитации; arXiv:0812.4616.

- G. D'Amico, C. de Rham, S. Dubovsky, G. Gabadadze, D. Pirtskhalava, A.J. Tolley, Massive Cosmologies, arXiv:1108.5231.
- C. de Rham, G. Gabadadze, A.J. Tolley, Resummation of Massive Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **106** 231101 (2011); arXiv:1011.1232; Ghost free Massive Gravity in the Stückelberg language, *Phys. Lett.* Vol. **B711** 190-195 (2012); arXiv:1107.3820.
- S.F. Hassan, Rachel A. Rosen, Resolving the Ghost Problem in non-Linear Massive Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **108** 041101 (2012), arXiv:1106.3344; S. F. Hassan, Rachel A. Rosen, Angnis Schmidt-May, Ghost-free Massive Gravity with a General Reference Metric, *JHEP* **1202** 026 (2012), arXiv:1109.3230; S.F. Hassan, Rachel A. Rosen, Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity, *JHEP* **1202** 126 (2012), arXiv:1109.3515; Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity, *JHEP* **1204** 123 (2012), arXiv:1111.2070.

J. Kluson. Hamiltonian Formalism of Particular Bimetric Gravity Model (Submitted on 27 Nov 2012), 11 pages; arXiv:1211.6267

V.O. Soloviev, M.V. Tchichikina. Bigravity in Kuchar's Hamiltonian formalism. 1. The general case. (Submitted on 28 Nov 2012, last revised 29 Nov 2012)
Comments: 19 pages, Russian, English translation will appear;
Comments: 18 pages, English, some misprints are corrected;
arXiv:1211.6530.