

Бигравитация с потенциалом типа $dRGT$ в гамильтоновом формализме

В.О. Соловьёв

Семинар ОТФ
26 февраля 2013

Bigravity in Kuchar's Hamiltonian formalism. 2. The special case
Vladimir O. Soloviev and Margarita V. Tchichikina
arXiv:1302.5096

История и терминология

Биметрические теории, N. Rosen (1940)

Сильная гравитация, Isham, Salam, Strathdee (1971)

Массивная гравитация, Логунов, Мествиришвили (1984)

Бигравитация, Damour, Kogan (2002)

Потенциал dRGT, de Rham, Gabadadze, Tolley (2011)

Гамильтонов подход для dRGT, Hassan, R. Rosen (2011)

Формализм АДМ, Arnowitt, Deser, Misner (1962)

Формализм Кухаржа, Kuchař (1977)

Проблемы старой массивной гравитации

Дух (отрицательная кинетическая энергия)

Нарушения причинности (два световых конуса)

Неприменимость теории возмущений на малых расстояниях
(радиус Вайнштейна)

Отсутствие гамильтоновой связи (нет дальнего действия)

Бигравитация

Лагранжиан бигравитации

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(f)} + \mathcal{L}^{(g)} - \sqrt{-f} U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

состоит из двух почти независимых частей,

$$\mathcal{L}^{(f)} = \frac{1}{16\pi G^{(f)}} \sqrt{-f} f^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(f)} + \mathcal{L}_M^{(f)}(\psi^A, f_{\mu\nu}),$$

$$\mathcal{L}^{(g)} = \frac{1}{16\pi G^{(g)}} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(g)} + \mathcal{L}_M^{(g)}(\phi^A, g_{\mu\nu}),$$

и потенциала их взаимодействия

$$\sqrt{-f} U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}) \quad \text{или} \quad \sqrt[4]{fg} V(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}).$$

Потенциал de Rham, Gabadadze, Tolley

Модная сейчас теория с двумя метриками использует потенциал взаимодействия между ними, содержащий матричный квадратный корень из тензора свёртки метрик, т.е. если

$$Y_{\beta}^{\alpha} = g^{\alpha\mu} f_{\mu\beta},$$

то

$$X = \sqrt{Y}, \quad Y_{\beta}^{\alpha} = X_{\mu}^{\alpha} X_{\beta}^{\mu}.$$

Потенциал образуется как линейная комбинация коэффициентов характеристического многочлена матрицы X_{β}^{α}

$$P(\lambda) = \text{Det}(X - \lambda I),$$

т.е. как линейная комбинация симметричных многочленов от собственных значений этой матрицы

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_4\lambda_1 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4\lambda_1 + \lambda_4\lambda_1\lambda_2,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4,$$

или, через следы полиномов от матрицы,

$$\text{Sp}X,$$

$$\frac{1}{2} ((\text{Sp}X)^2 - \text{Sp}X^2),$$

$$\frac{1}{6} ((\text{Sp}X)^3 - 3\text{Sp}X\text{Sp}X^2 + 2\text{Sp}X^3),$$

$$\frac{1}{24} ((\text{Sp}X)^4 - 6(\text{Sp}X)^2\text{Sp}X^2 + 3(\text{Sp}X^2)^2 + 8\text{Sp}X\text{Sp}X^3 - 6\text{Sp}X^4).$$

Постановка задачи

Непосредственные вычисления с потенциалом dRGT затруднены. Поэтому тот анализ гамильтонова формализма, который уже сделан в ряде работ (Hassan, Rosen (2011), и другие статьи), представляется недостаточно убедительным. Наша цель – исходя из потенциала общего вида, вывести те его свойства, которые необходимы для реализации заявленной dRGT программы – построения теории массивной гравитации с 5 степенями свободы (без духов).

Аксиомы

Потенциал можно записать как функцию компонент двух метрик в $3 + 1$ -разложении $\tilde{U} = \tilde{U}(u, u^i, \eta_{ij}, \gamma_{ij})$.

Условия на потенциал, необходимые для существования алгебры связей 1 рода (см. доклад 11.12.2012), выполнены.

Гессиан

$$L_{ab}(x) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b}(x), \quad u^a = (u, u^i),$$

вырожден.

Гессиан

$$L_{ij}(x) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^i \partial u^j}(x), \quad i = 1, 2, 3,$$

невырожден.

...?

План второй части работы (на 11.12.2012)

Пусть матрица

$$L_{ab}(x) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b}(x),$$

будет теперь вырождена, тогда число связей второго рода среди χ_A уменьшается на 2, скобки Дирака строятся на 6 связях, вместо 8.

Будут ли выпавшие из обоймы 2 связи связями первого или второго рода?

Необходимы ли для решения этого вопроса новые условия на потенциал?

Если одна из этих связей первого рода, а другая – второго, то требуется найти еще одну, новую, связь второго рода.

Если обе эти связи первого рода, то какой калибровочной инвариантности они соответствуют?

Обозначения

Пусть $f_{\mu\nu}$ – первая (поначалу динамическая, потом, м.б. фоновая) метрика, а $g_{\mu\nu}$ – вторая (всегда динамическая) метрика, семейство гиперповерхностей задаётся уравнениями

$$X^\alpha = e^\alpha(\tau, x^i),$$

$$N^\alpha = \frac{\partial e^\alpha}{\partial \tau},$$

– векторное поле, которое должно быть времениподобным в обеих метриках,

$$g_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta < 0, \quad f_{\alpha\beta} N^\alpha N^\beta < 0;$$

индуцированными на гиперповерхности метриками будут

$$\gamma_{ij} = g_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu, \quad \eta_{ij} = f_{\mu\nu} e_i^\mu e_j^\nu,$$

$$\gamma_{ij}(x^k) dx^i dx^j > 0, \quad \eta_{ij}(x^k) dx^i dx^j > 0.$$

Возникают две разных нормали к гиперповерхности, n^α и $\bar{n}^\alpha$

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} n^\alpha e_i^\beta &= 0 & f_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta &= -1 \\ g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha e_i^\beta &= 0 & g_{\alpha\beta} \bar{n}^\alpha \bar{n}^\beta &= -1 \end{aligned}$$

и два базиса (n^α, e_i^α) , $(\bar{n}^\alpha, e_i^\alpha)$, которые связаны соотношением

$$\bar{n}^\alpha = \sqrt{-g^{\perp\perp}} n^\alpha - \frac{g^{\perp i}}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}} e_i^\alpha,$$

Два разложения (для каждого из базисов) имеют вид:

$$\begin{aligned} N^\alpha &= N n^\alpha + N^i e_i^\alpha = \bar{N} \bar{n}^\alpha + \bar{N}^i e_i^\alpha, \\ g^{\mu\nu} &= g^{\perp\perp} n^\mu n^\nu + g^{\perp j} n^\mu e_j^\nu + g^{i\perp} e_i^\mu n^\nu + g^{ij} e_i^\mu e_j^\nu = \\ &= -\bar{n}^\mu \bar{n}^\nu + \gamma^{ij} e_i^\mu e_j^\nu, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} N &= -n_\mu N^\mu, \quad N^i = e_\mu^i N^\mu, \quad \bar{N} = -\bar{n}_\mu N^\mu, \quad \bar{N}^i = \bar{e}_\mu^i N^\mu, \\ g^{\perp\perp} &= n_\mu n_\nu g^{\mu\nu}, \quad g^{\perp j} = g^{j\perp} = -n_\mu e_\nu^j g^{\mu\nu}, \quad g^{ij} = e_\mu^i e_\nu^j g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Связь между разложениями:

$$\bar{N} = \frac{N}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}}, \quad \bar{N}^i = N^i - \frac{g^{\perp i}}{g^{\perp\perp}} N,$$

Удобно для дальнейшего ввести новые переменные

$$u = \frac{1}{\sqrt{-g^{\perp\perp}}}, \quad u^i = -\frac{g^{\perp i}}{g^{\perp\perp}},$$

которые имеют простой геометрический смысл: u является величиной, обратной к норме (в динамической метрике) вектора n^α , построенного как единичная нормаль к гиперповерхности состояния в фоновой метрике, а u^i есть проекции (в динамической метрике) векторов координатного базиса гиперповерхности на направление того же вектора единичной нормали

$$u = \frac{1}{\sqrt{|g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu|}}, \quad u^i = \frac{g^{\mu\nu} n_\mu e_\nu^i}{\sqrt{|g^{\mu\nu} n_\mu n_\nu|}}.$$

Тогда

$$\bar{N} = uN, \quad \bar{N}^i = N^i + u^i N.$$

Построение гамильтониана

Для преобразования плотности лагранжиана необходимо преобразовать три слагаемых $\mathcal{L}^{(f)}$, $\mathcal{L}^{(g)}$, $-\sqrt{-f} U(f_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$. Для двух первых можно воспользоваться преобразованиями, уже проделанными в ОТО, после чего, с точностью до поверхностных членов, они оказываются равными следующим выражениям

$$\mathcal{L}^{(f)} = \frac{N\sqrt{\eta}}{\kappa^{(f)}} (R^{(\eta)} - K^2 + SpK^2) + \mathcal{L}_M(\psi^A, \eta_{ij}, N, N^i),$$

$$\mathcal{L}^{(g)} = \frac{\bar{N}\sqrt{\gamma}}{\kappa^{(g)}} (R^{(\gamma)} - \bar{K}^2 + Sp\bar{K}^2) + \mathcal{L}_M(\phi^A, \gamma_{ij}, \bar{N}, \bar{N}^i),$$

где $\kappa^{(f)} = 16\pi G^{(f)}$, $\kappa^{(g)} = 16\pi G^{(g)}$, $R^{(\eta)}$, $R^{(\gamma)}$ – скалярные кривизны гиперповерхности, построенные с помощью метрик η_{ij} , γ_{ij} ,

$K_{ij}(x^i, t)$, $\bar{K}_{ij}(x^i, t)$ – вторые фундаментальные формы (тензоры внешней кривизны) гиперповерхности в римановых геометриях, заданных метриками $f_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$,

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (\nabla_j N_i + \nabla_i N_j - \dot{\eta}_{ij}.)$$

$$\bar{K}_{ij} = \frac{1}{2\bar{N}} (\bar{N}_{i|j} + \bar{N}_{j|i} - \dot{\gamma}_{ij}.)$$

$\text{Sp}\bar{K}^2 = \bar{K}_{ij}\bar{K}_{kl}\gamma^{ik}\gamma^{jl}$, а набла и вертикальная черта обозначают ковариантные производные в римановых геометриях 3-мерного пространства, определяемые метриками η_{ij} , γ_{ij} .

Третье слагаемое, т.е. потенциал, с учетом формулы

$$g^{ij} = \frac{g^{\perp i} g^{\perp j}}{g^{\perp \perp}} + \gamma^{ij},$$

и после подстановки в него 3+1-разложений принимает вид

$$-N\tilde{U} \equiv -N\sqrt{\eta}U(\eta_{ij}, \gamma_{ij}, u, u^i),$$

как видно, оно не содержит скоростей и поэтому не влияет на определения импульсов:

$$\Pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\eta}_{ij}}, \quad \pi^{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}_{ij}}, \quad \Pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^A}, \quad \pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A},$$

$$\pi_N = 0, \quad \pi_{N^i} = 0, \quad \pi_u = 0, \quad \pi_{u^i} = 0.$$

Гамильтониан бигравитации

$$H_{\text{canonical}} = \int d^3x \left(N\mathcal{H} + N^i\mathcal{H}_i + \bar{N}\bar{\mathcal{H}} + \bar{N}^i\bar{\mathcal{H}}_i + N\sqrt{\eta}U \right),$$

или

$$H_{\text{canonical}} = \int d^3x \left(N \left(\mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \sqrt{\eta}U \right) + N^i \left(\mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i \right) \right).$$

Связи первичные и вторичные

Первичные связи

$$\pi_N = 0, \quad \pi_{N^i} = 0, \quad \pi_u = 0, \quad \pi_{u^i} = 0.$$

Вторичные связи

$$\mathcal{R} \equiv \mathcal{H} + u\bar{\mathcal{H}} + u^i\bar{\mathcal{H}}_i + \sqrt{\eta}U = 0,$$

$$\mathcal{R}_i \equiv \mathcal{H}_i + \bar{\mathcal{H}}_i = 0,$$

$$\mathcal{S} \equiv \bar{\mathcal{H}} + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} = 0, \quad \mathcal{S}_i \equiv \bar{\mathcal{H}}_i + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^i} = 0.$$

Связи второго рода (общий случай)

Пусть $u^a = (u, u^i)$, $\pi_a = (\pi_u, \pi_{u^i})$, $\bar{\mathcal{H}}_a = (\bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{H}}_i)$, $a = 1, \dots, 4$. χ_A , $A = 1, \dots, 8$, тогда

$$\chi_A = \left(\pi_a, \bar{\mathcal{H}}_a + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^a} \right),$$

$$\|\{\chi_A(x), \chi_B(y)\}\| = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{L}(x)\delta(x, y) \\ \mathbf{L}(x)\delta(x, y) & \mathbf{K}(x, y) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{L}_{ab}(x) = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^a \partial u^b}(x),$$

$$\mathbf{K}_{ab}(x, y) = \left\{ \bar{\mathcal{H}}_a(x) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^a}(x), \bar{\mathcal{H}}_b(y) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^b}(y) \right\}.$$

Связи второго рода (специальный случай)

Пусть набор связей 2 рода обозначен как $\tilde{\chi}_A$, $A = 1, \dots, 6$, где

$$\tilde{\chi}_A = (\pi_i, \mathcal{S}_i),$$

тогда матрица их скобок Пуассона невырождена

$$\|\{\tilde{\chi}_A(x), \tilde{\chi}_B(y)\}\| = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\mathbf{L}}(x)\delta(x, y) \\ \tilde{\mathbf{L}}(x)\delta(x, y) & \tilde{\mathbf{K}}(x, y) \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{\mathbf{L}}(x) = \|L_{ij}(x)\| = \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial u^i \partial u^j}(x), \quad \tilde{\mathbf{K}}(x, y) = \|K_{ij}(x, y)\|$$

$$K_{ij}(x, y) = \{\mathcal{S}_i(x), \mathcal{S}_j(y)\}.$$

Скобки Дирака

Если матрица $\tilde{\mathbf{L}}$ не вырождена, то матрица $||\{\tilde{\chi}_A, \tilde{\chi}_B\}||$ имеет обратную:

$$\tilde{\mathbf{C}}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{L}}^{-1}(x)\tilde{\mathbf{K}}(x, y)\tilde{\mathbf{L}}^{-1}(y) & \tilde{\mathbf{L}}^{-1}(x)\delta(x, y) \\ -\tilde{\mathbf{L}}^{-1}(x)\delta(x, y) & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

это позволяет определить скобки Дирака:

$$\{F, G\}_{\tilde{D}} = \{F, G\} - \int dx \int dy \{F, \tilde{\chi}_A(x)\} \tilde{\mathbf{C}}^{AB}(x, y) \{\tilde{\chi}_B(y), G\}.$$

Алгебра связей первого рода

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y\} &= (\eta^{ij}\mathcal{R}_j + uu^i\mathcal{S} - (\eta^{ij} - u^2\gamma^{ij} - u^i u^j)\mathcal{S}_j + Q^i)_x \delta_{,i}(x, y) \\
&- (\eta^{ij}\mathcal{R}_j + uu^i\mathcal{S} - (\eta^{ij} - u^2\gamma^{ij} - u^i u^j)\mathcal{S}_j + Q^i)_y \delta_{,i}(y, x) \approx \\
&\approx (\eta^{ij}\mathcal{R}_j + Q^i)(x)\delta_{,i}(x, y) - (\eta^{ij}\mathcal{R}_j + Q^i)(y)\delta_{,i}(y, x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{R}_{ix}, \mathcal{R}_y\} &= \mathcal{R}(x)\delta_{,i}(x, y) + u_{,i}\mathcal{S}\delta(x, y) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^j} \left(Q_i^j(x)\delta(x, y) \right) + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x^j} (u^j\mathcal{S}_i(x)\delta(x, y)) + u_{,i}^j\mathcal{S}_j\delta(x, y) \approx \\
&\approx \mathcal{R}(x)\delta_{,i}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x^j} \left(Q_i^j(x)\delta(x, y) \right),
\end{aligned}$$

$$\{\mathcal{R}_i(x), \mathcal{R}_j(y)\} = \mathcal{R}_i(y)\delta_{,j}(x, y) + \mathcal{R}_j(x)\delta_{,i}(x, y).$$

Условия на потенциал

$$Q_k^i = 2\eta_{jk} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta_{ij}} + 2\gamma_{jk} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{ij}} - u^j \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} = \delta_k^i \tilde{U},$$

$$Q^\ell = 2u^j \gamma_{jk} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \gamma_{k\ell}} - u^\ell u \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u} + (\eta^{k\ell} - u^2 \gamma^{k\ell} - u^k u^\ell) \frac{\partial \tilde{U}}{\partial u^k} = 0.$$

Первая таблица скобок Дирака

$\{, \}_{\tilde{D}}$	$\pi_u(y)$	$\Omega(y)$	$\mathcal{S}(y)$	$\mathcal{R}(y)$	$\mathcal{R}_j(y)$
$\pi_u(x)$	0	$-\Theta^i \delta_{,i}$	0	≈ 0	0
$\Omega(x)$	$\Theta^i \delta_{,i}$	?	?	?	≈ 0
$\mathcal{S}(x)$	0	?	$\Theta^i \delta_{,i}$	≈ 0	≈ 0
$\mathcal{R}(x)$	≈ 0	?	≈ 0	≈ 0	≈ 0
$\mathcal{R}_i(x)$	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0	≈ 0

Что дальше?

В работах итальянской группы *Comelli, Crisostomi, Nesti, Pilo* заявлены результаты, которые позволяют надеяться, что приняв новую аксиому:

для потенциала $\tilde{U}$ требуется выполнение условия $\Theta^i = 0$,

или решая уравнение Монжа-Ампера, можно будет доказать, что скобка Дирака $\{\Omega, \mathcal{R}\}_{\tilde{D}} = \Psi$ дает новую связь;

скобки Дирака $\{\Omega, \mathcal{S}\}_{\tilde{D}}$ и $\{\pi_u, \Psi\}_{\tilde{D}}$ отличны от нуля.

Тогда связей 2 рода: $\mathcal{S}$, π_u , Ω , Θ будет $i = 4$.

Связей первого рода: $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_i$ тоже будет $j = 4$.

Число пар гравитационных канонических переменных $n = 13$.

И тогда число степеней свободы бигравитации будет такое, как хотели dRGT: $n - i/2 - j = 13 - 2 - 4 = 7$.

Вторая таблица скобок Дирака

	Ψ	π_u	Ω	S	$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}_j$
Ψ	?	$? \neq 0$	?	?	$? \approx 0$	$? \approx 0$
π_u	$? \neq 0$	0	$-\Theta^k \delta_{,k} = 0$	0	$-S \approx 0$	0
Ω	?	$\Theta^k \delta_{,k} = 0$	?	$? \neq 0$	$\Psi \approx 0$	$\Omega \delta_j \approx 0$
S	?	0	$? \neq 0$	$\Theta^k \delta_{,k} = 0$	$\Omega \approx 0$	$S \delta_j \approx 0$
$\mathcal{R}$	$? \approx 0$	$S \approx 0$	$-\Psi \approx 0$	$-\Omega \approx 0$	$\mathcal{R}^k \delta_{,k} \approx 0$	$\mathcal{R} \delta_j \approx 0$
$\mathcal{R}_i$	$? \approx 0$	0	$-\Omega \delta_{,i} \approx 0$	$-S \delta_{,i} \approx 0$	$-\mathcal{R} \delta_{,i} \approx 0$	$\mathcal{R}_i \delta_j \approx 0$

S. Deser, A. Waldron. Acasuality of massive gravity (December 2012)

"... the subject remained moribund until the recent (independent) rediscovery (dRGT, 2011) of the results by Wess-Zumino (1970). This exhumation has, unsurprisingly, generated an immense industry. Our purpose is to re-inter at least one model. . ."

Цитирование

dRGT (200)

Hassan, R. Rosen (80)

Kluson (29)

Golovnev (23)

Comelli et al (12)

Deser, Waldron (9)

N. Rosen, General Relativity and flat space. I,II. *Phys. Rev.* Vol. **57** 147-150; 150-153 (1940).

T. Damour and I. Kogan, Effective Lagrangians and Universality Classes of Nonlinear Bigravity. *Phys.Rev. D* **66** 104024 (2002);
Thibault Damour, Ian I. Kogan, Antonios Papazoglou, Non-linear bigravity and cosmic acceleration. *Phys.Rev. D* **66** (2002) 104025.

P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva Univ., N.Y., 1964. (Имеется перевод: П.А.М. Дирак. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968)

R. Arnowitt, S. Deser and Ch.W. Misner, The Dynamics of General Relativity. In *Gravitation, an Introduction to Current Research*, ed. L. Witten, Wiley, New York (1963); arXiv:gr-qc/0405109.
(Эйнштейновский сборник 1967. М. "Наука", 1967, с. 233).

K. Kuchař *J. Math. Phys.* v.17 (1977) 777-791; 792-800; 801-820; 18 (1978) 1589-1597.

В.О. Соловьев. Канонический формализм для релятивистской теории гравитации. Проблемы физики высоких энергий и теории поля: Труды IX Семинара, Протвино, 7-13 июля 1986 г. М.: Наука, 1987, 24-33.

В.О. Соловьев. ЭЧАЯ т.19 (1988) 1115-1153.

В.О. Соловьев, М.В. Чичикина. Канонический формализм релятивистской теории гравитации; arXiv:0812.4616.

- G. D'Amico, C. de Rham, S. Dubovsky, G. Gabadadze, D. Pirtskhalava, A.J. Tolley, Massive Cosmologies, arXiv:1108.5231.
- C. de Rham, G. Gabadadze, A.J. Tolley, Resummation of Massive Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **106** 231101 (2011); arXiv:1011.1232; Ghost free Massive Gravity in the Stückelberg language, *Phys. Lett.* Vol. **B711** 190-195 (2012); arXiv:1107.3820.
- S.F. Hassan, Rachel A. Rosen, Resolving the Ghost Problem in non-Linear Massive Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **108** 041101 (2012), arXiv:1106.3344; S. F. Hassan, Rachel A. Rosen, Angnis Schmidt-May, Ghost-free Massive Gravity with a General Reference Metric, *JHEP* **1202** 026 (2012), arXiv:1109.3230; S.F. Hassan, Rachel A. Rosen, Bimetric Gravity from Ghost-free Massive Gravity, *JHEP* **1202** 126 (2012), arXiv:1109.3515; Confirmation of the Secondary Constraint and Absence of Ghost in Massive Gravity and Bimetric Gravity, *JHEP* **1204** 123 (2012), arXiv:1111.2070.

- S. Deser, A. Waldron. Acasuality of massive gravity; arxiv:1212.5835.
- D. Comelli, F. Nesti, L. Pilo. Weak massive gravity, arxiv:1302.4447.
- D. Comelli, M. Crisostomi, F. Nesti, L. Pilo. Degrees of freedom in massive gravity, *Phys. Rev. D* **86** 101502 (2012); arxiv:1204.1027.